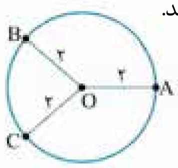
فهرست

فصل یکم
ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱ ترسیم‌های هندسی

در درس اول از فصل یک، ترسیم‌های هندسی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بحث، ابتدا چند ویژگی مهم را در ترسیم‌های هندسی، مثل نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطه یا یک خط مقدار ثابتی است، بیان نموده، سپس روش رسم نیمساز، عمودمنصف، مثلث، چندضلعی‌های خاص و ... را مطالعه می‌کنیم.

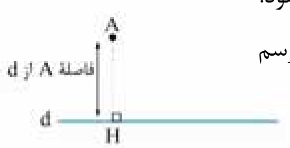
یکی از مهم‌ترین مسائل مقدماتی در ترسیم، پیداکردن مجموعه نقاطی است که از یک نقطهٔ ثابت مثل O، به فاصلهٔ ثابت و مشخصی باشند.



مطابق شکل روبه‌رو تعدادی نقطه در نظر گرفته شده که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم ۲ واحد قرار دارند. با کمی دقت متوجه می‌شویم چون نقطهٔ O ثابت و همچنین فاصلهٔ نقاط موردنظر از O نیز ثابت و معلوم است، پس مجموعه نقاط مورد بحث روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ قرار می‌گیرند.

نتیجه مهم مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R هستند، مشخص‌کنندهٔ دایره‌ای مثل C به مرکز O و شعاع R خواهند بود. این دایره را معمولاً با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم. (شما عزیزان در کتاب هندسهٔ یازدهم، به طور عمیق با مبحث دایره آشنا می‌شوید.)

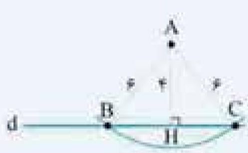
یادآوری فاصلهٔ یک نقطه مثل A از یک خط، برابر است با طول عمودی که از نقطهٔ A بر خط d اخراج می‌شود.

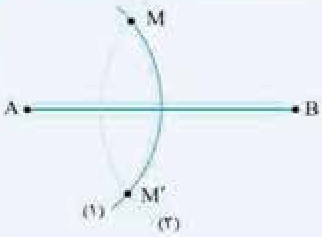


می‌توانیم بگوییم کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از نقاط موجود روی خط d برابر است با طول عمودی که از A بر خط d رسم می‌گردد؛ یعنی نقطهٔ H، نزدیکترین نقطه به نقطهٔ A است که از خط d انتخاب می‌شود.

مثال ۱ **نقطهٔ A مطابق شکل به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۶ واحد از نقطهٔ A باشند.**

پاسخ مطابق شکل وقتی گفته می‌شود فاصلهٔ A از خط d برابر ۴ است، یعنی طول عمودی که از A بر خط d وارد شده برابر ۴ است. از طرفی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۶ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ قرار می‌گیرند. پس به مرکز A و شعاع ۶ کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. نقاط B و C جواب مسئله هستند.





مثال ۲ **مطابق شکل پاره‌خط AB به طول ۴ واحد داده شده است. یک بار به مرکز A و شعاع ۲/۵ واحد، کمان (۱) و یک بار هم به مرکز B و شعاع ۳ واحد، کمان (۲) رسم گردیده است. این دو کمان یکدیگر را در M و M' قطع کرده‌اند:**

الف) فاصلهٔ نقاط تقاطع دو کمان از A و B را مشخص کنید.

ب) برای این‌که اصولاً تقاطعی داشته باشیم، باید چه شرطی روی فاصلهٔ A و B و اندازهٔ شعاع‌ها گذاشته شود؟

پ) محیط چهارضلعی $AMBM'$ را بیابید.

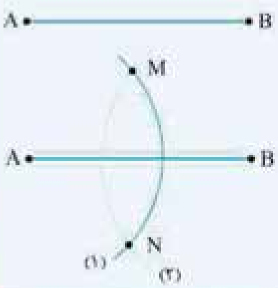
پاسخ **الف** طبق شکل داده‌شده در فرض، تمام نقاط روی کمان (۱) که به مرکز A و شعاع ۲/۵ زده شده، از نقطهٔ A، فاصلهٔ ثابت ۲/۵ دارند. از طرفی تمام نقاط روی کمان (۲) هم که به مرکز B و شعاع ۳ رسم گردیده، از نقطهٔ B، فاصلهٔ ثابت ۳ خواهند داشت. این وضعیت برای نقاط M و M' هم صادق است؛ یعنی M و M'، از A فاصلهٔ ۲/۵ و از B فاصلهٔ ۳ دارند. $MA = M'A = ۲/۵\ ,\ MB = M'B = ۳$

ب اگر کمان‌های (۱) و (۲) بخواهند در دو نقطهٔ متقاطع باشند، باید جمع شعاع‌های دو کمان از طول پاره‌خط AB بزرگ‌تر باشد.

پ با توجه به این‌که محیط هر چندضلعی برابر جمع اضلاع آن است، پس داریم:

$$\text{محیط چهارضلعی } AMBM' = AM + MB + BM' + M'A = ۲/۵ + ۳ + ۳ + ۲/۵ = ۱۱$$

مثال ۳ **دو نقطهٔ A و B را به فاصلهٔ ۴ cm از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A برابر ۲/۵ cm و از B برابر ۳ cm باشد.**



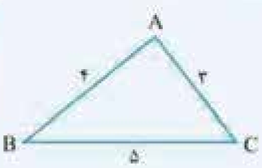
پاسخ مطابق شکل ابتدا پاره‌خط $AB = ۴\ cm$ رسم شده است.

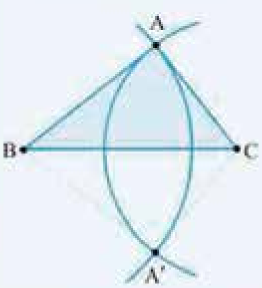
برای این‌که فاصلهٔ نقاط موردنظر از A برابر ۲/۵ cm باشد باید روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲/۵ cm قرار گیرند. هم‌چنین روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ cm هم قرار می‌گیرند (تا فاصله‌شان از B برابر ۳ cm باشد). پس به مرکز A و شعاع ۲/۵ cm و هم‌چنین به مرکز B و شعاع ۳ cm کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند. این دو نقطه مطلوب مسئله هستند (به ترتیب کمان‌های (۱) و (۲)).

رسم مثلث با داشتن یک سری اطلاعات، یکی از مسائل مهم ترسیمات هندسی است. در کتاب درسی هندسه (۱)، ترسیم مثلث فقط با داشتن اضلاع آن بیان شده است.

فقط به این نکته توجه داشته باشید که هر مثلثی قابل رسم نخواهد بود؛ بلکه باید جمع هر دو ضلع آن، از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد. (به این مطلب می‌گوییم **قضیهٔ نامساوی مثلثی**.)

مثال ۴ **چگونه می‌توان مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر رسم کرد؟**





پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن است. برای رسم مثلث ABC ابتدا یکی از اضلاع مثلث (مثل بزرگ‌ترین ضلع)، یعنی $BC = ۵\ cm$ را رسم می‌کنیم. حال فقط رأس A مانده است. طبق فرض چون $AB = ۴\ cm$ بوده و رأس B هم ثابت است، پس رأس A بر دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ cm قرار دارد. بنابراین ابتدا کمانی به مرکز B و شعاع ۴ cm رسم می‌کنیم.

به ترتیب مشابه، چون $AC = ۳\ cm$، پس A روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ cm واقع است. بنابراین کمانی به مرکز C و شعاع ۳ cm می‌کشیم تا کمان قبلی را در نقطهٔ A قطع کند. (دقت کنید برای این مسئله دو مثلث ABC و $A'BC$ رسم می‌شود که هر دو در حقیقت یک مثلث هستند.)

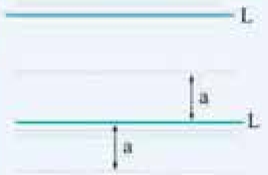
دقت کنید در این مسئله با برقراری شرط $۵ < ۴ + ۳$، مطمئن هستیم که مثلث قابل رسم است. (یعنی اگر جمع دو ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر از طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد، آن مثلث قابل رسم خواهد بود.)

تا حالا به یک خیابان مستقیم، خط وسط آن و جدول دو طرف دقت کرده‌اید؟ هر کسی که روی جدول خیابان قرار داشته باشد تا خط وسط، فاصله‌اش یک مقدار ثابت است (مثلاً ۵ متر). حالا این مطلب را در ذهن خودتان داشته باشید و به مسئلهٔ بعدی توجه کنید:

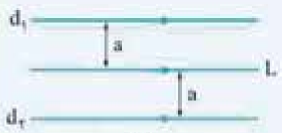
مثال ۵ مجموعه‌ای از نقاط را چنان بیابید که از خط داده‌شدهٔ L به فاصلهٔ معلوم a باشند. $(a > ۰)$

پاسخ مطابق شکل خط L را در نظر می‌گیریم.

می‌خواهیم مجموعه‌ای از نقاط را پیدا کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از خط L عدد ثابت و معلوم a باشد. مطابق شکل (۱)، چند نقطه در نظر می‌گیریم که فاصلهٔ آن‌ها از خط L عدد معلوم a باشد.


(۱)

در این صورت با اتصال این نقاط به هم معلوم می‌شود که مجموعهٔ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از خط معلوم L، مقدار مشخص و ثابت a است، دو خط موازی L و در طرفین آن و به فاصلهٔ a از خط L می‌باشند.(شکل (۲))

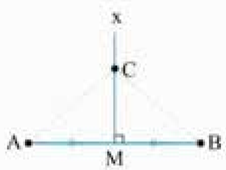

(۲)

در این قسمت از درس می‌خواهیم راجع به عمودمنصف بیشتر بدانیم. یعنی اول خاصیت آن، بعد هم طریقهٔ ترسیمش.

