فصل ۱

قسمت دوم
بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری

تقسیم، ابزاری است برای قرار دادن تعدادی شیء، در دسته‌های مساوی. چه بهتر که در دسته‌بندی ما باقی‌مانده‌ای وجود نداشته باشد.
مثلاً $۵ \times ۲ = ۱۰$ یعنی ۱۰ شیء را می‌توان به ۵ دستهٔ دوتایی تقسیم کرد (۱۰ بر ۲ بخش‌پذیر است). این تقسیم‌بندی را می‌توان به این شکل نگاه کرد که: ۱۰ شیء را می‌توان در ۵ دستهٔ دوتایی شمرد، به بیان دیگر می‌گوییم عدد ۲، عدد ۱۰ را می‌شمارد.

تعریف عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش‌پذیر گوییم، هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که: $a = bq$

بخش‌پذیری a بر b را می‌توان به‌صورت $b \mid a$ نشان داد و به یکی از صورت‌های زیر خواند:

۱) عدد b، عدد a را می‌شمارد (عاد می‌کند).

۲) a بر b بخش‌پذیر است (a مضرب b است یا b مقسوم‌علیه a است).

تذکر در تمام مباحث نظریهٔ اعداد، با اعداد صحیح کار می‌کنیم و همواره منظور از عدد، عدد صحیح است.

تذکر اگر عدد b، عدد a را عاد نکند (a بر b بخش‌پذیر نباشد)، می‌نویسیم $b \nmid a$

تست کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $۷ \mid ۴۲$ ۲) $۶ \mid ۷۲$ ۳) $۱۴ \mid ۷$ ۴) $۷ \mid ۹۱$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

۱) $۴۲ = \underbrace{۶}_{q} \times ۷ \Rightarrow ۷ \mid ۴۲$ ✓

۲) $۷۲ = ۶ \times \underbrace{۱۲}_{q} \Rightarrow ۶ \mid ۷۲$ ✓

۳) ۱۴ مقسوم‌علیه ۷ نیست و این رابطه نادرست است

۴) $۹۱ = ۷ \times \underbrace{۱۳}_{q} \Rightarrow ۷ \mid ۹۱$ ✓

پس جواب گزینهٔ (۳) است.

تست به ازای چند عدد طبیعی n، داریم $۶ \mid n - ۲$؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: برای آن‌که $۶ \mid n - ۲$، باید $n - ۲$ مقسوم‌علیه ۶ باشد. یعنی:

$n-۲$	-۱	۱	-۲	۲	-۳	۳	-۶	۶
n	۱	۳	۰	۴	-۱	۵	-۴	۸

+۲

در نتیجه برای n، ۵ مقدار طبیعی $\{۱، ۳، ۴، ۵، ۸\}$ وجود دارد و جواب گزینهٔ (۲) است.

تست اگر $ac = bd$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $a \mid c$ ۲) $a \mid b$ ۳) $ac \mid b$ ۴) $a \mid bd$

پاسخ: در تساوی $ac = bd$ اگر فرض کنیم $c = q$، در این‌صورت داریم:

$$bd = a \times q \Rightarrow a \mid bd$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است. اما برای رد سایر گزینه‌ها تساوی $\underset{a}{۲} \times \underset{c}{۳} = \underset{b}{۱} \times \underset{d}{۶}$ را در نظر بگیرید:

$۲ \nmid ۳ \Rightarrow a \nmid c$: رد گزینهٔ (۱) ، $۲ \nmid ۱ \Rightarrow a \nmid b$: رد گزینهٔ (۲) ، $۶ \nmid ۱ \Rightarrow ac \nmid b$: رد گزینهٔ (۳)

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی (۱): عدد صفر، هیچ عددی را نمی‌شمارد، جز خودش. به عبارت دیگر: $0 \mid a \Rightarrow a = 0$

توجه هر عددی صفر را عاد می‌کند: $(\forall a \in \mathbb{Z}) : a \mid 0$

ویژگی (۲): هر عددی خودش را می‌شمارد. یعنی: $\forall a \in \mathbb{Z} : a \mid a$

ویژگی (۳): اعداد ۱ و ۱− هر عددی را می‌شمارند. یعنی: $\forall a \in \mathbb{Z} : \pm 1 \mid a$

ویژگی (۴): اگر عددی ۱ یا ۱− را بشمارد، آن‌گاه آن عدد برابر با ۱± است، یعنی: $a \mid -1 \Rightarrow a = \pm 1$ یا $a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

ویژگی (۵): $0 \mid 0$

تست منحنی به معادلهٔ $y = \frac{-1}{5-2x}$ از چند نقطه با مختصات صحیح (طول و عرض صحیح) می‌گذرد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ : برای این‌که $y \in \mathbb{Z}$ باشد، باید $\frac{-1}{5-2x} \in \mathbb{Z}$ باشد و به عبارت دیگر $5 - 2x \mid -1$ (برای آن‌که حاصل یک کسر عددی صحیح شود، باید صورت آن بر مخرجش بخش‌پذیر باشد.) پس داریم:

$$5 - 2x \mid -1 \Rightarrow \begin{cases} 5 - 2x = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \\ 5 - 2x = -1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \end{cases}$$

پس این منحنی از دو نقطهٔ (۱−،۲) و (۱،۳) عبور می‌کند. پس جواب گزینهٔ (۲) است.

ویژگی (۵): هر یک از طرفین رابطهٔ عاد کردن را می‌توان در یک منفی ضرب کرد. یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$$

ویژگی (۶): سمت راست رابطهٔ عاد کردن را در هر عددی می‌توان ضرب کرد (یا به توان هر عدد طبیعی رساند). یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid b^m & (m \in \mathbb{N}) \\ a \mid mb & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

تذکر عکس رابطهٔ فوق لزوماً برقرار نیست. برای مثال: $4 \mid 2^3 \xrightarrow{\text{اما}} 4 \nmid 2$ ، $2 \mid 4 \times 3 \xrightarrow{\text{اما}} 2 \nmid 3$

اثبات ۶:

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{به توان } m} b^m = a^m q^m = a\underbrace{(a^{m-1}q^m)}_{q'} \Rightarrow b^m = aq' \Rightarrow a \mid b^m \\ \xrightarrow{\text{ضرب در } m} mb = maq = a\underbrace{(mq)}_{q'} \Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a \mid mb \end{cases}$$

ویژگی (۷): طرفین رابطهٔ عاد کردن را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد یا به هر توانی رساند و بالعکس، یعنی:

$$a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad a \mid b \Leftrightarrow ma \mid mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

اثبات ۷:

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} b^n = a^n \underbrace{q^n}_{q'} \Rightarrow a^n \mid b^n \\ mb = maq \Rightarrow ma \mid mb \end{cases}$$

نتیجه ۱: $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ n \le m \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^n \mid b^m$

مثال: $2 \mid 6 \xrightarrow{3>2} 2^2 \mid 6^3$

اثبات نتیجهٔ ۱:

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{طرفین به توان } m} b^m = a^m q^m = a^n . \underbrace{a^{m-n} . q^m}_{q'} \Rightarrow a^n \mid b^m$$

نتیجه ۲: $\left.\begin{matrix} a^n \mid b^m \\ n \ge m \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid b$

مثال : $\underbrace{576}_{24^2} = \underbrace{64}_{4^3} \times 9 \Rightarrow 4^3 \mid 24^2 \xrightarrow{3>2} 4 \mid 24$

اثبات نتیجهٔ ۲:

$$a^n \mid b^m \xrightarrow{s=n-m} a^{m+s} \mid b^m \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } b^s} a^{m+s} \mid b^{m+s} \Rightarrow a \mid b$$

نتیجهٔ ۳: $\left.\begin{array}{l} a^n \mid b^m \\ \frac{m}{n} \le \frac{q}{p} \text{ یا } mp \le nq \end{array}\right\} \Rightarrow a^p \mid b^q$

مثال: $\underbrace{۱۲^۵}_{۲^{۱۰}\times ۳^۵} \mid \underbrace{۱۸^{۱۰}}_{۲^{۱۰}\times ۳^{۲۰}} \Rightarrow \underbrace{۱۲^۳}_{۲^۶\times ۳^۳} \mid \underbrace{۱۸^۷}_{۲^۷\times ۳^{۱۴}}$ (چراکه $\frac{۱۰}{۵} < \frac{۷}{۳}$)

اثبات نتیجهٔ ۳:

$$mp \le nq \Rightarrow ۰ \le \overbrace{nq - mp}^{t} \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}} nq - mp = t \Rightarrow mp = nq - t \ (t \ge ۰ \text{ که})$$

طبق فرض: $a^n \mid b^m \xrightarrow{\text{به توان } p} a^{np} \mid b^{mp} \xrightarrow{mp=nq-t} a^{np} \mid b^{nq-t} \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } b^t} a^{np} \mid b^{nq} \Rightarrow a^p \mid b^q$

نتیجهٔ ۴: $\forall m,n \ ; \ m \ge n \Rightarrow a^n \mid a^m$

اثبات نتیجهٔ ۴:

$$m \ge n \Rightarrow a^m = a^n \times \underbrace{a^{m-n}}_{q} \Rightarrow a^n \mid a^m$$

تست

از رابطهٔ $a^۵ \mid b^۷$ کدام رابطه را همواره می‌توان نتیجه گرفت؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a^۳ \mid b^۲$ ۳) $a^۲ \mid b$ ۴) $a^۲ \mid b^۳$