عمودمنصف برای یک پاره‌خط تعریف می‌شود و همان‌طور که از اسم آن پیداست، عمودمنصف یک پاره‌خط هم بر آن پاره‌خط عمود است و هم آن را نصف می‌کند. حالا ابتدا برویم سراغ خاصیت عمودمنصف:

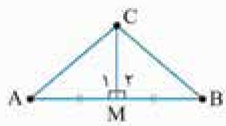
خاصیت عمودمنصف یک پاره خط

مطابق شکل پاره‌خط AB و عمودمنصف آن یعنی نیم‌خط Mx رسم شده و نقطهٔ C را روی عمودمنصف این پاره‌خط در نظر گرفته‌ایم. **می‌خواهیم ثابت کنیم فاصلهٔ این نقطه (C) از دو سر پاره‌خط AB برابر است.**



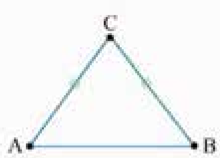
فرض	C روی Mx، عمودمنصف AB است
حکم	$AC = BC$

اثبات نقطهٔ C را به دو سر پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. مطابق شکل در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMC و BMC داریم:



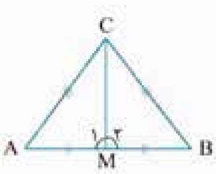
$$\left.\begin{array}{l} AM = BM \\ MC = MC \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ضزض})} \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{BMC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} AC = BC$$

حال در حالت برعکس، مطابق شکل نقطهٔ C را چنان در نظر می‌گیریم که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ یکسان باشد. **می‌خواهیم ثابت کنیم نقطهٔ C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.**



فرض	$AC = BC$
حکم	C روی عمودمنصف AB است

اثبات مطابق شکل نقطهٔ C را به نقطهٔ M وسط AB وصل می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم $MC \perp AB$ است:



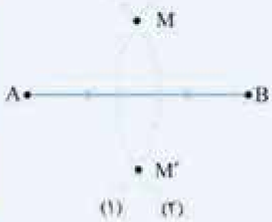
$$\overset{\Delta}{AMC}, \overset{\Delta}{BMC} : \left\{\begin{array}{l} AC = BC \\ AM = BM \\ CM = CM \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ضضض})} \overset{\Delta}{ACM} \cong \overset{\Delta}{BMC} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \quad (*)$$

و چون AB یک پاره‌خط است پس $A\hat{M}B = ۱۸۰^\circ$ یعنی $\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰^\circ$؛ بنابراین طبق (*) نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ$ پس $CM \perp AB$

و چون خودمان C را به وسط AB وصل کرده‌ایم، پس MC عمودمنصف AB بوده و در نهایت C روی عمودمنصف AB قرار می‌گیرد.

نتیجه هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس اگر نقطه‌ای از دو سر پاره‌خطی به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار می‌گیرد.

مثال ۶ **نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان شعاع از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در M و M' قطع کنند. M و M' چه ویژگی مشترکی دارند؟**



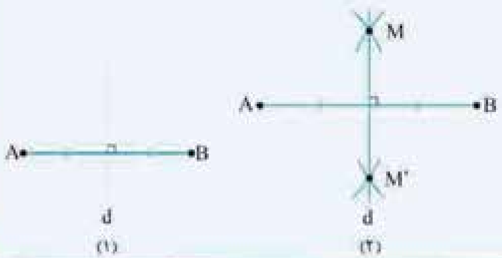
پاسخ مطابق شکل دو کمان با **شعاع‌های مساوی** هم و هر کدام بیش از $\frac{AB}{2}$، یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B زده شده و نقاط M و M' محل برخورد این دو کمان می‌باشند.

هر کدام از نقاط روی کمان (۱) از نقطهٔ A و هر کدام از نقاط روی کمان (۲) از نقطهٔ B فاصلهٔ یکسانی دارند. بنابراین کاملاً واضح است که نقاط M و M' که روی دو کمان (۱) و (۲) قرار دارند، از هر دو نقطهٔ A و B فاصلهٔ یکسان دارند (چون شعاع دو کمان (۱) و (۲) یکسان است). پس M و M' روی عمودمنصف AB قرار می‌گیرند.

نکته برای رسم یک خط منحصربه‌فرد، وجود دو نقطهٔ متمایز روی آن خط کافی است. یعنی اگر دو نقطهٔ متمایز از خطی را داشته باشید آن خط به راحتی رسم می‌شود. (دو نقطه را به هم وصل کرده از طرفین امتداد دهید.)

مثال ۷ **پاره‌خط دلخواه AB داده شده است. مراحل رسم عمودمنصف آن را توضیح دهید.**

پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد (شکل (۱)). برای این‌که بتوانیم خط d را رسم کنیم باید دو نقطهٔ متمایز از آن را داشته باشیم، طوری که از A و B به یک فاصله باشند. بنابراین مطابق شکل (۲)، دو کمان با شعاع‌های یکسان، یکی به مرکز A و دیگری به مرکز B می‌زنیم.

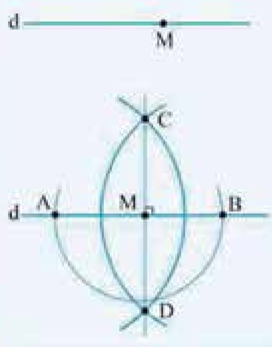


دقت کنید برای این‌که این دو کمان با هم متقاطع باشند، شعاع‌های آن‌ها باید بیش از $\frac{AB}{2}$ باشد (باید نامساوی مثلثی $AM + MB > AB$ رعایت شود). نقاط تقاطع را M و M' می‌نامیم. چون M و M' روی دو کمان با شعاع‌های یکسان قرار دارند (به مراکز A و B)، پس $MA = MB$ و $M'A = M'B$. بنابراین M و M' هر دو روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند (چون از دو سر این پاره‌خط فاصلهٔ یکسان دارند)؛ پس با اتصال این دو نقطهٔ متمایز، عمودمنصف موردنظر رسم خواهد شد (شکل(۲)).

بعضی از مواقع لازم است خطی عمود بر یک خط داده‌شده یا موازی با آن را رسم نماییم. در این‌صورت از خواص عمودمنصف استفاده می‌کنیم. یعنی هر طور شده باید عمودمنصف با پرگار رسم شود. *این مورد یادتون نره!!!*

به مثال‌های بعدی توجه کنید:

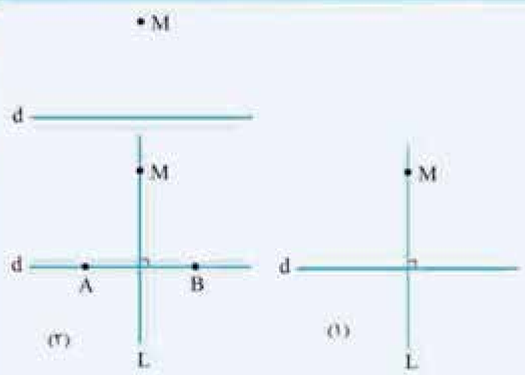
مثال ۸ **مراحل و روش رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده از یک نقطه روی آن را توضیح دهید.**



پاسخ مطابق شکل، خط d و نقطهٔ M روی آن داده شده است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

اگر بتوانیم روی خط d، پاره‌خطی مثل AB در نظر بگیریم که M وسط AB باشد، در این صورت عمودمنصف AB از M گذشته و خودبه‌خود بر d عمود می‌گردد. پس ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند. حال به مراکز A و B و به **شعاع یکسان** و هر کدام بزرگ‌تر از $\frac{AB}{2}$، کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند. با اتصال C و D به یکدیگر، عمودمنصف AB رسم شده که قطعاً از M می‌گذرد (چون M وسط AB است پس مثل D و C از نقاط A و B به یک فاصله بوده و در نتیجه M، C و D روی یک خط قرار می‌گیرند).

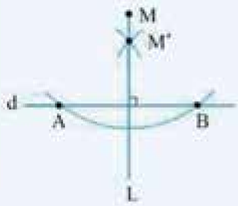
مثال ۹ **مراحل و روش رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده، از یک نقطه خارج آن را توضیح دهید.**



پاسخ مطابق شکل نقطهٔ M خارج خط d قرار دارد. می‌خواهیم خطی بر d عمود کنیم تا از M بگذرد. فرض می‌کنیم خط L، از M گذشته و بر d عمود باشد. (شکل (۱))

مطابق شکل (۲) روی خط d پاره‌خطی مثل AB را در نظر گرفته‌ایم که عمودمنصف آن از M گذشته است (خط L). در این صورت L خودبه‌خود بر d عمود می‌شود.

برای مشخص‌کردن نقاط A و B، به مرکز M و شعاع بیش از فاصلهٔ M تا خط d، کمانی می‌زنیم تا خط d را در A و B قطع کند. حال عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم (به مراکز A و B دو کمان با شعاع دلخواه و بیشتر از $\frac{AB}{۲}$ می‌زنیم. یکی از نقاط برخورد دو کمان را M' می‌نامیم.)؛ حال M و M' را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم (دقت کنید M و M' هر دو روی عمودمنصف AB قرار دارند). در این صورت عمودمنصف AB رسم شده است که از M گذشته و بر خط d عمود است.

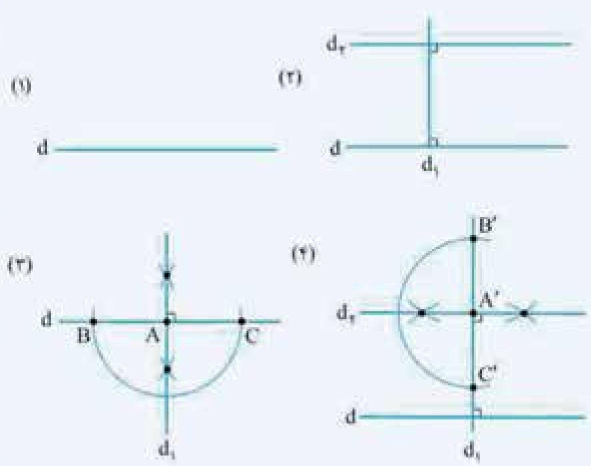


مثال ۱۰ **مراحل و روش رسم خطی موازی با یک خط داده‌شده را توضیح دهید.**

پاسخ مطابق شکل (۱) خطی مانند d مفروض است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که به موازات d باشد. مطابق شکل (۲)، اگر بتوانیم خطی مثل d_1 را عمود بر d و سپس خط d_2 را عمود بر d_1 رسم کنیم، $d_2 \parallel d$ می‌شود (دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند).

پس طبق شکل (۳) ابتدا نقطهٔ دلخواه A را روی d در نظر گرفته و با رسم کمانی به مرکز A و شعاع دلخواه، پاره‌خط BC را روی d ظاهر می‌کنیم. عمودمنصف BC همان d_1 است. مطابق شکل (۴) روی d_1 نقطهٔ دلخواه A' که روی d نیست، در نظر گرفته شده و کمانی به مرکز A' و شعاع دلخواه رسم گردیده است. سپس در مرحلهٔ بعدی عمودمنصف پاره‌خط $B'C'$ رسم شده است.

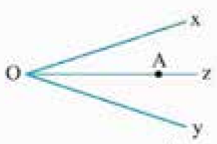
$$\left.\begin{array}{l} d \perp d_1 \\ d_2 \perp d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel d_2$$



خُب حالا که مبحث عمودمنصف و مثال‌های مربوط به آن را دیدید، می‌خواهیم برویم سراغ یک مبحث مهم دیگر.

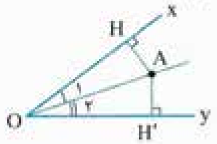
از دوران متوسطهٔ اول یا حتی دبستان!!! با عبارت «نیمساز یک زاویه» آشنا شده‌اید. حالا در این قسمت، هم خاصیت آن را با هم مرور می‌کنیم هم طریقهٔ رسم را.