پاسخ: روش اول: طبق نتیجهٔ ۳ در رابطهٔ بالا زمانی می‌توان از رابطهٔ $a^n \mid b^m$، رابطهٔ $a^p \mid b^q$ را نتیجه گرفت که $mp \le nq$ باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} a^۵ \mid b^۷ \\ ۵\times ۳ \ge ۷ \times ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲ \mid b^۳$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

روش دوم:

$$a^۵ \mid b^۷ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} a^{۱۰} \mid b^{۱۴} \xrightarrow{\text{سمت راست را در } b \text{ ضرب می‌کنیم}} a^{۱۰} \mid b^{۱۵}$$

پس می‌توانیم بگوییم $(a^۲)^۵ \mid (b^۳)^۵$ و با توجه به ویژگی ۷ داریم: $a^۲ \mid b^۳$

تست

کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نادرست است؟

۱) $a^۳ \mid b^۳ \Rightarrow a \mid ۳b$ ۲) $a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a \mid ۲b$ ۳) $a \mid b \Rightarrow ۲a \mid ۴b$ ۴) $a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow ۲a \mid b$

پاسخ: طبق ویژگی‌های عاد کردن درستی هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۲): $a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a \mid b \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{\text{سمت راست}} a \mid ۲b$ ✓ ، گزینهٔ (۱): $a^۳ \mid b^۳ \Rightarrow a \mid b \xrightarrow[\text{ضرب در ۳}]{\text{سمت راست}} a \mid ۳b$ ✓

گزینهٔ (۳): $a \mid b \Rightarrow ۲a \mid ۲b \xrightarrow[\text{ضرب در ۲}]{\text{سمت راست}} ۲a \mid ۴b$ ✓

گزینهٔ (۴) نادرست است؛ برای رد آن مثال نقض ارائه می‌کنیم: $a=۳, b=۹ \Rightarrow \underbrace{۳^۲}_{۹} \mid \underbrace{۹^۲}_{۸۱} \xrightarrow{\text{اما}} \underbrace{۲\times ۳}_{۶} \nmid ۹$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

ویژگی (۸): سمت چپ رابطهٔ عاد کردن را می‌توان با مقسوم‌علیه آن جایگزین کرد. به عبارت دیگر:

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

تذکر عکس رابطه، لزوماً برقرار نیست. برای مثال: $\begin{cases} ۲ \mid ۴ \\ ۴ \mid ۴ \end{cases} \Rightarrow ۸ \nmid ۴$

ویژگی (۹): طرفین رابطهٔ عاد کردن را می‌توان در هم ضرب کرد. یعنی:

$$\begin{array}{l} a \mid b \\ c \mid d \end{array} \Rightarrow ac \mid bd$$

تذکر این ویژگی در رابطه با جمع، تفریق و تقسیم لزوماً صدق نمی‌کند.

ویژگی (۱۰) (بسیار مهم): هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل و حاصل‌ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid b+c \ , \ a \mid b-c \ , \ a \mid b\times c$$

و به طور کلی هر ترکیب خطی آن دو عدد را می‌شمارد.

$$a \mid mb \pm nc \qquad (m,n \in \mathbb{Z})$$

نتیجه: اگر $a \mid b$ آن‌گاه $a \mid b + na$

تست **از درستی رابطهٔ $xy \mid z$ کدام نتیجه را نمی‌توان گرفت؟**

۱) $x \mid z - x^4$ ۲) $y \mid z$ ۳) $x^3 \mid z^4$ ۴) $y^2 \mid z$

پاسخ: به جای سمت چپ رابطه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم:

$$xy \mid z \Rightarrow \begin{cases} y \mid z & \text{(درستی گزینهٔ ۲)} \\ x \mid z \xrightarrow{4>3} x^3 \mid z^4 & \text{(درستی گزینهٔ ۳)} \end{cases}$$

از طرفی هم به کمک رابطهٔ $x \mid z$ و این‌که هر عددی خودش را می‌شمارد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x \mid z \\ x \mid x \xrightarrow{\text{سمت راست به توان ۴}} x \mid x^4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} x \mid z - x^4 \quad \text{(درستی گزینهٔ ۱)}$$

برای رد گزینهٔ (۴)، مثال نقض زیر را ارائه می‌کنیم:

$$\underbrace{9}_{x} \times \underbrace{2}_{y} \mid \underbrace{18}_{z} \xrightarrow{\text{اما}} \underbrace{4}_{y^2} \nmid 18 \quad \text{(رد گزینهٔ ۴)}$$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

تست **به ازای چند عدد صحیح a، عدد a دو عدد $5m + 4$ و $4m + 3$ را عاد می‌کند؟** (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: a دو عدد $5m + 4$ و $4m + 3$ را می‌شمارد، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid 4m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} a \mid 20m+15 \\ a \mid 5m+4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۴}} a \mid 20m+16 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} a \mid -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس دو مقدار صحیح برای a وجود دارد و جواب گزینهٔ (۳) است.

توجه در تمام مسائل به این سبک، هدف حذف متغیر از سمت راست رابطهٔ عاد کردن است، به طوری‌که در سمت راست فقط عدد باقی بماند.

تست **چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد، به طوری‌که حاصل کسر $\frac{5n+17}{n-5}$ یک عدد طبیعی باشد؟**

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

پاسخ: برای آن‌که $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی باشد، باید:

اولاً: مثبت باشد، یعنی:

$$\frac{5n+17}{n-5} > 0 \xrightarrow{5n+17>0} n-5 > 0$$

ثانیاً: مخرج، صورت کسر را بشمارد، یعنی $n-5 \mid 5n+17$. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} n-5 \mid 5n+17 \\ n-5 \mid n-5 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} n-5 \mid 5n-25 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}} n-5 \mid 42$$

پس از آن‌جایی‌که $n-5>0$ است، باید $n-5$ مقسوم‌علیه مثبت ۴۲ باشد، پس داریم:

$n-5$	۱	۲	۳	۶	۷	۱۴	۲۱	۴۲
n	۶	۷	۸	۱۱	۱۲	۱۹	۲۶	۴۷

+۵

پس برای ۸ مقدار طبیعی $\{6, 7, 8, 11, 12, 19, 26, 47\}$، حاصل $\frac{5n+17}{n-5}$ عددی طبیعی است؛ پس جواب گزینهٔ (۳) است.

نکتهٔ مهم در حل مسائل به‌صورت $x-a \mid f(x)$، کافی است رابطهٔ $x-a \mid f(a)$ را حل کنیم. (چرا که باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با $f(a)$)

تست **به ازای چند عدد صحیح n، حاصل $\frac{2n^2+3n+7}{n-1}$ یک عدد صحیح است؟**

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: برای آن‌که حاصل $\frac{2n^2+3n+7}{n-1}$ عددی صحیح باشد، باید مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $n-1 \mid \underbrace{2n^2+3n+7}_{f(n)}$. ریشهٔ عبارت سمت چپ را محاسبه کرده و در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$n-1=0 \Rightarrow n=1 \Rightarrow f(1) = 2(1)^2 + 3(1) + 7 = 12$$
$$\Rightarrow n-1 \mid 12 \Rightarrow n-1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

در نتیجه به ازای هر یک از این ۱۲ مقدار، عددی صحیح برای n به‌دست می‌آید. پس جواب گزینهٔ (۳) است.

تذکر اگر ریشهٔ عبارت سمت چپ (مقسوم‌علیه) عددی صحیح نشد، باز هم ریشه را در عبارت قرار می‌دهیم و عدد به‌دست آمده را تا حد امکان ساده می‌کنیم. حال عبارت سمت چپ باید صورت این کسر را بشمارد.

تست **تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۳xy - y - ۵x = ۱۳$ در اعداد طبیعی را بیابید.**

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ: در این‌جا ابتدا y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$۳xy - y - ۵x = ۱۳ \Rightarrow y(۳x-۱) = ۵x+۱۳ \Rightarrow y = \frac{۵x+۱۳}{۳x-۱}$$

حال برای آن‌که y و x اعدادی طبیعی باشند، باید:

اولاً: y و x هر دو مثبت باشند:

$$\frac{۵x+۱۳}{۳x-۱} > ۰ \xrightarrow{۵x+۱۳>۰} ۳x-۱>۰$$

ثانیاً: مخرج کسر، صورت آن را بشمارد، یعنی $۳x-۱ \mid \underbrace{۵x+۱۳}_{f(x)}$. حالا ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$۳x-۱=۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow f(\frac{۱}{۳}) = ۵(\frac{۱}{۳}) + ۱۳ = \frac{۴۴}{۳} \Rightarrow ۳x-۱ \mid ۴۴$$

مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۴ برابر است با:

$$۳x-۱ = \begin{cases} ۱ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \notin \mathbb{N} & \times \\ ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۹ & \checkmark \\ ۴ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \notin \mathbb{N} & \times \\ ۱۱ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow y = ۳ & \checkmark \\ ۲۲ \Rightarrow x = \frac{۲۳}{۳} \notin \mathbb{N} & \times \\ ۴۴ \Rightarrow x = ۱۵ \Rightarrow y = ۲ & \checkmark \end{cases}$$

پس $(۱،۹)$، $(۴،۳)$ و $(۱۵،۲)$ جواب‌های طبیعی هستند که برای $(x،y)$ به‌دست می‌آید. پس جواب گزینهٔ (۴) است.