خاصیت مهم نیمساز یک زاویه



مطابق شکل زاویهٔ xOy و نیمساز آن یعنی Oz رسم شده است. نقطهٔ دلخواه A را روی نیمساز زاویهٔ xOy در نظر می‌گیریم. **می‌خواهیم ثابت کنیم فاصلهٔ این نقطه تا دو ضلع زاویه یکسان است.**

اثبات



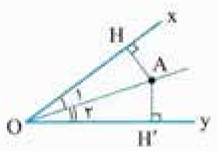
فرض	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $AH \perp Ox$, $AH' \perp Oy$
حکم	$AH = AH'$

از نقطهٔ A بر اضلاع زاویهٔ xOy عمود می‌کنیم. طبق شکل رسم‌شده، در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH و OAH' داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OAH'} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} AH = AH'$$

حال در حالت برعکس، مطابق شکل نقطهٔ A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یعنی Ox و Oy یکسان باشد. **می‌خواهیم ثابت کنیم نقطهٔ A روی نیمساز $x\hat{O}y$ قرار دارد.**

اثبات مطابق شکل داریم:



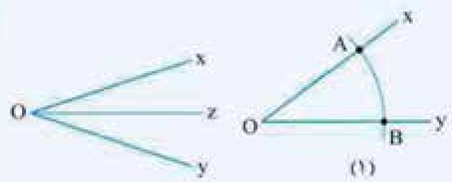
فرض	$AH \perp Ox$, $AH' \perp Oy$, $AH = AH'$
حکم	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\overset{\Delta}{OAH}, \overset{\Delta}{OAH'}: \left\{\begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \\ OA = OA \\ AH = AH' \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائم}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OAH'} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

یعنی OA همان نیمساز $\hat{O}$ است؛ پس A روی نیمساز زاویهٔ xOy (یا همان $\hat{O}$) قرار دارد.

نتیجهٔ مهم هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه فاصلهٔ یکسانی دارد و برعکس اگر فاصلهٔ یک نقطه از دو ضلع زاویه یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه واقع است.

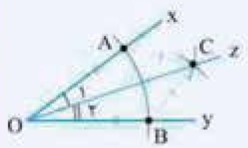
مثال ۱۱ زاویهٔ دلخواه xOy داده شده است. مراحل رسم نیمساز آن را توضیح دهید.



(۱)

پاسخ فرض می‌کنیم مسئله حل شده و نیم‌خط Oz نیمساز آن باشد. برای این‌که نیم‌خط Oz را رسم کنیم، باید نقطه‌ای غیر از O (رأس زاویه) روی نیمساز داشته باشیم که فاصله‌اش از اضلاع زاویه (Oy, Ox) یکسان باشد. پس مطابق شکل (۱) ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. چون نقاط روی محیط یک دایره از مرکز به یک فاصله‌اند پس $OA = OB$.

حال به مراکز **A** و **B** و به شعاع **یکسان و بزرگ‌تر از $\frac{AB}{۲}$** کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ **C** قطع کنند؛ پس فاصلهٔ نقطهٔ **C** از **A** و **B** یکسان است. در این صورت داریم:



$$\overset{\Delta}{OAC}, \overset{\Delta}{OBC}: \begin{cases} OA = OB \\ OC = OC \\ AC = BC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})} \overset{\Delta}{OAC} \cong \overset{\Delta}{OBC}$$

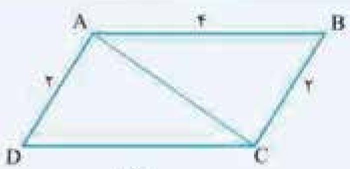
بنابراین از هم‌نهشتی فوق نتیجه می‌شود $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$، پس OC یا همان Oz نیمساز $x\hat{O}y$ است.

دانش‌آموزان عزیز دقت کنید که رسم نیمساز یک زاویه، روش دیگری هم دارد که در سؤالات امتحانی مطرح شده است.

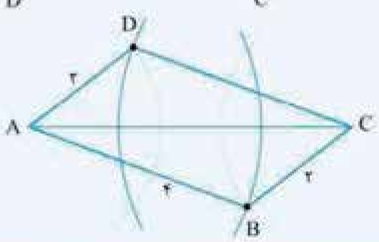
تذکر در کتاب درسی، روش رسم چهارضلعی‌های مهم توضیح داده شده است. مهم‌ترین چهارضلعی مورد بحث، متوازی‌الاضلاع است که ترسیم آن، با داشتن اضلاع یا قطرها بیان شده است.

به مثال‌های طرح‌شده دقت کنید:

مثال ۱۲ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۲ و ۴ باشد.

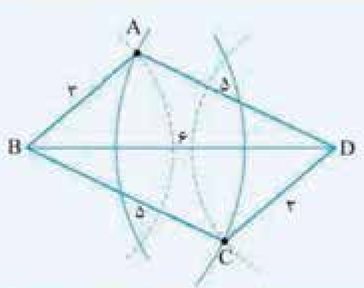


پاسخ مطابق شکل متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با اضلاع $AB = ۴$ و $AD = ۲$ رسم شده است.



بنابراین برای رسم متوازی‌الاضلاع موردنظر، ابتدا پاره‌خط AC (به طول کم‌تر از ۶) را به عنوان قطر این متوازی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. (دقت کنید در مثلث ABC طبق قضیهٔ نامساوی مثلثی $AC < AB + BC$ است؛ یعنی $AC < ۲ + ۴$ یا $AC < ۶$.) از نقطهٔ A (به مرکز A) دو کمان به شعاع‌های ۲ و ۴ و از نقطهٔ C نیز دو کمان به شعاع‌های ۲ و ۴ رسم می‌کنیم و مانند شکل نقطهٔ برخورد کمان‌ها را B و D می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع موردنظر است.

مثال ۱۳ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول اضلاعش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

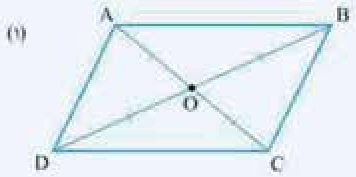


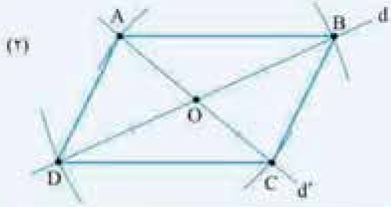
پاسخ **روش اول** ابتدا قطر $BD = ۶$ را رسم می‌کنیم؛ سپس به مرکز B دو کمان به شعاع‌های ۳ و ۵ (مساوی طول اضلاع متوازی‌الاضلاع) می‌زنیم و همچنین به مرکز D و همین شعاع‌ها، دو کمان دیگر رسم می‌کنیم. محل برخورد یک کمان با شعاع کوچک و یک کمان با شعاع بزرگ، یکی از B و دیگری از D را نقاط A و C می‌نامیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

یادآوری در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.

پس برای رسم متوازی‌الاضلاعی که دو قطر آن داده شده، باید به مرکز محل برخورد قطرها و شعاعی معادل **نصف قطرها** کمان بزنیم.

مثال ۱۴ **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۶ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟**





پاسخ مطابق شکل (۱) متوازی‌الاضلاع ABCD با قطرهای $AC=4$ و $DB=6$ رسم شده است. چون قطرها منصف یکدیگرند، $OA=OC=2$ و $OB=OD=3$؛ پس برای رسم این متوازی‌الاضلاع، ابتدا دو خط d و d' را که در نقطهٔ O متقاطع هستند، می‌کشیم. به مرکز O و شعاع ۲، دو کمان می‌زنیم تا خط d' را در نقاط A و C قطع کنند.

هم‌چنین به مرکز O و شعاع ۳، دو کمان دیگر می‌زنیم تا خط d را در B و D قطع کنند. نقاط A، B، C و D رئوس متوازی‌الاضلاع موردنظر است (شکل (۲)).

چون زاویهٔ بین قطرها داده نشده است، پس بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این شرایط رسم می‌گردد.

در سؤالات امتحانی روش رسم مستطیل، لوزی و مربع با داشتن قطرها یا اضلاع توضیح داده شده است (از اول هم گفتیم سؤالات امتحانی را بخوانید!!!)

سؤال‌های امتحانی

۱- نقاط A و B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از هم قرار دارند. جاهای خالی را طوری پر کنید که مسئلهٔ زیر دو جواب داشته باشد:

«نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.»

۲- نقاط A و B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم قرار دارند. جاهای خالی را طوری پر کنید که مسئلهٔ زیر یک جواب داشته باشد:

«نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.»

۳- نقاط A و B به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم قرار دارند. جاهای خالی را طوری پر کنید که مسئلهٔ زیر جواب نداشته باشد: «نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.»

۴- مجموعه‌ای از نقاط را چنان بیابید که از خط داده‌شدهٔ L به فاصلهٔ معلوم a باشند. $(a>0)$

۵- مثلث ABC را با فرض $AB=3$ و $AC=5$ و $\hat{A}=60^\circ$ رسم کنید.

۶- مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

۷- آیا مثلثی به اضلاع ۴، ۸ و ۲۰ قابل رسم است؟ چرا؟

۸- پاره‌خط دلخواه AB داده شده است. مراحل رسم عمودمنصف آن را توضیح دهید.

۹- مراحل و روش رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده از یک نقطه روی آن را توضیح دهید.

۱۰- مراحل و روش رسم خطی عمود بر یک خط داده‌شده، از یک نقطه خارج آن را توضیح دهید.

۱۱- مراحل و روش رسم خطی موازی با یک خط داده‌شده را توضیح دهید.

۱۲- دایرهٔ C را در نظر بگیرید. به کمک خط‌کش و پرگار، مرکز این دایره را بیابید.

۱۳- زاویهٔ دلخواه xOy داده شده است. مراحل رسم نیمساز آن را توضیح دهید.

۱۴- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید و نقطه‌ای را بیابید که فاصله‌اش از هر دو ضلع این زاویه، یک واحد باشد. به کمک نقطه‌ای که یافته‌اید، نیمساز این زاویه را رسم نمایید.

۱۵- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول اضلاعش ۴ و ۶ و طول یک قطر آن ۸ باشد.

۱۶- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۱۷- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو قطر آن ۶ و ۴ و زاویهٔ بین دو قطر 60° باشد.

۱۸- مستطیلی رسم کنید که طول هر قطر آن $6\,cm$ باشد.

۱۹- یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ باشد.

۲۰- یک لوزی به ضلع ۵ و قطر ۶ رسم کنید.

۲۱- طریقهٔ رسم مربعی را که اندازهٔ قطر آن مقدار مشخص a باشد، توضیح دهید.

۲۲- مربعی به ضلع $6\sqrt{2}$ رسم کنید.

۲ استدلال

به طور کلی روش نتیجه‌گیری را استدلال می‌گوییم. شیوهٔ درست استدلال، در زندگی روزمره نقش پراهمیتی دارد.
در این قسمت از درس با چند مدل از استدلال آشنا می‌شویم.

استدلال استقرایی

در این نوع از استدلال، از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در مورد آن موضوع گرفته می‌شود. به عبارت دیگر در این استدلال از جزء به کل می‌رسیم. البته با چنین استدلالی نمی‌توانیم همواره به درستی نتیجهٔ گرفته‌شده مطمئن باشیم. مثلاً اگر فردی با بررسی و مشاهدهٔ این‌که در مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع جمع زاویه‌های داخلی برابر ۳۶۰° است، به این نتیجهٔ کلی برسد که در هر چهارضلعی محدب جمع زاویه‌های داخلی ۳۶۰° است، از استدلال استقرایی استفاده کرده است. از این نوع استدلال فقط می‌توان به عنوان یک کمک خوب در حل مسئله کمک گرفت.

استدلال استنتاجی

این نوع از استدلال، براساس نتیجه‌گیری منطقی از حقایقی که قبلاً درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به دست می‌آید. مثلاً با توجه به این‌که جمع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰° است، با رسم یکی از قطرهای یک چهارضلعی و تبدیل آن به دو مثلث می‌توانیم ثابت کنیم جمع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب ۳۶۰° است.

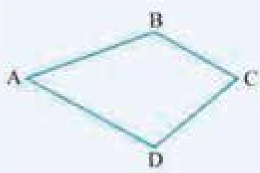
تذکر در بسیاری از مسائل به کمک استدلال استقرایی حدس‌های کلی می‌زنیم؛ سپس حدس‌های خود را دقیق و دقیق‌تر می‌کنیم و در نهایت به کمک استدلال استنتاجی دربارهٔ درستی آن مسئله به طور قطع و یقین حکم می‌کنیم.

استدلال تمثیلی

در این نوع از استدلال، در مورد دو چیز شبیه هم، حکم مشابه می‌دهیم. مثلاً یک لیوان آب را در نظر بگیرید. اگر این مقدار آب در ۱۰۰ درجهٔ سانتی‌گراد بجوشد، با استدلال تمثیلی می‌گوییم یک لیوان از یک مایع بی‌رنگ مثل آب هم در همان دمای ۱۰۰ درجه می‌جوشد. دقت کنید استدلال تمثیلی هم نمی‌تواند یک حکم را برای ما ثابت کند.
حال به حل چند مثال اثباتی با استفاده از استدلال استنتاجی توجه کنید:

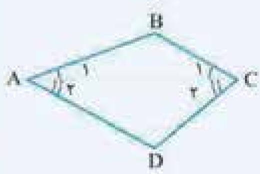
مثال ۱۵ ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب ۳۶۰° است.

پاسخ مطابق شکل روبه‌رو چهارضلعی ABCD را در نظر گرفته و جدول فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض	چهارضلعی : ABCD
حکم	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$

حال در این چهارضلعی قطر AC را رسم می‌کنیم تا به دو مثلث تبدیل شود. در این صورت جمع زاویه‌های داخلی چهارضلعی، برابر است با جمع زاویه‌های داخلی دو مثلث ایجادشده:



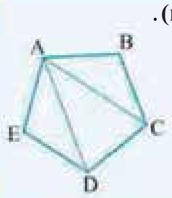
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ & (۱) \\ \overset{\Delta}{ADC}: \hat{A}_۲+\hat{D}+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ & (۲) \end{cases}$$

حال طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را جمع می‌بندیم (نظیربه‌نظیر):

و در نهایت حکم مسئله ثابت می‌شود.

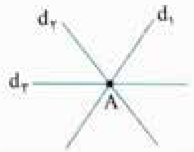
$$(\hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{C}_۱)+(\hat{A}_۲+\hat{D}+\hat{C}_۲)=۳۶۰^\circ \Rightarrow \underbrace{(\hat{A}_۱+\hat{A}_۲)}_{\text{کل } \hat{A}}+(\hat{B}+\hat{D})+\underbrace{(\hat{C}_۱+\hat{C}_۲)}_{\text{کل } \hat{C}}=۳۶۰^\circ$$

مثال ۱۶ به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$.



پاسخ مطابق شکل یک پنج‌ضلعی محدب در نظر گرفته شده و تمام قطرهای گذرنده از یک رأس آن (مثل A) رسم گردیده است. در این صورت سه مثلث پدید می‌آید. بنابراین با استدلال استقرایی می‌توان نتیجه گرفت که در صورت ترسیم تمام قطرهای گذرنده از یک رأس در n ضلعی محدب، $(n-۲)$ مثلث پدید می‌آید و چون در هر مثلث جمع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است، بنابراین در n ضلعی محدب جمع تمام زاویه‌های داخلی برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$.

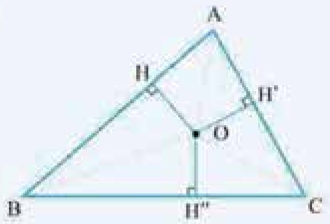
خطوط همرس: خطوطی هستند که همگی از یک نقطه می‌گذرند. در شکل روبه‌رو خطوط d_1 ، d_2 و d_3 در نقطهٔ A همرس هستند.



مثال ۱۷ **به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید هر سه نیمساز داخلی مثلث همرس‌اند.**

پاسخ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس اگر نقطه‌ای از هر دو ضلع یک زاویه، فاصلهٔ مساوی داشته باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. در شکل فوق نیمساز زاویه‌های A و B را رسم کرده‌ایم و این نیمسازها یکدیگر را در O قطع کرده‌اند.

فرض	نیمسازهای داخلی $\overset{\Delta}{ABC}$ رسم شده
حکم	این نیمسازها در O همرس‌اند



ثابت می‌کنیم نقطهٔ O روی نیمساز $\hat{C}$ قرار دارد؛ به این منظور از O بر سه ضلع مثلث عمود می‌کنیم:

O روی نیمساز $\hat{A}$ است $\Rightarrow OH = OH'$

O روی نیمساز $\hat{B}$ است $\Rightarrow OH = OH''$

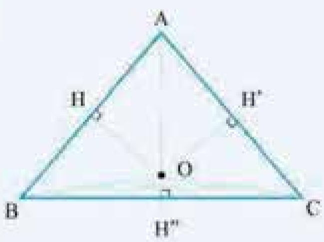
$\Rightarrow OH' = OH'' \xrightarrow{\text{طبق خاصیت نیمساز}}$ O روی نیمساز $\hat{C}$ است

پس هر سه نیمساز داخلی مثلث در نقطهٔ O متقاطع یا همرس‌اند.

مثال ۱۸ **به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید سه عمودمنصف مثلث در یک نقطه همرس‌اند.**

پاسخ می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس، اگر فاصلهٔ نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط مساوی هم باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط مفروض قرار دارد. در شکل مقابل چون AB و AC دو ضلع مثلث هستند (دو پاره‌خط متقاطع)، پس عمودمنصف‌های آن‌ها هم در نقطه‌ای مثل O متقاطع‌اند.

فرض	عمودمنصف‌های مثلث ABC رسم‌شده
حکم	این عمودمنصف‌ها در O همرس‌اند



ثابت می‌کنیم O روی عمودمنصف ضلع BC هم قرار دارد. از O به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم:

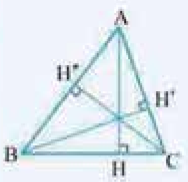
O روی عمودمنصف AB $\Rightarrow OA = OB$

O روی عمودمنصف AC $\Rightarrow OA = OC$

$\Rightarrow OB = OC \xrightarrow{\text{طبق خاصیت عمودمنصف}}$ O روی عمودمنصف BC است

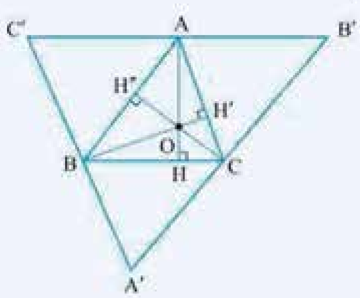
پس هر سه عمودمنصف در O همرس‌اند.

مثال ۱۹ **به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.**



پاسخ **روش اول** می‌دانیم عمودمنصف‌های سه ضلع در هر مثلث همرس‌اند. پس اگر ثابت کنیم ارتفاعات مثلث ABC عمودمنصف‌های یک مثلث دیگر هستند، خودبه‌خود همرسی ارتفاع‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ ثابت می‌شود.

فرض	سه ارتفاع مثلث ABC رسم‌شده
حکم	سه ارتفاع در O همرس‌اند



مطابق شکل از سه رأس مثلث ABC، خطوطی به موازات ضلع روبه‌روی آن‌ها رسم می‌کنیم (از رأس A به موازات BC، از رأس B به موازات AC و از رأس C به موازات AB)؛ در این صورت مثلث $A'B'C'$ پدید می‌آید.

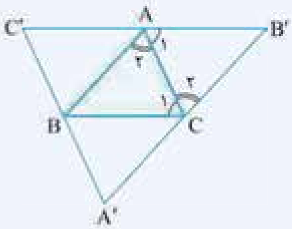
در چهارضلعی $AB'CB$، اضلاع روبه‌رو با هم موازی‌اند؛ پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $BC = AB'$ (*). همچنین به دلیل مشابه چهارضلعی $AC'BC$ متوازی‌الاضلاع است بنابراین $BC = AC'$ (**).

$(*) , (**) \Rightarrow AB' = AC' \Rightarrow$ A وسط $B'C'$ است (۱)

از طرفی می‌توان گفت: $AH \perp BC \ , \ BC \parallel B'C' \Rightarrow AH \perp B'C'$ (۲)

بنابراین طبق روابط (۱) و (۲) پاره‌خط AH عمودمنصف $B'C'$ (یکی از اضلاع مثلث $A'B'C'$) است.

به ترتیب مشابه می‌توان ثابت کرد بقیهٔ ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های اضلاع مثلث $A'B'C'$ می‌باشند (BH' عمودمنصف $A'C'$ و همچنین CH'' عمودمنصف $A'B'$ است) و در نهایت همرسی آن‌ها ثابت می‌شود.



روش دوم دقیقاً مانند توضیح روش اول، مثلث $A'B'C'$ را می‌سازیم.

(دقت کنید در شکل رسم‌شده، دیگر ارتفاعات مثلث ABC را نکشیده‌ایم.)

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ و } \overset{\Delta}{AB'C}: \begin{cases} AB' \parallel BC \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB \parallel B'C \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ AC = AC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{AB'C} \quad (*)$$

به همین ترتیب $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ABC'}$ اثبات می‌شود، پس طبق(*) نتیجه می‌شود $\overset{\Delta}{AB'C} \cong \overset{\Delta}{ABC'}$ و از تساوی اجزای نظیر، می‌توان رابطهٔ $AC' = AB'$ را نتیجه گرفت. **یعنی A وسط $B'C'$ است.**

از طرفی می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط، خود با هم موازی‌اند. حال به شکل ترسیم‌شده در روش اول مراجعه می‌کنیم:

$AH \perp BC, BC \parallel B'C' \Rightarrow AH \perp B'C'$

و در نهایت AH **عمودمنصف** ضلع $B'C'$ از مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ است. به همین ترتیب بقیهٔ ارتفاعات مثلث اولیهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$، عمودمنصف‌های مثلث ثانویهٔ $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ هستند؛ بنابراین همرس‌اند.