ویژگی (۱۱): اگر عدد a، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a، c را می‌شمارد. یعنی:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid c \quad \text{(خاصیت تعدی)}$$

اثبات (۱۱):

$$\begin{matrix} a \mid b \Rightarrow b = aq \\ b \mid c \Rightarrow c = bq' \end{matrix} \xrightarrow{\text{را در عبارت پایینی جایگذاری می‌کنیم } b=aq} c = (aq)q' = a\underbrace{qq'}_{q''} \Rightarrow a \mid c$$

تست **اگر $a \mid ۱۱$ و $a \mid ۷۸۰$، در این‌صورت برای a، چند مقدار طبیعی وجود دارد؟**

۱) ۱۲   ۲) صفر   ۳) ۲۴   ۴) ۸

پاسخ: با توجه به رابطهٔ تعدی داریم:

$$\begin{cases} ۱۱ \mid a \\ a \mid ۷۸۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} ۱۱ \mid ۷۸۰$$

اما این رابطه هرگز برقرار نیست، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد که هر دو رابطه برقرار باشد. پس جواب گزینهٔ (۲) است.

تست **از درستی رابطهٔ $x^۲ - y^۲ \mid a - b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟**

۱) $x+y \mid a^۳ - b^۳$ ۲) $x+y \mid a^۳ + b^۳$ ۳) $x-y \mid a^۲ - b^۲$ ۴) $x-y \mid a-b$

پاسخ: طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$x^۲ - y^۲ = (x-y)(x+y) \Rightarrow \begin{cases} x-y \mid x^۲-y^۲ & \text{(رابطهٔ ۱)} \\ x+y \mid x^۲-y^۲ & \text{(رابطهٔ ۲)} \end{cases}$$

حالا از رابطهٔ $x^۲ - y^۲ \mid a-b$ (فرض مسئله) و خاصیت تعدی در رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$\left.\begin{matrix} \text{رابطهٔ ۱}: x-y \mid x^۲-y^۲ \\ \text{فرض مسئله}: x^۲-y^۲ \mid a-b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x-y \mid a-b \quad \text{(گزینهٔ ۴)}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{رابطهٔ ۲}: x+y \mid x^۲-y^۲ \\ \text{فرض مسئله}: x^۲-y^۲ \mid a-b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x+y \mid a-b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } (a^۲+ab+b^۲)} x+y \mid a^۳-b^۳ \quad \text{(گزینهٔ ۱)}$$

حالا به کمک رابطهٔ گزینهٔ (۴) داریم:

$$x-y \mid a-b \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در } (a+b)} x-y \mid a^۲-b^۲ \quad \text{(گزینهٔ ۳)}$$

اما برای رد گزینهٔ (۲) داریم:

$$۵ = \underbrace{۳^۲}_{x^۲} - \underbrace{۲^۲}_{y^۲} \mid \underbrace{۶}_{a} - \underbrace{۱}_{b} = ۵ \xrightarrow{\text{امّا}} ۵ = \underbrace{۳}_{x} + \underbrace{۲}_{y} \nmid \underbrace{۶^۳}_{a^۳} + \underbrace{۱^۳}_{b^۳} = ۲۱۷$$

پس جواب گزینهٔ (۲) است.

ویژگی (۱۲): اگر $a\,|\,b$ و $b\neq ۰$ باشد، در این‌صورت $|a|\leq|b|$ (توجه داریم که $b\neq ۰$ است چرا که اگر $b=۰$ باشد، همواره $a\,|\,b$)

نتیجه اگر $a\,|\,b$ و $b\,|\,a$ آن‌گاه $|a|=|b|$

تذکر در بخش‌پذیری لزوماً ویژگی تقارنی وجود ندارد. برای مثال $۲\,|\,۴$ ولی $۴\nmid ۲$

تست

به ازای چند عدد طبیعی n، رابطهٔ $n^۲+۱\,|\,۴n-۲$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: طبق ویژگی شمارهٔ (۱۲) داریم:

$$n^۲+۱\,|\,۴n-۲\Rightarrow n^۲+۱\leq ۴n-۲\Rightarrow \underbrace{n^۲-۴n+۳}_{(n-۱)(n-۳)}\leq ۰\Rightarrow ۱\leq n\leq ۳$$

چون عبارت‌ها برای nهای طبیعی، مثبت‌اند از قدرمطلق استفاده نمی‌کنیم.

با جایگذاری ۱، ۲ و ۳ در رابطهٔ اصلی مقادیر $n=۱$ و $n=۳$ قابل قبول می‌باشند و جواب گزینهٔ (۳) است.

اعداد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم: $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,\cdots\}$

تذکر عددی که اول نباشد را مرکب می‌گوییم.

تذکر عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

نکته اگر p عددی اول باشد و $a\,|\,p$ آن‌گاه $|a|=۱$ یا $|a|=p$

تست

اگر عدد طبیعی a دو عدد $۵k+۴$ و $۷k+۳$ را عاد کند، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۳

پاسخ: عدد طبیعی a هر دو عدد $۵k+۴$ و $۷k+۳$ را می‌شمارد. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,۷k+۳\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}}a\,|\,۳۵k+۱۵\\ a\,|\,۵k+۴\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۷}}a\,|\,۳۵k+۲۸\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}}a\,|\,۱۳$$

چون ۱۳ عددی اول است و a عددی طبیعی پس $a=۱$ یا $a=۱۳$ و در نتیجه جواب گزینهٔ (۴) است.

نکته اگر تجزیهٔ عدد طبیعی n به عوامل اول به‌صورت $n=P_۱^{\alpha_۱}P_۲^{\alpha_۲}\cdots P_k^{\alpha_k}$ باشد، آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با: $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$

نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح n برابر است با: $۲(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$

تست

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۷۰۰ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۷ ۳) ۵۴ ۴) ۶۳

پاسخ: تجزیهٔ ۲۷۰۰ برابر $۲^۲\times۳^۳\times۵^۲$ می‌باشد، پس: تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۲۷۰۰ $=(۲+۱)(۳+۱)(۲+۱)=۳۶$

و جواب گزینهٔ (۱) است.

بخش‌پذیری و اتحادها

در بخش‌پذیری عبارت جبری، اتحادها نقش زیادی دارند. دو تا از آن‌ها را که کاربردهای بیش‌تری دارند، یادآوری می‌کنیم:

آ) اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲\Rightarrow\begin{cases}a-b\,|\,a^۲-b^۲\\ a+b\,|\,a^۲-b^۲\end{cases}$$

ب) اتحاد چاق و لاغر

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳\Rightarrow a-b\,|\,a^۳-b^۳$$

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳\Rightarrow a+b\,|\,a^۳+b^۳$$

تست

کدام نتیجه‌گیری لزوماً برقرار نیست؟

۱) $c\,|\,a-b\Rightarrow c^۲\,|\,(a^۲-b^۲)^۲$ ۲) $c\,|\,a+b\Rightarrow c\,|\,a^۳+b^۳$

۳) $c\,|\,a+b\Rightarrow c\,|\,a^۲-b^۲$ ۴) $c\,|\,a+b\Rightarrow c\,|\,a^۳-b^۳$

پاسخ: درستی هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $\left.\begin{array}{l}c\,|\,a-b\\ a-b\,|\,a^۲-b^۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تعدی}}c\,|\,a^۲-b^۲\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}c^۲\,|\,(a^۲-b^۲)^۲$ ✓

گزینهٔ (۲): $\left.\begin{matrix} c|a+b \\ a+b|a^۳+b^۳ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c|a^۳+b^۳ \checkmark$

گزینهٔ (۳): $\left.\begin{matrix} c|a+b \\ a+b|a^۲-b^۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} c|a^۲-b^۲$

برای رد گزینهٔ (۴) فرض کنیم $c=۴$ ، $b=۳$ و $a=۵$ باشد:

$۴|\underbrace{۵+۳}_{۸} \xrightarrow{\text{اما}} ۴\nmid \underbrace{۵^۳-۳^۳}_{۹۸}$

پس جواب گزینهٔ (۴) است.

در کتاب حسابان تعمیم‌های اتحاد چاق و لاغر آمده است:

آ) برای هر عدد طبیعی n داریم: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱})$

پس می‌توان گفت: $\forall n\in\mathbb{N}, a-b|a^n-b^n$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی طبیعی باشد، آن‌گاه: $a^m-b^m|a^n-b^n$

تست عدد $۳^{۲۱}-۲^{۱۴}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۲۳　۲) ۱۷　۳) ۲۱　۴) ۲۵

پاسخ: ابتدا توان‌های اعداد داده‌شده را یکسان می‌کنیم.

$$۳^{۲۱}-۲^{۱۴}=(۳^۳)^۷-(۲^۲)^۷=۲۷^۷-۴^۷ \Rightarrow \underbrace{۲۷-۴}_{۲۳}|۲۷^۷-۴^۷$$

پس $۲۳|۳^{۲۱}-۲^{۱۴}$ و جواب گزینهٔ (۱) است.