قضیه برخی نتایج مهم و پرکاربرد را که از استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه می‌نامیم. یک قضیه از فرض (اطلاعات داده‌شده) و حکم (مطلوب مسئله) تشکیل شده است؛ که با استفاده از استدلال مناسب باید آن را ثابت کنیم. بیان استدلال هم که برهان نام دارد.

نکته یک قضیه (قضیهٔ شرطی) را به صورت $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهیم. p شرط کافی برای q و همچنین q شرط لازم برای p است. به عبارت دیگر p فرض یا مقدم قضیه و همچنین q حکم یا پیرو (تالی) قضیه است.

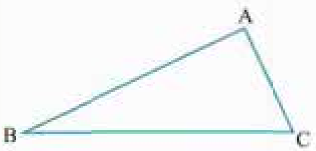
مثلاً **در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر**. این رابطهٔ مهم را که به کمک استدلال استنتاجی ثابت می‌شود، **قضیهٔ فیثاغورس** می‌گوییم.

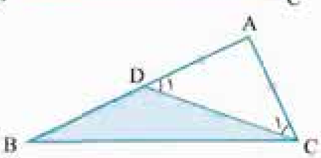
در اثبات قضیه، داده‌های مسئله (فرض) و مطلوب مسئله (حکم) را در یک جدول نوشته و به کمک استدلال استنتاجی (بُرهان) آن را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ۱ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

اثبات مطابق شکل در مثلث ABC فرض شده ضلع AB از ضلع AC بزرگ‌تر است. می‌خواهیم ثابت کنیم زاویهٔ روبه‌رو به AB یعنی $\hat{C}$، از زاویهٔ روبه‌رو به AC یعنی $\hat{B}$ نیز بزرگ‌تر است. بدین منظور روی ضلع بزرگ‌تر یعنی AB و از طرف رأس A، به اندازهٔ ضلع کوچک‌تر یعنی AC جدا کرده و پاره‌خط حاصل را AD می‌نامیم. مثلث ADC یک مثلث متساوی‌الساقین است.

فرض	$AB > AC$
حکم	$\hat{C} > \hat{B}$





$\overset{\Delta}{ADC}: AD = AC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \quad (*)$

از طرفی برای مثلث DBC، زاویهٔ D_1 یک زاویهٔ خارجی بوده و از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش مثل $\hat{B}$، بزرگ‌تر است:

$$\overset{\Delta}{DBC}: \hat{D}_1 > \hat{B} \xrightarrow[\hat{D}_1 = \hat{C}_1]{\text{طبق}(*)} \hat{C}_1 > \hat{B} \quad (**)$$

چون پاره‌خط DC درون زاویهٔ C رسم شده بنابراین $\hat{C}_1$ جزئی از $\hat{C}$ بوده و $\hat{C} > \hat{C}_1$ و در نهایت طبق (**) نتیجه می‌شود: $\hat{C} > \hat{B}$.

عکس قضیه اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، آن‌چه را که حاصل می‌شود، عکس قضیه می‌گوییم. اگر قضیه‌ای به صورت $p \Rightarrow q$ باشد، عکس آن را به صورت $q \Rightarrow p$ نشان می‌دهیم.

دقت کنید یک قضیه، عبارتی همیشه درست است؛ ولی عکس قضیه ممکن است درست باشد یا نباشد.

مثال۲۰ عکس قضیهٔ (۱) را که قبلاً مطرح شده است، بنویسید.

پاسخ اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

فرض	$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{C} > \hat{B}$
حکم	$AB > AC$

مثال ۲۱ **عکس قضیه‌های زیر را بنویسید:**

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) در دو مثلث متشابه، اضلاع متناظر، متناسب‌اند.

پ) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ داریم $a^2=b^2+c^2$.

ت) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.

پاسخ **الف** عکس قضیه: هر متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است.

ب عکس قضیه: اگر در دو مثلث اضلاع متناظر، متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

پ عکس قضیه: اگر در مثلث ABC، رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ برقرار باشد، آن‌گاه $\hat{A}=90^\circ$.

ت عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف هم باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

گزاره به یک جملهٔ خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد گزاره گفته می‌شود.

گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده گفته می‌شود؛ مثل «مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث 360° است».
یا این‌که می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند؛ مثل «فردا جمعه است و ۲۵ عددی مرکب است» که به آن گزارهٔ مرکب می‌گوییم.

نقیض یک گزاره: همان‌طور که گفته شد ارزش یک گزاره همواره یا درست است یا نادرست. ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف ارزش همان گزاره است.
دقت کنید در یک گزارهٔ شرطی به‌جای این‌که دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، این خبر با یک شرط بیان می‌گردد. مثلا «اگر فردا برف بیاید، مدرسه تعطیل خواهد شد».

مثال ۲۲ **نقیض گزاره‌های زیر را مشخص کنید:**

الف) عدد a بزرگ‌تر از b است.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

پاسخ **الف** نقیض گزاره: «چنین نیست که عدد a بزرگ‌تر از b باشد» یا این‌که « a بزرگ‌تر از b نیست» یا این‌که « a کوچک‌تر مساوی b است».

ب نقیض گزاره: «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° باشد» یا این‌که «مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست».

برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

معمولاً برای اثبات قضیه‌ها، به طور مستقیم از داده‌ها که همان فرض‌های مسئله هستند شروع می‌کنیم و با استفاده از سایر قضیه‌ها و اصول بدیهی و تعریف‌ها (یعنی حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم)، برقراری حکم را نشان می‌دهیم. اما در بعضی از مسائل نمی‌توانیم قضیه‌ها را به طور مستقیم اثبات کنیم و بهتر است راه غیرمستقیم را پیش بگیریم. در زندگی روزانه هم از استدلال غیرمستقیم استفادهٔ زیادی می‌کنیم؛ مثلاً ممکن است در یک آزمون سه‌گزینه‌ای، ندانیم پاسخ درست کدام گزینه است؛ اما بتوانیم نادرستی دو گزینه را با اطمینان تشخیص دهیم. در این صورت قطعاً گزینهٔ باقی‌مانده صحیح است. این استدلال بر پایهٔ استدلال غیرمستقیم خواهد بود.

به عبارت دیگر به صورت دقیق‌تر روش اثبات غیرمستقیم بر مبنای دو اصل منطقی زیر استوار است:

۱ یک عبارت ریاضی و نقیض (خلاف) آن، هر دو درست نیستند.

۲ از بین یک عبارت ریاضی و خلاف آن، قطعاً یکی درست است.

اثبات غیرمستقیم، **برهان خُلف** نامیده می‌شود. برای استفاده از برهان خلف گام‌های زیر را برمی‌داریم:

۱ فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خُلف).

۲ نشان می‌دهیم درست‌بودن نقیض حکم، با حقایق دانسته‌شده یا فرض اولیه در تناقض است.

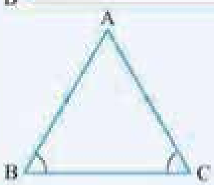
۳ با نادرست‌بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که خودِ حکم درست است.

به حل چند مثال به کمک برهان خلف توجه کنید:

مثال ۲۳ **با برهان خُلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC داشته باشیم $AB \neq AC$، آن‌گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.**

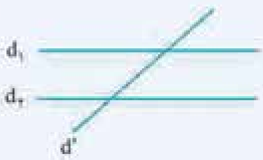
پاسخ

فرض	$AB \neq AC$
حکم	$\hat{B} \neq \hat{C}$



طبق برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد؛ یعنی $\hat{B}=\hat{C}$ باشد. در این صورت مثلث ABC با ساق‌های AB و AC، متساوی‌الساقین است پس $AB=AC$؛ که این خلاف فرض است. بنابراین فرضِ خلف یعنی $\hat{B}=\hat{C}$ نادرست است پس $\hat{B} \neq \hat{C}$.

مثال ۲۴ با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد.



فرض	$d_1 \parallel d_2 \ , \ d' \nparallel d_1$
حکم	$d_2 \nparallel d'$

پاسخ طبق برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خُلف) یعنی $d_2 \parallel d'$. از طرفی چون طبق فرض $d_1 \parallel d_2$ بنابراین $d_1 \parallel d'$ (دو خط موازی با یک خط، خود با هم موازی‌اند. در این‌جا d_1 و d' هر دو با d_2 موازی شده‌اند پس خود با هم موازی‌اند) که این خلاف فرض است (چون در فرض آمده $d_1 \nparallel d'$) پس فرضِ خلفِ $d_2 \parallel d'$ باطل بوده و $d_2 \nparallel d'$ خواهد شد.

مثال ۲۵ عکس قضیهٔ (۱) را که قبلاً مطرح شده بود، بیان کرده و آن را ثابت کنید.

فرض	$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} > \hat{B}$
حکم	$BC > AC$

پاسخ عکس قضیهٔ (۱): اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع مقابل به زاویهٔ کوچک‌تر.

اثبات طبق برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف)، یعنی $BC > AC$ نباشد $(BC \not> AC)$؛ پس $BC \le AC$ خواهد بود.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

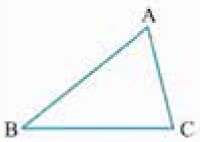
الف $BC < AC$: طبق قضیهٔ (۱) چون BC کوچک‌تر از AC شده، پس زاویهٔ روبه‌رو به BC یعنی $\hat{A}$، حتماً از زاویهٔ روبه‌رو به AC یعنی $\hat{B}$، کوچک‌تر است یعنی $\hat{A} < \hat{B}$؛ که این مورد با فرضِ $\hat{A} > \hat{B}$ در تناقض است.

ب $BC = AC$: در این صورت مثلث ABC، متساوی‌الساقین با ساق‌های BC و AC است. پس زاویه‌های روبه‌رو به دو ساق مساوی‌اند یعنی $\hat{B} = \hat{A}$ که این مورد هم با فرضِ $\hat{A} > \hat{B}$ در تناقض است.

پس در هر دو حالت به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین فرض خلف یعنی $BC \le AC$ که ابتدا در نظر گرفته بودیم نادرست است پس $BC > AC$.

قضیهٔ نامساوی مثلثی

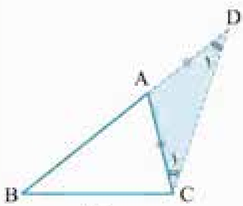
در هر مثلث، جمع هر دو ضلع، از ضلع سوم بزرگ‌تر است.



فرض	$\overset{\Delta}{ABC}$ رسم شده است
حکم	$AB + AC > BC$ * $AB + BC > AC$ $AC + BC > AB$

اثبات روش اول

مطابق شکل(۱)، ضلع AB را از طرف A، به اندازهٔ AC امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ D برسیم. $\overset{\Delta}{ACD}$ متساوی الساقین است:



(۱)

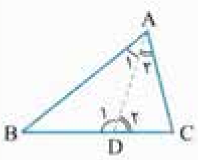
$$\overset{\Delta}{ACD} : AD = AC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow[\hat{C} > \hat{C}_1]{\text{چون } AC \text{ داخل } \hat{C} \text{ رسم شده}} \hat{C} > \hat{D}_1$$

حال در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، طبق قضیهٔ کتاب درسی، وقتی $\hat{C}$ از $\hat{D}_1$ بزرگ‌تر می‌شود، ضلع روبه‌رو به $\hat{C}$، یعنی BD، از ضلع روبه‌رو به $\hat{D}_1$، یعنی BC، بزرگ‌تر است:

$$BD > BC \Rightarrow AB + AD > BC \xrightarrow{AD = AC} \boxed{AB + AC > BC}$$

بقیهٔ احکام به همین ترتیب ثابت خواهند شد.

روش دوم مطابق شکل (۲)، نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند:



(۲)

$$\overset{\Delta}{ABD} : \hat{D}_2 > \hat{A}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \overset{\Delta}{ADC} : \hat{D}_2 > \hat{A}_2 \xrightarrow[\text{کتاب}]{\text{طبق قضیهٔ}} AC > DC \qquad (۱)$$

زاویهٔ خارجی

$$\overset{\Delta}{ADC} : \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \overset{\Delta}{ABD} : \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \xrightarrow[\text{کتاب}]{\text{طبق قضیهٔ}} AB > BD \qquad (۲)$$

با جمع‌کردن طرفین نامساوی (۱) و (۲) داریم:

$$AB + AC > BD + DC \Rightarrow \boxed{AB + AC > BC}$$

نکتهٔ بسیار مهم **در هر مثلث طول هر کدام از اضلاع بین جمع و تفریق طول دو ضلع دیگر قرار می‌گیرد.**

مثال ۲۶ **سه پاره‌خط به طول های $۶x$، $x+۷$ و $۴(x-۱)$ مفروض‌اند. اگر جمع طول این سه پاره‌خط ۳۶ باشد، آیا این پاره‌خط‌ها می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند؟ چرا؟**

پاسخ فرض می‌کنیم $a=۶x$، $b=x+۷$ و $c=۴(x-۱)$ در این صورت داریم:

$$a+b+c=۳۶ \Rightarrow ۶x+x+۷+۴x-۴=۳۶ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow a=۱۸\ ,\ b=۱۰\ ,\ c=۸$$

حال با توجه به این‌که جمع هر دو ضلع مثلث، از ضلع سوم بزرگ‌تر است (قضیهٔ نامساوی مثلثی) برای بررسی، **جمع دو ضلع کوچک‌تر را از ضلع بزرگ‌تر ، بزرگ‌تر قرار می‌دهیم.** اگر نامساوی درست بود، مثلث تشکیل می‌شود:

$b+c>a \Rightarrow ۱۰+۸>۱۸$ (غ ق ق) $\Rightarrow$ مثلث تشکیل نمی‌شود

مثال ۲۷ **حدود x را چنان بیابید که $۲x-۴$، ۱۰ و ۱۲، اضلاع یک مثلث باشند.**

پاسخ اولاً بدیهی است که هر ضلع، طول مثبت دارد، دوماً نامساوی مثلثی را بین سه ضلع می‌نویسیم:

$$\left.\begin{cases} ۱)\ ۲x-۴>۰ \Rightarrow x>۲ \\ ۲)\ ۱۰+۱۲>۲x-۴ \Rightarrow ۲x<۲۶ \Rightarrow x<۱۳ \\ ۳)\ ۱۰+۲x-۴>۱۲ \Rightarrow x>۳ \\ ۴)\ ۱۲+۲x-۴>۱۰ \Rightarrow x>۱ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\cap} ۳<x<۱۳$$

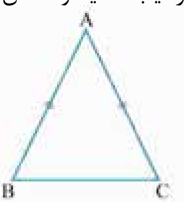
قضیهٔ دوشرطی

تعریف قضیهٔ دوشرطی: اگر عکس یک قضیهٔ شرطی درست باشد (یعنی خودش هم یک قضیهٔ شرطی باشد)، این دو قضیهٔ شرطی را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد که به آن قضیهٔ دوشرطی می‌گوییم.

به عبارت دیگر فرض می‌کنیم عبارت $p \Rightarrow q$ یک قضیهٔ شرطی باشد (گزارهٔ p فرض قضیه و گزارهٔ q حکم آن است). در این صورت اگر عکس قضیهٔ مذکور یعنی $q \Rightarrow p$ هم درست باشد، از ترکیب این دو قضیه عبارتی به صورت $p \Leftrightarrow q$ حاصل می‌شود که آن را قضیهٔ دوشرطی می‌نامیم.
$p \Leftrightarrow q$ خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q و برعکس» یا «p اگر و تنها اگر q». مثلاً می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو به دو ساق مساوی‌اند (قضیه). یا اگر در مثلثی دو زاویه با هم مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین است (عکس قضیه). پس با ترکیب قضیه و عکس آن داریم:

در هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو به دو ساق برابرند و برعکس.

$$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC \Leftrightarrow \hat{C}=\hat{B}$$



مثال ۲۸ **عکس هر کدام از قضیه‌های زیر را نوشته و در صورت امکان آن‌ها را به صورت قضیهٔ دوشرطی بنویسید.**

الف) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند. **ب) اگر دو مثلث متشابه باشند، اضلاع نظیر به نظیر متناسب‌اند.**

پاسخ **الف** عکس قضیه هم درست است. یعنی اگر قطرهای یک چهارضلعی همدیگر را نصف کنند، چهارضلعی متوازی‌اضلاع است (اثبات در فصل ۲ آمده است). بنابراین می‌توان گفت «در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند و برعکس» یا «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرها یکدیگر را نصف کنند».

ب عکس قضیه هم درست است. پس می‌توان گفت: «اگر دو مثلث متشابه باشند، اضلاع نظیر به نظیر متناسب‌اند و برعکس» یا «دو مثلث متشابه‌اند، اگر و تنها اگر اضلاعشان نظیر به نظیر متناسب باشد».

مثال نقض

تعریف مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. به موارد زیر توجه کنید:

۱. تمام اعداد صحیح منفی هستند. (یک حکم کلی در مورد اعداد صحیح)
۲. برای هر دو عدد حقیقی a و b، $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ و $n \in \mathbb{N}$. (حکمی کلی در مورد ضرب رادیکال‌ها)
۳. جمع زاویه‌های خارجی هر مثلث ۳۶۰° است. (حکمی کلی در مورد تمام مثلث‌ها)
۴. به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $۷^n-۱$ مضرب ۶ است.

با کمی دقت متوجه می‌شویم:

۱) عدد (۲+) یک عدد صحیح هست ولی منفی نیست؛ پس حکم (۱) با همین یک مثال نقض رد می‌شود.

۲) اگر فرجهٔ رادیکال زوج باشد، عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد. پس با فرض $n=2$ و $a=b=-2$ داریم: $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}=2$ که این تساوی نادرست است زیرا در سمت چپ آن $\sqrt{-2}$ تعریف‌نشده است.

اما برای موارد (۳) و (۴) نمی‌توانیم مثال نقضی پیدا کنیم. با این حال باز هم نمی‌توان گفت که این احکام همواره درست‌اند؛ مگر این‌که با استدلال استنتاجی، ثابت کنیم این احکام درست‌اند یا نادرست.

مثال ۲۹ آیا احکام زیر درست است؟ در صورت نادرست‌بودن مثال نقض بیاورید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه از ۱۰ برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه کوچک‌تر است.

ب) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا داریم $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

پ) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.

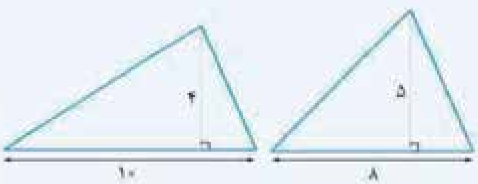
ت) در هر مثلث، هر ارتفاع از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

پاسخ الف) خیر. مثلثی در نظر می‌گیریم که در آن اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از ۱۰ برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر نباشد. مثلاً مثلثی با زاویه‌های $\hat{A}=160^\circ$، $\hat{B}=15^\circ$ و $\hat{C}=5^\circ$. در این صورت 160° از ۱۰ برابر 5° یعنی 50° کوچک‌تر نیست.

ب) خیر. اگر مجموعه‌های A و B دارای عضو غیرمشترک باشند، آن‌گاه $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq A$ است.

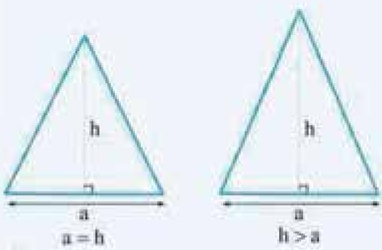
$$A=\{a,b,c\}\ ,\ B=\{a,d,b\}\ \Rightarrow\ A\not\subseteq B\ ,\ B\not\subseteq A$$

پ) خیر. می‌توان مثلث‌هایی را در نظر گرفت که «نصف حاصل‌ضرب یک ضلع در ارتفاع نظیر» برای آن‌ها مقدار ثابتی باشد، ولی چون اضلاع این دو مثلث یکسان نیستند پس دو مثلث هم‌نهشت نخواهند بود.

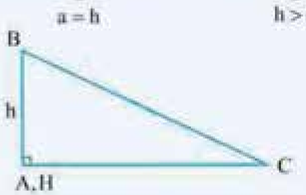


$$S_1=\frac{4\times10}{2}=20 \qquad S_2=\frac{5\times8}{2}=20$$

ت) خیر. می‌توان مثلثی در نظر گرفت که در آن، ارتفاع نظیر یک ضلع، از خود آن ضلع بزرگ‌تر یا مساوی با آن باشد.



یا این‌که در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو، ارتفاع BH نظیر ضلع AC با ضلع AB یکسان است.



سؤال‌های امتحانی

۲۳- ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب 360° است.

۲۴- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با $(n-2)\times180^\circ$.

۲۵- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید هر سه نیمساز داخلی مثلث همرس‌اند.

۲۶- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید سه عمودمنصف مثلث در یک نقطه همرس‌اند.

۲۷- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.

۲۸- عکس قضیه‌های زیر را بنویسید:

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) در دو مثلث متشابه، اضلاع متناظر، متناسب‌اند.

پ) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ داریم $a^2 = b^2 + c^2$.

ت) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.

۲۹- با برهان خُلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC داشته باشیم $AB \neq AC$، آن‌گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳۰- با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد.

۳۱- عکس قضیهٔ (۱) را که قبلاً مطرح شده بود، بیان کرده و آن را ثابت کنید.

۳۲- ثابت کنید از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم نمود.

۳۳- در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، اگر $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A'}$ ثابت کنید $BC \neq B'C'$.