ب) اگر n عددی زوج باشد آن‌گاه: $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\cdots-b^{n-۱})$

پس می‌توان گفت: $n=۲k$ ، $a+b|a^n-b^n$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی زوج باشد آن‌گاه: $a^m+b^m|a^n-b^n$

تست عدد $۳^{۳۶}-۲^{۳۶}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) ۴۲　۲) ۳۵　۳) ۶۵　۴) ۱۹

پاسخ: با توجه به نتایج تعمیم اتحادهای چاق و لاغر داریم:

$$\frac{۳۶}{۳}=۱۲ \xrightarrow{\text{۱۲ زوج است.}} \begin{cases} ۳^۳-۲^۳|(۳^۳)^{۱۲}-(۲^۳)^{۱۲} \Rightarrow ۱۹|۳^{۳۶}-۲^{۳۶} \\ ۳^۳+۲^۳|(۳^۳)^{۱۲}-(۲^۳)^{۱۲} \Rightarrow ۳۵|۳^{۳۶}-۲^{۳۶} \end{cases}$$

$$\frac{۳۶}{۴}=۹ \xrightarrow{\text{۹ فرد است.}} ۳^۴-۲^۴|(۳^۴)^۹-(۲^۴)^۹ \Rightarrow ۶۵|۳^{۳۶}-۲^{۳۶}$$

پس جواب گزینهٔ (۱) است.

پ) اگر n عددی فرد باشد آن‌گاه: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱})$

پس می‌توان گفت: $n=۲k+۱; a+b|a^n+b^n$

نتیجه اگر $\frac{n}{m}$ عددی فرد باشد، آن‌گاه: $a^m+b^m|a^n+b^n$

تست به ازای چند عدد n کوچک‌تر از ۵۰، رابطهٔ $۱۲۶|۵^n+۱$ برقرار است؟

۱) ۴　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸

پاسخ: با توجه به این‌که $۱۲۶=۵^۳+۱$ است برای آن‌که رابطهٔ $۵^۳+۱|۵^n+۱$ درست باشد، باید $\frac{n}{۳}$ عددی فرد باشد. پس می‌توان نوشت:

$$۵^۳+۱|۵^n+۱ \Rightarrow \frac{n}{۳}=\underbrace{۲k+۱}_{\text{فرد}} \Rightarrow n=۶k+۳ \Rightarrow ۱\le ۶k+۳\le ۵۰ \Rightarrow ۰\le k\le ۷$$

به ازای هر مقدار صحیح k، یک مقدار برای n به‌دست می‌آید یعنی ۸ مقدار صحیح کوچک‌تر از ۵۰ داریم که $۱۲۶|۵^n+۱$. پس جواب گزینهٔ (۴) است.

۲۴. در اثبات نامساوی $x^2+y^2+z^2 \ge xy-xz+yz$ به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^2+(x+z)^2+(z-y)^2 \ge 0$
۲) $(x+y-z)^2 \ge 0$
۳) $(x+y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$
۴) $(x-y)^2+(x-z)^2+(y+z)^2 \ge 0$

قسمت دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

☆۲۵. به ازای چند عدد طبیعی n داریم $4 \mid 2^{2n+2}$؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

★۲۶. اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که $a^5+a^4-a^3-a^2$ را می‌شمارد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

☆۲۷. اگر $x \mid y^2$ و $z^2 \mid y^3$، کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

۱) $x^2 \mid yz^2$ ۲) $x \mid z^2$ ۳) $x^3 \mid z^4$ ۴) $x^4 \mid y^2z^3$

☆۲۸. اگر $5 \mid a+3b$، در این‌صورت عبارت a^2+9b^2+31ab بر کدام گزینه بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

☆۲۹. به ازای چند عدد طبیعی n داریم $2n^3-3n^2-2n \mid 0$؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۰. به ازای کدام مقادیر n، رابطهٔ $2n^3-n-1 \mid 0$ برقرار است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{0,1\}$ ۳) $\{1, \pm\frac{1}{2}\}$ ۴) $\mathbb{Z}$

☆۳۱. به ازای چند عدد صحیح n داریم $2n^2+n-2 \mid 1$؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۳۲. اگر $a-b \mid a$، آن‌گاه داریم:

۱) $a \mid a-b$ ۲) $b \mid a-b$ ۳) $a \mid b$ ۴) $a-b \mid b$

★۳۳. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی a رابطهٔ $17 \mid 4a-3$ برقرار است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

☆۳۴. تعداد اعداد صحیح و مثبت که هر دو عدد $3a^2+8a-2$ و $3a+2$ را بشمارد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۳۵. کدام گزینه درست است؟

۱) $a+b \mid (a+b)^2-2ab$
۲) $a+b \mid (a+b)^3-3a^2b-3ab^2$
۳) $a+b \mid (a-b)^3+3a^2b-3ab^2$
۴) $a+b \mid (a-b)^2+2ab$

۳۶. اگر a و b اعداد صحیح فرد باشند، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $8 \mid a^2+b^4$ ۲) $6 \mid a^2+b^2+4$ ۳) $4 \mid a^4-b^2$ ۴) $8 \mid a^2b^2$

☆۳۷. اگر $a^3 \mid b^2$ حداکثر مقدار طبیعی n که $a^{7n-3} \mid b^{4n+3}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

☆۳۸. کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

۱) $a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid b^2$
۲) $ab^2 \mid c \Rightarrow a \mid c$ ، $b \mid c$
۳) $a^2 \mid b \Rightarrow a^3 \mid b^5$
۴) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ ، $a \mid c$

.۳۹☆ برای چند عدد طبیعی n رابطهٔ $2n+1 \mid 2n^2 - 3n + 3$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

.۴۰☆ چند نقطه با مختصات صحیح و طول طبیعی در معادلهٔ $3x^2 - 2xy + 3y - 8x + 3 = 0$ صدق می‌کنند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

.۴۱ اگر رابطهٔ $n^2 \mid \binom{n}{2}$ برقرار باشد، بیش‌ترین مقدار $2n^2 - \binom{n}{2}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

اعداد اول

.۴۲☆ اگر $a > 1$ و $a \mid 5k+1$ و $a \mid 4k+3$، در این‌صورت a بر چند عدد اول بخش‌پذیر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

.۴۳ اگر p یک عدد اول و $p \mid 30! + p$ برای p چند مقدار متمایز وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

.۴۴☆ عدد $A = 18^x \times 12^{x+1}$ دارای ۷۲ مقسوم‌علیه مثبت است. x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

.۴۵★ تفاضل تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد طبیعی $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ و $\frac{N}{36}$ مساوی ۱۴ است. کم‌ترین مقدار N کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۸۸ ۴) ۴۳۲

اتحادها و عاد کردن

.۴۶☆ اگر $b \mid a-c$ و $b \mid b+c$ و $a^3 - c^3$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $c \mid b$ ۲) $c \mid a$ ۳) $b \mid c$ ۴) $a \mid c$

.۴۷ اگر روابط $a^2 - b^2 \mid (x-2)^2$ و $a^3 + b^3 \mid (x-3)(x-1)$ برقرار باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ± 4 ۲) ± 3 ۳) ± 2 ۴) ± 1

.۴۸☆ تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

.۴۹☆ عدد $3^{21} - 2^{35}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

.۵۰☆ عدد $3^{92} + 5^{69}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۹۸ ۲) ۲۰۶ ۳) ۸ ۴) ۴۴

.۵۱ $7^{200} - 1$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸

قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) ـ کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م)

ب‌م‌م

.۵۲☆ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ۹۰۰، ۱۶۸۰ و ۱۲۶۰ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

.۵۳☆ ب‌م‌م دو عبارت $9n+2$ و $11n-5$ کدام است؟ (مشابه سراسری خارج از کشور ۹۲)

۱) ۱ یا ۶۷ ۲) ۶۷ یا ۳ ۳) ۴۵ یا ۱ ۴) ۴۵ یا ۳

.۵۴☆ به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $7n+5$ و $11n+2$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ (سراسری خارج از کشور ۹۱)

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۵۵. برای عدد صحیح a، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $a-2$ و $4a^2-5a-4$ کدام است؟

۱) ۱ یا ۲ ‏ ۲) ۱ یا ۳ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ۲

☆۵۶. اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $n^2+9n+21$ و $n+7$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۱ و ۳ ‏ ۳) ۱ و ۵ ‏ ۴) ۷

اعداد متباین

☆۵۷. اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۸)

۱) ۵۹ ‏ ۲) ۶۷ ‏ ۳) ۸۳ ‏ ۴) ۸۹

☆۵۸. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n، اعداد $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اولند؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۸۶ ‏ ۲) ۸۷ ‏ ۳) ۸۹ ‏ ۴) ۹۰

☆۵۹. در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d=(3n^2-2n+6, 3n+5)$ و $d\neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۹)

۱) ۴۱ ‏ ۲) ۴۳ ‏ ۳) ۴۷ ‏ ۴) ۵۳

۶۰. به ازای اعداد طبیعی $1\leq n\leq 50$ در چند حالت دو عدد $4n+7$ و $5n+9$ نسبت به هم اولند؟ (سراسری خارج از کشور ۸۷)

۱) ۴۷ ‏ ۲) ۴۸ ‏ ۳) ۴۹ ‏ ۴) ۵۰

★۶۱. به ازای هر عدد طبیعی $n\leq m$ دو عدد $7n-4$ و $n+9$ نسبت به هم اولند. بیش‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۵۷ ‏ ۲) ۵۸ ‏ ۳) ۶۶ ‏ ۴) ۶۷

۶۲. به ازای هر عدد طبیعی $n\leq n_0$، دو عدد $2n+7$ و $11n-3$ نسبت به هم اولند. بیش‌ترین مقدار n_0 کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۵)

۱) ۳۵ ‏ ۲) ۳۷ ‏ ۳) ۳۹ ‏ ۴) ۴۰

★۶۳. اگر n عدد طبیعی و دو عدد $9n-5$ و $n+4$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر ۱ باشند، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟ (سراسری ۸۵)

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

۶۴. چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $(2a+1, 2a+3)=1$ ‏ ب) $(a+4, a+5)=1$

پ) $(3a+2, 3a+4)=1$ ‏ ت) $(4a+2, 4a+4)=2$

۱) صفر ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۳

۶۵. اگر a عددی تک‌رقمی و طبیعی و $(a, 18)=1$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۵ ‏ ۳) ۶ ‏ ۴) ۷

ویژگی‌های ب‌م‌م

★۶۶. اگر دو عدد a و ۹۰ نسبت به هم اول باشند، بزرگ‌ترین عددی که همواره $A=a^4-1$ را می‌شمارد، کدام است؟

۱) ۲۴۰ ‏ ۲) ۲۸۸ ‏ ۳) ۳۲۴ ‏ ۴) ۴۸۰

★۶۷. اگر 16^n-4^n بر ۱۰۲۳ بخش‌پذیر باشد، کم‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۵ ‏ ۳) ۶ ‏ ۴) ۷

☆۶۸. اگر اعداد صحیح b و a چنان باشند که $(a^2, b^2)+(6a, 6b)=280$، آن‌گاه (a, b) کدام است؟

۱) ۲۸ ‏ ۲) ۲۲ ‏ ۳) ۱۶ ‏ ۴) ۱۴

۶۹. اگر $36(6a^2, 54b^2)=(a^5, 243b^5)$ باشد، آن‌گاه $(a, 3b)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ‏ ۲) ۱۲ ‏ ۳) ۶ ‏ ۴) ۳

☆۷۰. اگر $12+(-a, b)=(a^2, b^2)$ باشد، آن‌گاه $(3a^2, 3b^2)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ‏ ۲) ۲۷ ‏ ۳) ۴۸ ‏ ۴) ۷۲

۷۱. اگر $(a, b)\mid b^3-a^2+4$، آن‌گاه $a-b$ کدام می‌تواند باشد؟ ($(a, b)\neq 1$)

۱) ۸ ‏ ۲) ۹ ‏ ۳) ۲۵ ‏ ۴) ۳۳

ک‌م‌م و ویژگی‌های آن

☆۷۲. اگر $a=2^3\times 5^2\times 7$ باشد، چند عدد چهار رقمی داریم که $[a, b]=2^4\times 5^2\times 7^2$

۱) ۳ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) صفر

معادلهٔ سیاله

☆۲۳۰. به ازای کدام مقدار n معادلهٔ سیالهٔ $۶۰x + ۸۴y = ۵n - ۱$ در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۹ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۲۳۱. معادلهٔ $۸x + ۱۲y = a$ به ازای کدام مقدار a در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

☆۲۳۲. به ازای کدام عدد طبیعی n، معادلهٔ خطی $۲۴x + ۳۹y = ۲n + ۱$ در مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۳ ۳) ۳۷ ۴) ۴۱

۲۳۳. اگر معادلهٔ سیالهٔ $ax + ۶y = ۱$ فاقد جواب باشد، کدام معادلهٔ زیر قطعاً جواب دارد؟

۱) $(a+۱)x + ۶y = ۱$ ۲) $(۲a+۱)x + ۶y = ۱$ ۳) $(۳a+۱)x + ۶y = ۱$ ۴) $(۶a+۱)x + ۶y = ۱$

★۲۳۴. معادلهٔ $(۹n+۷)x + (۵n+k)y = ۱$ به ازای تمام مقادیر طبیعی n، در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. k کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل معادلهٔ سیاله

☆۲۳۵. معادلهٔ سیالهٔ خطی $۱۵x + ۱۴y = ۱۰۵۰$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳۶. معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۵y = ۱۳۰$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

☆۲۳۷. معادلهٔ سیالهٔ $۱۱x + ۲۳y = ۹۰$ چند جواب صحیح با شرط $|y| < ۵۰$ دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۲۳۸. معادلهٔ سیالهٔ $۷x + ۲۱y = ۲۸$ چند جواب صحیح در بازهٔ $(-۲۰,۲۰)$ دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۹

☆۲۳۹. اعداد صحیح a و b در معادلهٔ $۱۵a + ۲۳b = ۱۲$ صدق می‌کند. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد b بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۴۰. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x که در معادلهٔ $۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲$ صدق کند، کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

☆۲۴۱. معادلهٔ سیالهٔ $۹x + ۱۳y = ۷۲۵$، در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟ (سراسری خارج از کشور ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۲. معادلهٔ $۴x - ۵y = ۸$ چند دسته جواب طبیعی دارد، که مجموع هر دسته جواب از ۳۰ بیش‌تر نباشد؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

☆۲۴۳. اگر $۲۲۱x + ۳۵۷y = (۲۲۱,۳۵۷)$ باشد، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی x کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

☆۲۴۴. اگر $۳۵۷x + ۶۲۹y = (۳۵۷,۶۲۹)$، آن‌گاه کوچک‌ترین عدد مثبت $x + y$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۴۵. معادلهٔ سیالهٔ $۲۵x + ۱۲y = ۱۱۱۰$ بر روی مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ چند زوج جواب دارد؟ (سراسری خارج از کشور ۸۷)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☆۲۴۶. برای خرید کتاب به قیمت ۷۵۰۰ تومان به تعداد A بن دویست تومانی و B بن یک‌صد و پنجاه تومانی پرداخت نموده‌ایم. حداقل A + B کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

☆۲۴۷. قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۴۸. به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۹. کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح و ناصفر b بخش‌پذیر گوییم، هرگاه عددی صحیح مانند q چنان یافت شود که $a = bq$

* می‌توانیم بنویسیم $b|a$ و بخوانیم b، a را عاد می‌کند.
* a مضرب b است (b مقسوم‌علیه a است.)

برای آن‌که $4|2n+2$، باید $2n+2$ مقسوم‌علیه ۴ باشد، یعنی:

$2n+2$	-1	1	-2	2	-4	4
$2n$	-3	-1	-4	0	-6	2
n	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-2	0	-3	1

-2 ، $\div 2$

یک مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

۲۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: ۱- حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی مضرب ۲ است.
۲- حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی مضرب ۶ است.
۳- حاصل‌ضرب هر n عدد متوالی مضرب $n!$ است.

با تجزیهٔ عبارت داده‌شده در سؤال داریم:

$$\underbrace{a^5+a^4}_{a^4(a+1)}\underbrace{-a^3-a^2}_{-a^2(a+1)}=a^4(a+1)-a^2(a+1)=(a+1)(a^4-a^2)$$

$$=(a+1)\underbrace{a^2}_{a\times a}(\underbrace{a^2-1}_{(a+1)(a-1)})$$

اما عبارت داده‌شده را می‌توان به‌صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\underbrace{a(a+1)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی مضرب ۲ است.}}\times\underbrace{(a-1)a(a+1)}_{\text{حاصل‌ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.}}$$

در نتیجه عبارت داده‌شده مضرب ۱۲ است.

۲۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته: برخی ویژگی‌های مهم عاد کردن:

۱) $a|b\Rightarrow\begin{cases}a|b^m\\a|mb\end{cases}$

۲) $a|b\Leftrightarrow a^n|b^n$

۳) $\forall n\geq m\Rightarrow a^m|a^n$

۴) $\left.\begin{matrix}a|b\\b|c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

به کمک ویژگی تعدی در رابطهٔ عاد کردن به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(درستی گزینهٔ ۱) $\left.\begin{matrix}x|y^2\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^2|y^4\\y^3|z^2\xrightarrow{\times y}y^4|yz^2\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تعدی}}x^2|yz^2$

(درستی گزینهٔ ۲) $\left.\begin{matrix}x|y^2\xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در y}}x|y^3\\y^3|z^2\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تعدی}}x|z^2$

(درستی گزینهٔ ۳) $\left.\begin{matrix}x|y^2\xrightarrow{\text{توان ۳}}x^3|y^6\\y^3|z^2\xrightarrow{\text{توان ۲}}y^6|z^4\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تعدی}}x^3|z^4$

پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

مثال نقض گزینه‌ها: $x=16\ ,\ y=4\ ,\ z=8$

۲۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

از آن‌جایی‌که $5|a+3b$ پس داریم:

$$a+3b=5q\xrightarrow{\text{توان ۲}}a^2+9b^2+6ab=25q^2$$

$$\xrightarrow{+25ab}a^2+9b^2+6ab+25ab=25q^2+25ab$$

$$\Rightarrow a^2+31ab+9b^2=25(q^2+ab)$$

پس a^2+9b^2+31ab مضرب ۲۵ است.

۲۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: اگر $0|f(n)$ آن‌گاه: $f(n)=0$

$$0|2n^3-3n^2-2n\Rightarrow 2n^3-3n^2-2n=0\Rightarrow n(2n^2-3n-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=0\notin\mathbb{N}\ \times\\ 2n^2-3n-2=0\xrightarrow{\Delta=25}\begin{cases}n=\frac{3+5}{4}=2\in\mathbb{N}\ \checkmark\\ n=\frac{3-5}{4}=\frac{-1}{2}\notin\mathbb{N}\ \times\end{cases}\end{cases}$$

پس فقط یک عدد طبیعی برای n داریم.