۳۴- در مثلث ABC، پاره‌خط AD نیمساز $\hat{A}$ است. اگر $BD \neq DC$ به کمک برهان خُلف ثابت کنید: $AB \neq AC$.

۳۵- اندازهٔ اضلاع مثلثی اعداد طبیعی بوده و طول دو ضلع آن ۳ و ۸ است. برای طول بزرگ‌ترین ضلع چند جواب وجود دارد؟

۳۶- عکس هر کدام از قضیه‌های زیر را نوشته و در صورت امکان آن‌ها را به صورت قضیهٔ دوشرطی بنویسید.

الف) در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.

ب) اگر دو مثلث متشابه باشند، اضلاع نظیر به نظیر متناسب‌اند.

۳۷- برای رد حدس‌های زیر مثال نقض بزنید:

الف) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد.

ب) ارتفاع‌های هر مثلث داخل مثلث واقع است.

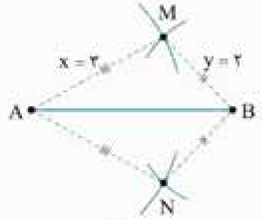
پ) هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی، از هر زاویهٔ داخلی آن بزرگ‌تر است.

۳۸- قضیه‌های زیر را ثابت کنید:

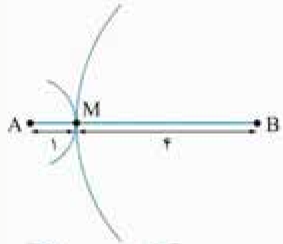
الف) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

ب) در هر مثلث، جمع دو ضلع، از ضلع سوم بزرگ‌تر است. (قضیهٔ نامساوی مثلثی)

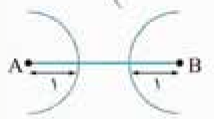
پاسخ سؤال‌های امتحانی



۱- مطابق شکل نقاط A و B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از هم واقع‌اند. برای این‌که **دو نقطه** در صفحه وجود داشته باشد که از A، فاصلهٔ x و همچنین از B، فاصلهٔ y داشته باشد، **باید $x+y$ از فاصلهٔ A و B بزرگ‌تر باشد**، یعنی $x+y>۴$. مثلاً فرض می‌کنیم $x=۳$ و $y=۲$؛ یعنی اگر به مرکز A و شعاع ۳ و به مرکز B و شعاع ۲ کمان‌هایی بزنیم، یکدیگر را در M و N قطع می‌کنند، این دو نقطه جواب مسئله‌اند.

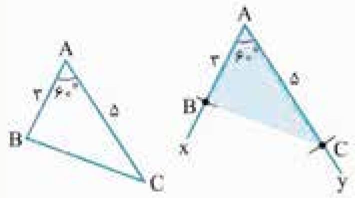


۲- مطابق شکل نقاط A و B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم واقع‌اند. برای این‌که **یک نقطه** در صفحه داشته باشیم که فاصله‌اش از A برابر x و همچنین از B برابر y باشد، باید $x+y$ **با فاصلهٔ A و B مساوی باشد**. مثلاً $x=۱$ و $y=۴$ یعنی اگر به مرکز A و شعاع ۱ و به مرکز B و شعاع ۴ کمان‌هایی بزنیم، بر یکدیگر در نقطهٔ M **مماس** می‌شوند و M جواب مسئله است.

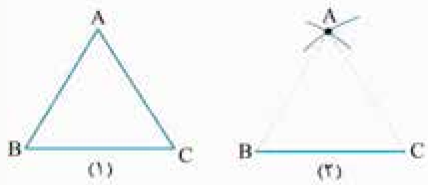


۳- مطابق شکل نقاط A و B به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم واقع‌اند. برای این‌که **نقطه‌ای در صفحه وجود نداشته باشد** که فاصله‌اش از A و B به ترتیب x و y باشد، باید $x+y$ از **فاصلهٔ A و B کم‌تر باشد**؛ یعنی $x+y<۳$، مثلاً $y=۱$ و $x=۱$.

۴- پاسخ در مثال ۵ صفحه ۹



۵- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب آن باشد. بنابراین مطابق شکل، زاویهٔ $x\hat{A}y=۶۰^\circ$ را رسم می‌کنیم و برای مشخص‌شدن دو رأس B و C، به مرکز A و شعاع‌های ۳ و ۵ دو کمان می‌زنیم تا اضلاع Ax و Ay را به ترتیب در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسئله است.



۶- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و جواب آن مثلث ABC (شکل (۱)) باشد. در این صورت ابتدا پاره‌خط $BC=۴\,cm$ را رسم می‌کنیم.

حالا به مراکز B و C و شعاع‌های $۴\,cm$، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند.

مثلث ABC جواب مسئله است (شکل (۲)).

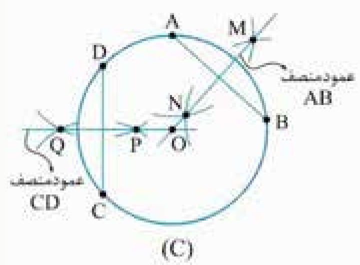
۷- خیر. زیرا جمع دو ضلع کوچک آن، بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ضلع مثلث نیست (حتی اگر مساوی هم باشند، مثلثی رسم نخواهد شد). دقت کنید در این مسئله، حتی برقراری شرط‌های $۴<۸+۲۰$ و $۸<۲۰+۴$ کمکی به رسم مثلث نمی‌کند.

۸- پاسخ در مثال ۷ صفحه ۱۰

۹- پاسخ در مثال ۸ صفحه ۱۰

۱۰- پاسخ در مثال ۹ صفحه ۱۰

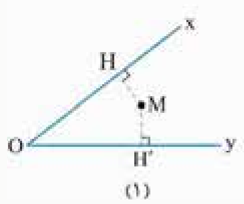
۱۱- پاسخ در مثال ۱۰ صفحه ۱۱



۱۲- می‌دانیم عمودمنصف هر وتر درون یک دایره، از مرکز دایره می‌گذرد. پس مطابق شکل روبه‌رو، دو وتر دلخواه AB و CD را درون دایره رسم می‌کنیم (بهتر است این دو وتر، نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند، البته برای رسم جذاب‌تر)، سپس عمودمنصف وترهای ذکرشده را رسم می‌نماییم تا یکدیگر را در O قطع کنند؛ این نقطه مرکز دایره است.

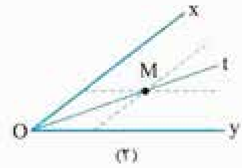
(روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، باید کاملاً در ذهن شما نهادینه شود.)

۱۳- پاسخ در مثال ۱۱ صفحه ۱۲



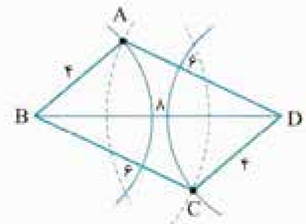
۱۴- مطابق شکل (۱) زاویهٔ xOy را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ M از هر دو ضلع زاویه، برابر یک باشد. در این‌صورت طول عمود اخراج‌شده از M بر هر کدام از اضلاع زاویهٔ xOy برابر یک است. می‌دانیم مجموعهٔ نقاطی از صفحه، که از خط d به فاصلهٔ معلوم ℓ قرار دارند، دو خط به موازات d است که از این خط، فاصلهٔ ℓ دارند.

پس مطابق شکل(۲)، خطی به موازات ضلع Ox و فاصلهٔ یک از آن، درون زاویهٔ xOy و همچنین خطی به موازات Oy و همین فاصله از آن، باز هم درون زاویهٔ xOy رسم می‌کنیم. محل برخورد دو خط جدید، نقطهٔ M خواهد بود. چون فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع مساوی است، پس $\hat{M}$ روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ واقع است. با اتصال نقطهٔ M به رأس O، نیمساز $x\hat{O}y$ رسم می‌شود.

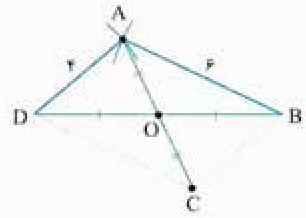


(۲)

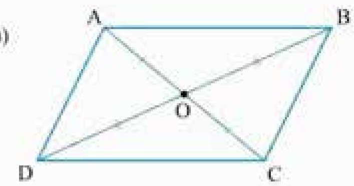
۱۵- روش اول ابتدا قطر $BD = ۸$ را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B، دو کمان به شعاع‌های ۴ و ۶ (اضلاع متوازی‌الاضلاع) و همچنین به مرکز D و همین شعاع‌ها نیز دو کمان دیگر می‌زنیم. محل برخورد یک کمان با شعاع کوچک و یک کمان با شعاع بزرگ، یکی از B و دیگری از D را نقاط A و C می‌نامیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.



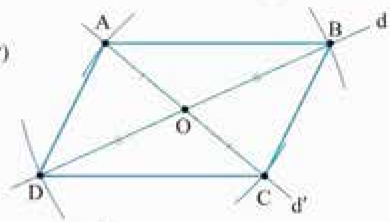
روش دوم ابتدا به روش قبل مثلث ABD را رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس از رأس A به نقطهٔ O وسط قطر BD وصل کرده و به اندازهٔ AO (از طرف O) امتداد می‌دهیم تا به رأس چهارم متوازی‌الاضلاع (نقطهٔ C) برسیم.



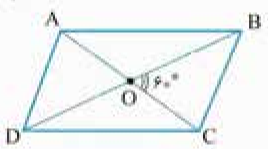
۱۶- مطابق شکل (۱) متوازی‌الاضلاع ABCD با قطرهای $AC = ۳$ و $DB = ۴$ رسم شده است. چون قطرها منصف یکدیگرند، $OA = OC = ۱/۵$ و $OB = OD = ۲$؛ پس برای رسم این متوازی‌الاضلاع، ابتدا دو خط d و d′ را که در نقطهٔ O متقاطع هستند، می‌کشیم. به مرکز O و شعاع ۱/۵، دو کمان می‌زنیم تا خط d′ را در نقاط A و C قطع کنند.



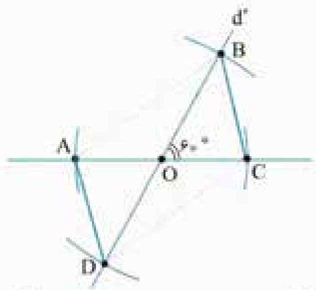
همچنین به مرکز O و شعاع ۲، دو کمان دیگر می‌زنیم تا خط d را در B و D قطع کنند. نقاط A، B، C و D رئوس متوازی‌الاضلاع موردنظر است (شکل (۲)).
بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد.



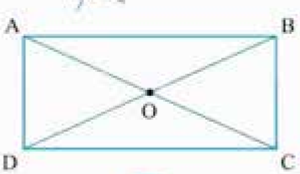
۱۷- فرض می‌کنیم مسئله حل شده و شکل روبه‌رو جواب آن باشد. در این صورت با فرض این‌که طول دو قطر $DB = ۶$ و $AC = ۴$ است و قطرها منصف یکدیگرند، نتیجه می‌گیریم $AO = OC = ۲$ و $OB = OD = ۳$.