۳۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته: هر عددی صفر را می‌شمارد: $\forall a\in\mathbb{Z}:a|0$

می‌دانیم برای هر مقدار صحیح a رابطهٔ $a|0$ برقرار است. پس n هر مقدار صحیحی می‌تواند باشد.

۳۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: اگر $a|1$ آن‌گاه $a=\pm1$

می‌دانیم اگر $f(n)|1$ آن‌گاه $f(n)=\pm1$ است. پس داریم:

$$2n^2+n-2|1\Rightarrow\begin{cases}2n^2+n-2=1\Rightarrow 2n^2+n-3=0\\ \Rightarrow\begin{cases}n=1\ \checkmark\\ n=\frac{c}{a}=\frac{-3}{2}\notin\mathbb{Z}\ \times\end{cases}\\ 2n^2+n-2=-1\Rightarrow 2n^2+n-1=0\\ \Rightarrow(2n-1)(n+1)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-1\ \checkmark\\ n=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\ \times\end{cases}\end{cases}$$

پس دو مقدار صحیح برای n داریم.

۳۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته: اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه برای هر $m,n\in\mathbb{Z}$ داریم $a|mb+nc$ (a هر ترکیب خطی b و c را عاد می‌کند.) و به طور ویژه $a|b+c$ و $a|b-c$

نکته: هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند، به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح a داریم $a|a$

$$\left.\begin{matrix}a-b|a-b\ :\ \text{هر عدد خودش را می‌شمارد.}\\ \text{از طرفی}:\ a-b|a\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم.}}a-b|(a-b)-a$$

$$\Rightarrow a-b|-b\Rightarrow a-b|b$$

(برای رد سایر گزینه‌ها، $a=3$ و $b=2$ را در نظر بگیرید)

د) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}} \geq \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (نهایی- خرداد ۸۷)

ذ) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطهٔ $x^۴+y^۴ \geq x^۳y+xy^۳$ را ثابت کنید. (نهایی- دی ۹۰)

ر) اگر a و b اعداد حقیقی و مثبت باشند، نامساوی $a^۳+b^۳ \geq ab(a+b)$ را اثبات کنید.

ز) با فرض این‌که a و b دو عدد حقیقی غیرصفر و هم‌علامت هستند، حکم $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$ را اثبات کنید.

س) اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، حکم $a^۵+b^۵ > a^۴b+b^۴a$ را ثابت کنید.

قسمت دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۲۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

آ) اعداد .... و .... هر عددی را می‌شمارند.

ب) اگر عددی ۱ یا ۱- را بشمارد آن‌گاه آن عدد برابر .... است.

پ) اگر $a \mid ۰$ آن‌گاه .... است.

ت) برای n های .... ، رابطهٔ $a+b \mid a^n-b^n$ برقرار است.

ث) اگر p عددی اول باشد و $a \mid p$ آن‌گاه .... یا ....

۲۲. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) فقط به ازای اعداد مثبت $n^۳+۱ \mid ۰$

ب) تنها عددی که دقیقاً دو مقسوم‌علیه دارد ۱ می‌باشد.

پ) اگر $۲ \mid a+b$ آن‌گاه $۲ \mid a-b$

ت) اگر $a+b \mid a$ آن‌گاه $a+b \mid b$

۲۳. ثابت کنید اگر $a \mid b$ آن‌گاه $-a \mid -b$ ، $-a \mid b$ ، $a \mid -b$

۲۴. ثابت کنید اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

۲۵. موارد زیر را ثابت کنید.

آ) $\forall m , n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$

ب) $(k \neq ۰),(k \in \mathbb{Z}), a \mid b \Leftrightarrow ka \mid kb$

۲۶. موارد زیر را اثبات کنید.

آ) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

ب) $(b \neq ۰)$ ، $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

پ) $a \mid b$ ، $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

۲۷. ثابت کنید هرگاه عددی، دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

۲۸. موارد زیر را ثابت کنید.

آ) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

ب) $a \mid b$ ، $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

پ) $a \mid b$ ، $a \mid c \Rightarrow a \mid mb \pm nc$

۲۹. موارد زیر را در صورت امکان اثبات کنید و یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

آ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

ب) $a \mid b$ ، $c \mid d \Rightarrow a+c \mid b+d$

پ) $(a \neq b)$ ؛ $a,b \in P \Rightarrow (a,b)=۱$

ت) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

ث) $(m,n \in \mathbb{N}$ ، $a,b \in \mathbb{Z})$ $m \leq n$ ، $a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$

۳۰. اگر a عددی صحیح و مخالف صفر و اعداد $5n+6$ و $9n+11$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm 1$ است.

۳۱. اگر $a>1$ و $a \mid 3k+5$ و $a \mid 7k+8$ ثابت کنید a عددی اول است.

۳۲. عدد طبیعی a، دو عدد $4n^2+12n+11$ و $2n+3$ را می‌شمارد. مقدار a را به‌دست آورید.

۳۳. اگر $c \mid a+3$ و $c \mid b+7$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $ab-17$ بر c چقدر است؟

۳۴. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $23 \mid 3a-8b$ آن‌گاه $23 \mid 11a+9b$ را ثابت کنید.

۳۵. اگر $9 \mid 3k+4$ به طوری‌که k عددی صحیح باشد، $81 \mid 9k^2-3k-20$ را ثابت کنید.

۳۶. به ازای چند عدد طبیعی n، رابطهٔ $n+3 \mid 8n+9$ برقرار است؟

قسمت سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) ـ کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م)

۳۷. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

آ) ب‌م‌م دو عدد ۴۸ و ۸۴ برابر .... است.

ب) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ آن‌گاه ب‌م‌م p و a برابر .... است.

پ) ک‌م‌م دو عدد ۱۸ و ۳۲ برابر .... است.

ت) اگر a و b نسبت به هم اول باشند، در این‌صورت ک‌م‌م آن‌ها برابر .... است.

۳۸. درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید.

آ) اگر $a \mid b$ آن‌گاه $(a,b)=a$ و $[a,b]=b$

ب) اگر a عددی زوج باشد $(a,a+2)=2$

پ) اگر a عددی فرد باشد $[a-1,a+1]=a^2-1$

۳۹. اگر a و b دو عدد صحیح و $(a^2,b^2)+(6a,6b)=280$ باشد، آن‌گاه حاصل (a,b) را به‌دست آورید.

۴۰. اگر a و b اعداد مثبت باشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و $ab+1$ را به‌دست آورید.

۴۱. اگر $d=(5a+4,2a+3)$ آن‌گاه مقادیر ممکن برای d را به‌دست آورید.

۴۲. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n، اعداد $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

۴۳. اگر $d=(8a+6,6a-4)$ آن‌گاه d دارای چند مقدار متمایز است؟

۴۴. اگر a عددی صحیح و p عددی اول و $p \nmid a$ ثابت کنید $(p,a)=1$

۴۵. با استفاده از تعاریف ب‌م‌م و ک‌م‌م موارد زیر را ثابت کنید.

آ) $a \mid b \Rightarrow (a,b)=|a|$

ب) $a \mid b \Rightarrow [a,b]=|b|$

۴۶. اگر $a \mid b$ آن‌گاه حاصل عبارت $((a^2,b^2),[a,b^2])$ را به‌دست آورید.

۴۷. حاصل عبارت $[(a^2,a),(a,b)]$ را به‌دست آورید.

۴۸. حاصل عبارت $(a,[a,b])-[a,(a,b)]$ را به‌دست آورید.

۴۹. حاصل هر یک از موارد زیر را به‌دست آورید. $(a,b \in \mathbb{Z})$

آ) $(4a+2,4a+3)$

ب) $[(a^5,a^9),a^6]$

پ) $(30b^7,3b)$

ت) $([b^3,b],b^7)$

خ) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\geq\frac{a+b}{ab}$

$\Leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2(a-b)-b^2(a-b)\geq 0\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b)\geq 0\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0$

$a,b\in\mathbb{R}^+$ بنابراین نامساوی فوق بدیهی است.

د) $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\geq\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq 4\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+2\sqrt{ab}+b\geq 4\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\geq 0\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ (بدیهی است)

ذ) $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3\Leftrightarrow x^4+y^4-x^3y-xy^3\geq 0$

$\Leftrightarrow x^3(x-y)-y^3(x-y)\geq 0\Leftrightarrow(x^3-y^3)(x-y)\geq 0$

$\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)\geq 0\Leftrightarrow(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geq 0$

با توجه به اینکه x و y دو عدد حقیقی و مثبت هستند، نامساوی فوق بدیهی است.

ر) $a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b)$

$\xrightarrow{a+b>0}a^2-ab+b^2\geq ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ همواره درست

ز) $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4\Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\geq 4$

$\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2\xrightarrow{ab>0}a^2+b^2\geq 2ab$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$

چون به یک رابطهٔ بدیهی رسیدیم می‌توان گفت حکم برقرار است.

س) $a^5+b^5>a^4b+b^4a\Leftrightarrow a^5+b^5-a^4b-b^4a>0$

$\Leftrightarrow a^4(a-b)-b^4(a-b)>0\Leftrightarrow(a-b)(a^4-b^4)>0$

$\Leftrightarrow(a-b)(a^2-b^2)(a^2+b^2)>0$

$\Leftrightarrow(a-b)(a-b)(a+b)(a^2+b^2)>0$

$\Leftrightarrow(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)>0$

سمت چپ نامساوی همواره درست است پس چون به یک رابطهٔ بدیهی رسیدیم می‌توان گفت حکم برقرار است.

۲۱

آ) $1,-1$ ب) ± 1 پ) $a=0$

ت) طبیعی زوج ث) $|a|=1$ ، $|a|=p$

۲۲

آ) نادرست (برای هر عدد حقیقی $a|0$ پس برای هر $n\in\mathbb{R}$ ، $(n^3+1)|0$)

ب) نادرست (هر عدد صحیحی مانند a، بر اعداد صحیح ۱ و ۱- و خود عدد a بخش‌پذیر است. پس برای آن‌که عدد a فقط دو مقسوم‌علیه داشته باشد، باید $a=\pm 1$ باشد.)

پ) درست ($2|a+b$، پس $a+b$ زوج است. پس هر دوی a و b یا زوج هستند یا هر دو فرد. پس $a-b$ زوج است.)

ت) درست

$\left.\begin{matrix}a+b|a\\a+b|a+b\end{matrix}\right\}\xrightarrow{-}a+b|b$

۲۳

$a|b\xrightarrow{a|mb}a|(-1)\times b\Rightarrow a|-b$

$-a|a\ ,\ a|b\xrightarrow{\text{تعدی}}-a|b$

$a|b\Rightarrow(-1)\times a|(-1)\times b\Rightarrow -a|-b$

۲۴

اثبات رابطهٔ مقابل به‌صورت زیر است: $a|b\wedge b|c\Rightarrow a|c$

$a|b\Rightarrow b=aq\quad(1)$

$b|c\Rightarrow c=bq'\quad(2)$

$\xrightarrow{(2),(1)}c=aqq'\xrightarrow{qq'=q''}c=aq''\Rightarrow a|c$

۲۵

آ) $a^n=a^m\times a^{n-m}\Rightarrow a^n=a^m\times q$

$\Rightarrow a^m|a^n\quad(m,n\in\mathbb{N},m\leq n)$

ب) $\begin{cases}a|b\Rightarrow b=aq\xrightarrow{\times k}kb=kaq\Rightarrow ka|kb\\ka|kb\Rightarrow kb=kaq\xrightarrow{\div k}b=aq\Rightarrow a|b\end{cases}(k\neq 0,k\in\mathbb{Z})$

۲۶

آ) $\left.\begin{matrix}a|b\\b|b^n\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تعدی}}a|b^n$

ب) $a|b\Rightarrow a=bq\ ,\ b\neq 0\Rightarrow q\neq 0\xrightarrow{q\in\mathbb{Z}-\{0\}}1\leq|q|$

$\xrightarrow{\text{طرفین را در } |a| \text{ ضرب می‌کنیم.}}|a|\times 1\leq|a||q|$

$\Rightarrow|a|\leq|aq|\xrightarrow{b=aq}|a|\leq|b|$

پ) $\left.\begin{matrix}a|b\Rightarrow|a|\leq|b|\\b|a\Rightarrow|b|\leq|a|\end{matrix}\right\}\Rightarrow|a|=|b|\Rightarrow a=\pm b$

۲۷

$a|b\wedge a|c\Rightarrow a|b\pm c$

اثبات رابطهٔ فوق به‌صورت زیر است:

$\left.\begin{matrix}a|b\Rightarrow b=a\times q\\a|c\Rightarrow c=a\times q'\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\pm c=a(\underbrace{q\pm q'}_{q''})$

$\Rightarrow b\pm c=aq''\Rightarrow a|b\pm c$

۲۸

آ) $a|b\Rightarrow b=aq\Rightarrow b^n=a^nq^n$

$\xrightarrow{q^n=q'}b^n=a^nq'\Rightarrow a^n|b^n$

ب) $\left.\begin{matrix}a|b\Rightarrow b=aq\\c|d\Rightarrow d=cq'\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\times d=(a\times c)(\underbrace{q\times q'}_{q''})$

$\Rightarrow b\times d=a\times c\times q''\Rightarrow ac|bd$

پ) $\left.\begin{matrix}a|b\Rightarrow a|mb\\a|c\Rightarrow a|nc\end{matrix}\right\}\xrightarrow{a|b\wedge a|c\Rightarrow a|b\pm c}a|mb\pm nc$

۲۹

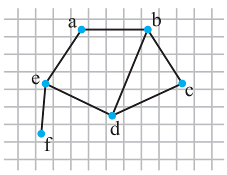
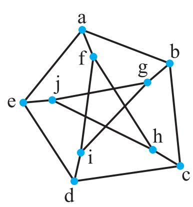
آ) درست. اثبات: اگر a و $a+1$ اعداد صحیح متوالی باشند، آن‌گاه:

$(a,a+1)=d\Rightarrow\begin{cases}d|a\\d|a+1\end{cases}\xrightarrow{-}d|(a+1)-a$

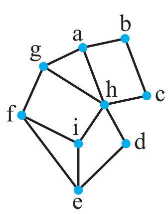
$\Rightarrow d|1\xrightarrow{d>0}d=1$

ب) نادرست. مثال نقض: $2|2\ ,\ 2|4\rightarrow 2+2\nmid 2+4$

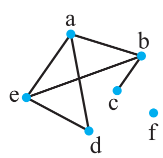
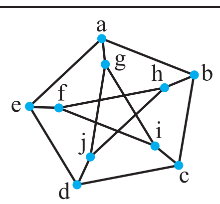
سؤالات امتحان درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه		**امتحان خرداد ۹۸**	**آزمون شمارهٔ (۱)**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. آ) یک گراف کامل ۸ رأسی، .... یال دارد. ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل .... رأس برای احاطه همهٔ رئوس لازم است. پ) اگر در گراف G از مرتبهٔ p داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر .... است. ت) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با .... است.	۲
۳	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را به‌دست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد. آ) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید. ب) مجموعهٔ $N_G(b)$ را بنویسید. پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.  	۱/۵
۷	گراف $C_۷$ را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. آ) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی بنویسید. ب) عدد احاطه‌گری $C_۷$ را به‌دست آورید. پ) دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	آ) ثابت کنید هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ ب) در گراف روبه‌رو یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.  	۱/۵
۹	آ) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۱۰۱۰۲۰۲۰۳۰۲۰۴۰۴۰۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟	۱
۱۱	۶ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری‌که: آ) به‌صورت یک در میان قرار بگیرند. ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند. پ) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰$ با شرط $x_i > ۰$ و $i = ۲،۳،۴،۵$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	جمع نمره	۲۰

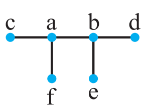
سؤالات امتحان درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه		**امتحان شهریور ۹۸**	**آزمون شمارهٔ (۲)**

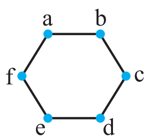
ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. آ) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را پُر کنید. آ) $[a,b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط مقابل برقرار باشند: ۱) $a\|c$ ، $b\|c$ ۲) $\forall m>0$ ، .... ب) گراف G را .... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. پ) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n>2$ برابر است با: .... ت) هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیش‌تر در .... لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل .... کبوتر در آن قرار گرفته است.	۱/۵
۳	برای هر سه عدد حقیقی x و y، z ثابت کنید: $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+xz$	۱/۵
۴	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۱/۵
۵	باقی‌ماندهٔ تقسیم $(27)^7+19$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵
۶	با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $2000x+5000y=29000$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۷	گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یال‌های زیر را در نظر بگیرید: $E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$ آ) نمودار گراف را رسم کنید. ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.	۲
۸	یک گراف ۵ رأسی غیرتهی k- منتظم رسم کنید، به طوری‌که: آ) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۹	آ) گراف P_8 را رسم کنید. ب) یک γ- مجموعه از آن را مشخص کنید. پ) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴عضوی از آن را مشخص نمایید.	۱/۵
۱۰	در گراف شکل مقابل یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.  	۱
۱۱	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری‌که: آ) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند. ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. پ) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$ با شرط $x_5 \ge 4$ و $x_1>2$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	قرار است چهار مدرس T_1,T_2,T_3,T_4 در چهار جلسهٔ متوالی در چهار کلاس C_1,C_2,C_3,C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.	۱
۱۴	چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $1 \le n \le 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد؟	۱/۵
۱۵	۱۳ نقطه درون یک مستطیل 8×6 قرار دارند؛ نشان دهید که حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها از هم کم‌تر از $\sqrt{8}$ باشد.	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

سؤالات امتحان درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه		**امتحان خرداد ۹۹**	**آزمون شمارهٔ (۳)**

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>سؤالات</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
آ) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.</td><td>۱/۷۵</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به‌دست آورید.</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n \mid 9k+7$ ، $n \mid 7k+6$ ، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به‌دست آورید.</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>معادلهٔ هم‌نهشتی $5x \overset{11}{\equiv} 2$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
آ) مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف .... تعداد یال‌ها است.
ب) در یک گراف k-منتظم، ماکزیمم درجهٔ رأس برابر با .... است.
پ) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر .... گراف G می‌نامیم.
ت) یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر .... می‌نامیم.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۷</td><td>گراف G را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید.
آ) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.
ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.
پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۸</td><td>در گراف G، درجهٔ رأس v برابر ۹ است و درجهٔ رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبهٔ گراف G را مشخص کنید.</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۹</td><td>گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری که:
آ) مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.
ب) بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td>عدد احاطه‌گری گراف مقابل را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۱</td><td>با ارقام عدد ۱۰۱۰۲۰۲۰۲۰۳۰۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۱۲</td><td>به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۳</td><td>مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱۰۲۰۳۰۴ یک مربع لاتین جدید به‌دست آورید.
<table><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr></table></td><td>۱</td></tr>
</table>