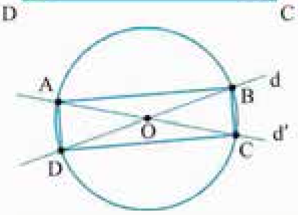
از طرفی زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر ۶۰° است. پس برای رسم این متوازی‌الاضلاع ابتدا دو خط متقاطع d و d′ را با زاویهٔ ۶۰° نسبت به هم رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ O محل تقاطع این دو قطر، یک بار به شعاع ۲ و بار دیگر به شعاع ۳، کمان‌هایی می‌زنیم تا چهار رأس متوازی‌الاضلاع موردنظر مشخص شوند.



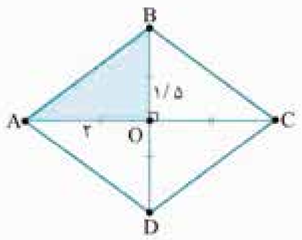
۱۸- مطابق شکل مستطیل ABCD با قطرهای $AC = BD = ۶\,cm$ رسم شده است. چون قطرها مساوی و منصف یکدیگرند، پس $OA = OB = OC = OD = ۳\,cm$ خواهد بود.



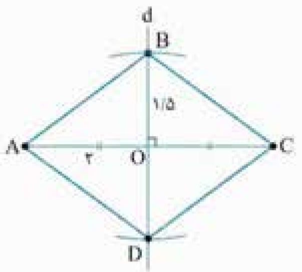
بنابراین برای رسم این مستطیل، دو خط متقاطع d و d′ را در نقطهٔ O رسم کرده و به مرکز O و شعاع ۳ cm دایره‌ای می‌زنیم تا این دو خط را در نقاط A، B، C و D قطع کند. با اتصال این چهار نقطه به هم، مستطیل رسم می‌شود. با این شرایط هم بی‌شمار مستطیل قابل رسم است.



۱۹- مطابق شکل لوزی ABCD با قطرهای ۳ و ۴ رسم شده است.

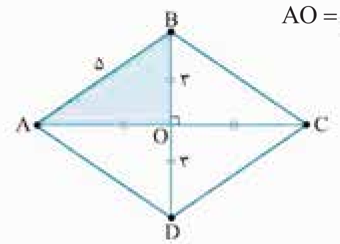


می‌دانیم در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند؛ یعنی هم $AC \perp BD$ و هم نقطهٔ برخورد دو قطر (O) وسط دو قطر است. بنابراین ابتدا یکی از قطرها (مثل $AC = ۴$) را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم (خط d) و به مرکز O وسط قطر AC و به شعاع نصف قطر دیگر یعنی $\frac{۳}{۲} = \frac{BD}{۲}$، دو کمان (یا یک دایره) می‌زنیم تا این عمودمنصف را در B و D قطع کنند.

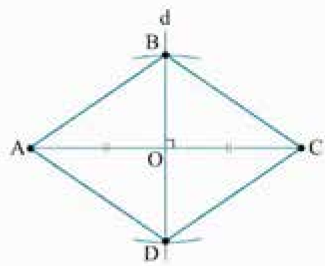


۲۰- مطابق شکل لوزی ABCD با قطر $DB = ۶$ و ضلع $AB = ۵$ رسم شده است. چون در لوزی قطرها منصف یکدیگرند، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

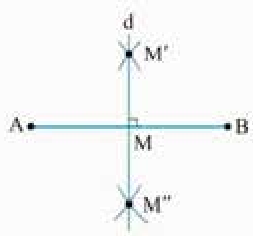
$$AO = \sqrt{AB^۲ - BO^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$



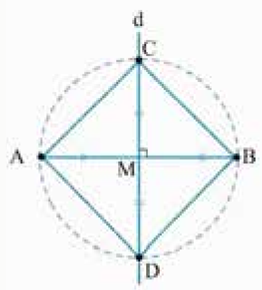
بنابراین ابتدا قطر AC به طول $۲AO = ۸$ را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم و به مرکز O وسط قطر AC و شعاع ۳ کمانی می‌زنیم تا این عمودمنصف را در B و D قطع کند. چهارضلعی ABCD لوزی موردنظر است.



۲۱- مطابق شکل ابتدا پاره‌خط AB را که اندازه‌اش برابر طول قطر مربع است رسم می‌کنیم. $(AB = a)$ سپس به مراکز A و B و شعاع‌های یکسان و هر کدام بیش از $\frac{a}{۲} = \frac{AB}{۲}$، دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در M' و M'' قطع کنند. با اتصال M' و M'' به هم، عمودمنصف AB رسم می‌شود. محل برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB را نقطهٔ M می‌گیریم.



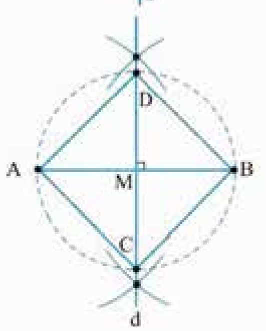
به مرکز M و شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم و خط d یعنی عمودمنصف AB در C و D قطع می‌شود؛ پس $MA = MB = MC = MD$ زیرا فاصلهٔ مرکز تا نقاط روی دایره ثابت است. پس قطرها منصف هم بوده و اندازهٔ آن‌ها با هم مساوی است، بنابراین چهارضلعی ACBD یک مربع خواهد بود.



۲۲- **نکته** طول قطر مربع، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است.

برای رسم مربع، باید قطر آن را داشته باشیم. چون ضلع مربع $۶\sqrt{۲}$ است، پس قطر مربع $۶\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۱۲$ است.

حال ابتدا قطر $AB = ۱۲$ را رسم می‌کنیم، سپس عمودمنصف این قطر را می‌کشیم (خط d)؛ سپس به مرکز نقطهٔ M (محل برخورد d و AB) و به شعاع نصف قطر $(\frac{۱۲}{۲} = ۶)$ دایره‌ای می‌زنیم تا d را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ABCD مربع است.



۲۳- پاسخ در مثال ۱۵ صفحهٔ ۱۴

۲۴- پاسخ در مثال ۱۶ صفحهٔ ۱۴

۲۵- پاسخ در مثال ۱۷ صفحه ۱۵
۲۶- پاسخ در مثال ۱۸ صفحه ۱۵
۲۷- پاسخ در مثال ۱۹ صفحه ۱۵
۲۸- پاسخ در مثال ۲۱ صفحه ۱۷
۲۹- پاسخ در مثال ۲۳ صفحه ۱۷
۳۰- پاسخ در مثال ۲۴ صفحه ۱۸
۳۱- پاسخ در مثال ۲۵ صفحه ۱۸
۳۲-

فرض	نقطهٔ A خارج d قرار دارد
حکم	از A بیش از یک عمود بر d رسم نمی‌شود

مطابق شکل (۱) نقطهٔ A خارج خط d واقع شده است. می‌خواهیم ثابت کنیم که از نقطهٔ A نمی‌توانیم بیشتر از یک خط عمود بر خط d رسم کنیم. طبق **برهان خلف**، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (فرض خلف)؛ یعنی مطابق شکل (۲) از A دو عمود بر خط d خارج شده و این خط را در B و C قطع نموده است. در این صورت $\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ$؛ یعنی مثلثی رسم کرده‌ایم که مجموع دو زاویه از سه زاویه‌اش ۱۸۰° شده است که این غیرممکن است (مخالف با این مورد است که جمع سه زاویهٔ داخلی مثلث ۱۸۰° می‌شود). پس به تناقض رسیده‌ایم؛ یعنی حکم اصلی درست است و از A یک و تنها یک عمود بر d خارج می‌شود.

۳۳- طبق برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یعنی $BC=B'C'$؛ پس در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم:

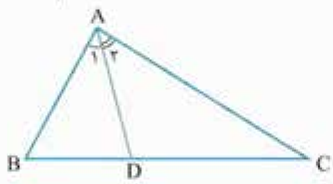
$$\left.\begin{array}{l}AB=A'B'\\AC=A'C'\\BC=B'C'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

و طبق تساوی اجزای نظیر نتیجه می‌شود $\hat{A}=\hat{A}'$ و این خلاف فرض است. پس فرضِ خلفِ $BC=B'C'$ غلط بوده و در نتیجه $BC\neq B'C'$ درست است.

۳۴- طبق برهان خلف فرض می‌کنیم حکم درست نیست (فرض خلف) که در این صورت $AB=AC$ است.
بنابراین می‌توان نوشت:

فرض	$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\ ,\ BD\neq DC$
حکم	$AB\neq AC$

$$\overset{\Delta}{ADB}\ ,\ \overset{\Delta}{ADC}:\left\{\begin{array}{l}AB=AC\\\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\AD=AD\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ADC}$$



و طبق تساوی اجزای نظیر نتیجه می‌گیریم $BD=DC$ که این خلاف فرض بوده و به تناقض می‌رسیم؛ پس $AB\neq AC$.

۳۵- می‌دانیم طول هر ضلع مثلث، بین جمع و تفریق دو ضلع دیگر قرار دارد. اگر طول **بزرگ‌ترین** ضلع مثلث را x در نظر بگیریم، داریم:

$$|۸-۳|<x<۸+۳\Rightarrow ۵<x<۱۱\xrightarrow{x\in\mathbb{N}}x=۶,۷,۸,۹,۱۰$$ ۵مقدار وجود دارد

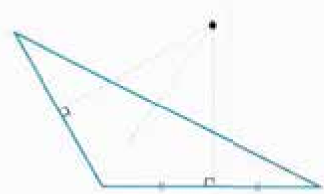
دقت کنید بررسی دو نامساوی دیگر مثلث لازم نیست، چون نامساوی را برای بزرگ‌ترین ضلع نوشته‌ایم.

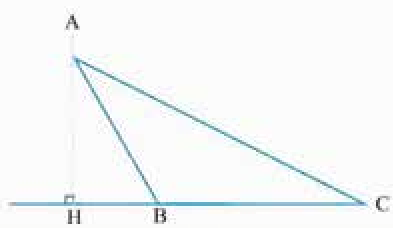
۳۶- پاسخ در مثال ۲۸ صفحه ۱۹

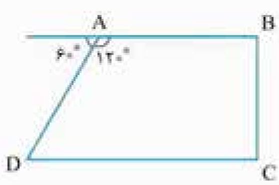
۳۷- الف) مثلثی را به عنوان مثال نقض در نظر می‌گیریم که حداقل یکی از زاویه‌هایش حاده نباشد.

ب) مانند مورد الف، مثلثی را به عنوان مثال نقض در نظر می‌گیریم که حداقل یکی از زاویه‌هایش حاده نباشد.

پ) یک چهارضلعی را به عنوان مثال نقض می‌گیریم که زاویهٔ خارجی آن ۶۰° باشد. حداقل یک زاویهٔ خارجی داریم که از یک زاویهٔ داخلی بزرگ‌تر نیست.







۳۸- به درس‌نامه مراجعه شود.