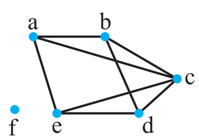
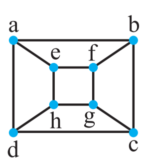
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	**امتحان خرداد ۹۹** — **آزمون شمارهٔ (۳)**

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>راهنمای تصحیح</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>
آ) نادرست (۰/۲۵) $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^c$ (۰/۲۵) ، $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0 \notin Q^c$ (۰/۲۵)
ب) درست (۰/۲۵) $(2k+1)^2-1=\underbrace{4k^2+4k+1}_{(0/25)}-1=\underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)}=\underbrace{4\times 2q}_{(0/25)}=8q$
</td><td>۱/۷۵</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>
$a=4q+3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 2a+3=\underbrace{8q+9}_{(0/25)}=\underbrace{8(q+1)+1}_{(0/25)}=8q'+1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r=1$ (۰/۲۵)
</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>
$\begin{matrix} n\mid 9k+7\ (\times(-7)) \\ n\mid 7k+6\ (\times 9)\end{matrix}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n \mid -63k-49+63k+54$ (۰/۲۵) $\Rightarrow n\mid 5$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=1$ یا ۵ (۰/۲۵)
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>
$7^2=49\overset{15}{\equiv}4$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 7^4\overset{15}{\equiv}16\overset{15}{\equiv}1$ (۰/۵) $\Rightarrow 7^{28}\overset{15}{\equiv}1$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\times 7^2 \overset{15}{\equiv} 4\ (0/25)} 7^{30}\overset{15}{\equiv}4$ (۰/۲۵)
</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>
$2\overset{11}{\equiv}35$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 5x\overset{11}{\equiv}35$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(5,11)=1\ (0/25)} x\overset{11}{\equiv}7$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=11k+7$ (۰/۲۵)
</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>
آ) دو برابر (۰/۲۵)   ب) k (۰/۲۵)
پ) مینیمم (۰/۲۵)   ت) مینیمال (۰/۲۵)
</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۷</td><td>
آ) $N_G[a]=\{a,b,e,d\}$ (۰/۵)   ب) دور به طول ۴: a,b,e,d,a (۰/۲۵)
پ) مسیر به طول ۳: a,e,b,c (۰/۲۵) و مسیر به طول ۴: a,d,e,b,c (۰/۲۵)
</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۸</td><td>
$\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=p-1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 9+12=p-1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p=22$ (۰/۲۵)
</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۹</td><td>
آ) گراف روبه‌رو از مرتبهٔ ۶ و دارای تنها یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا $\{a,b\}$ است. (۰/۲۵)
رسم گراف (۰/۲۵)


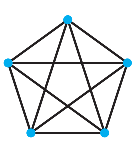
ب) گراف مقابل دارای سه مجموعهٔ احاطه‌گری به اندازهٔ ۲ است که عبارتند از $\{a,d\},\{f,c\},\{e,b\}$ (۰/۲۵)
رسم گراف (۰/۲۵)


</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td>
برای گراف مورد سوال داریم $[\frac{n}{\Delta+1}]\le\gamma(G)\Rightarrow[\frac{10}{3+1}]=3\le\gamma(G)$ (۰/۵). از طرفی مجموعهٔ $\{g,h,d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف است (۰/۲۵). لذا $\gamma(G)\le 3$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G)=3$ (۰/۲۵)
</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۱</td><td>
$\frac{7!}{2!\times 3!}$ (۰/۵) $=420$ (۰/۲۵)
</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۱۲</td><td>
$x_1+\cdots+x_5=11,\ x_2\ge 2,\ x_5\ge 4$ (۰/۲۵)
$x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4=11$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5=5$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ جواب $=\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}$ (۰/۵)
</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۳</td><td>
با استفاده از جایگشت $1\to 2,\ 2\to 3,\ 3\to 4,\ 4\to 1$ (۰/۵) مربع لاتین به‌صورت مقابل داریم:
$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3&2&1&4\\ \hline 1&4&3&2\\ \hline 4&1&2&3\\ \hline 2&3&4&1\\ \hline\end{array}$ (۰/۵)
</td><td>۱</td></tr>
</table>

سؤالات امتحان درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**
سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه		**امتحان شهریور ۹۹**	**آزمون شمارهٔ (۴)**

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. آ) برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=\circ$ آن‌گاه $a=\circ$ یا $b=\circ$ پ) اگر $a,b\in\mathbb{R}$ داریم $a<b \Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}$ ت) حاصل‌جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۲	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$	۱/۲۵
۳	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری‌که $a \mid ۳n+۴$ و $a \mid ۲n+۳$. نشان دهید $a=۱$	۱/۲۵
۴	ثابت کنید اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$، $(k\in\mathbb{W})$ نوشته می‌شود.	۱/۵
۵	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m-۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۶	رقم یکان عدد $(۲^{۱۱}+۷)$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۷	معادلهٔ سیالهٔ $۲x+۵y=۱۹$ را حل کنید.	۱
۸	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید. آ) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) سه دور به طول ۳ بنویسید. پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث) آیا گراف G همبند است؟ 	۲/۵
۹	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به‌دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.	۱
۱۰	عدد احاطه‌گری گراف داده‌شده را مشخص کنید. 	۱/۵
۱۱	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۰/۷۵
۱۲	معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_۱\geq۱$ و $x_۳>۳$ باشند؟	۱/۲۵
۱۳	یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ بنویسید.	۰/۵
	بخش انتخابی: دانش‌آموزان عزیز جهت کسب ۴ نمرهٔ باقی‌مانده فقط به ۴ سؤال به دلخواه پاسخ دهید.	
۱۴	فرض کنیم $m\in\mathbb{N}$ ، $a,b\in\mathbb{Z}$ اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ ، $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$	۱
۱۵	آیا گراف ۷ رأسیِ ۳ـ منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱
۱۶	گراف $P_۵$ را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان درس: **ریاضیات گسسته**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	**امتحان شهریور ۹۹** / **آزمون شمارهٔ (۴)**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	آ) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)	۱
۲	$\frac{a+b}{۲} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \ge ۲\sqrt{ab}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \ge ۰$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \ge ۰$ (۰/۲۵) نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است (۰/۲۵). اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۳	$\begin{matrix} a \mid ۳n+۴ \\ a \mid ۲n+۳ \end{matrix} \Rightarrow a \mid \underbrace{-۲(۳n+۴)}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{۳(۲n+۳)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a \mid ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = \pm ۱$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} a = ۱$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۴	هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $p=۶k\ (۱)\ ,\ p=۶k+۱ (۲)\ ,\ p=۶k+۲=۲(۳k+۱)\ (۳)$ $p=۶k+۳=۳(۲k+۱)\ (۴)\ ,\ p=۶k+۴=۲(۳k+۲)\ (۵)\ ,\ p=۶k+۵\ (۶)$ (۰/۷۵) p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است (۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد. (۰/۲۵) بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود. (۰/۲۵)	۱/۵
۵	$\begin{matrix} m=۱۷q+۵\ (q\in\mathbb{Z}) \\ n=۱۷q'+۳\ (q'\in\mathbb{Z}) \end{matrix}$ (۰/۵) $\Rightarrow (۲m-۵n)=۱۷(۲q-۵q')-۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (۲m-۵n)=۱۷(۲q-۵q'-۱)+۱۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r=۱۲$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۶	$۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲^{۱۱}+۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۵$ (۰/۲۵) رقم یکان برابر ۵ است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۷	$۲x \overset{۵}{\equiv} ۱۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \xrightarrow{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۵k+۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=-۲k+۳$ (۰/۲۵)	۱
۸	آ) $\Delta(G)=۴\ ,\ \delta(G)=۰$ (۰/۵) ب) c,e,d,c (۰/۲۵) ، c,a,e,c (۰/۲۵) ، c,a,b,c (۰/۲۵) پ) ۵ (۰/۲۵) ت) $N_G(e)=\{a,c,d\}$ (۰/۷۵) ث) خیر (۰/۲۵)	۲/۵
۹	رسم گراف (۰/۲۵)  $\frac{p(p-۱)}{۲}=۱۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p^۲-p-۲۰=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p=۵$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	با توجه به اینکه $\left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ داریم $\gamma(G) \ge ۲$ (۰/۲۵). لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است. (۰/۲۵) از طرفی $\{e,c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. (۰/۵). پس $\gamma(G) \le ۲$ (۰/۲۵) در نتیجه $\gamma(G)=۲$ (عدد احاطه‌گری). (۰/۲۵)	۱/۵
۱۱	$\frac{۸!}{۳! \times ۴!}$ (۰/۷۵) (به راه حل $\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{(۰/۲۵)}\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{(۰/۲۵)}\underbrace{\binom{۱}{۱}}_{(۰/۲۵)}$ نیز نمره داده شود.)	۰/۷۵