آموزش مفهومی حسابان ۱

سال یازدهم

رشتهٔ ریاضی - فیزیک

۱. آمــوزش کامل مفاهیم درس با رویکرد آمــوزش به روش حل مســأله و فعالیت محور.

۲. بیان دقیق تعریف‌ها و قضیه‌هــا و بررسی مفهوم‌هــای چالــش برانگیز.

۳. شامل حدود ۳۵۰ مثال متنوع همراه با مثال‌های کاربردی و مدل‌های ریاضی.

۴. ۱۵۰۰ تمرین موضوعــی و تکمیلی فصل‌ها، همراه با حل.

۵. شامل ۳۰۰ پرسش مفهومی از متن درس‌ها، همراه با پاسخ.

مؤلف:
محمود نصیری

به نام هستی بخش

مقدمه

با تغییر کتاب درسی حسابان لازم بود کتاب قبلی آموزش حسابان را که خوشبختانه مورد عنایت همکاران و دانش‌آموزان بود، تغییر دهیم. در راستای این هدف، کتاب جدیدی تألیف شده است که مطابق با سرفصل‌های کتاب درسی می‌باشد.
کوشیده‌ایم که در نوشتن مطالب کتاب پیش‌رو، روش‌های آموزشی رعایت شود؛ به همین دلیل هر مفهوم با «طرح یک مسأله» شروع می‌شود. سپس به «**تعریف**»ها و «**قضیه**»ها می‌رسیم. آن‌گاه با مثال‌های متنوع دیگر، به تثبیت مطلب پرداخته‌ایم و سرانجام برای تسلّط بیش‌تر، فعالیت‌های گوناگون مرتبط با آن مفهوم آمده است که همکاران گرامی می‌توانند این فعالیت‌ها را در کلاس‌ها بررسی کنند. هم‌چنین برای آشنایی بیش‌تر دانش‌آموزان با کاربردها و مدل‌های ریاضی در دنیای واقعی مثال‌ها و مسایل کاربردی فراوانی در رابطه با مفاهیم مختلف مطرح و ارائه شده است. در پایان هر بخش، تمرین‌های مربوط به همان بخش وجود دارد که از ساده‌ترین تمرین‌ها شروع می‌شود و به ترتیب به سطحی بالاتر می‌رسد. اما در نهایت این مسأله‌ها تقریبًادر سطح کتاب درسی است.
برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به مسأله‌های دشوارتر و با سطح علمی بالاتر نیز تمرین‌هایی با نام «تمرین‌های دوره‌ای و تکمیلی» در هر فصل گنجانده شده است،که می‌توانند در تعمیق یادگیری و مهارت یافتن در مفاهیم مفید باشند. هم‌چنین تمرین‌هایی با نام پرسش‌های مفهومی در انتهای هر فصل مطرح شده‌اند، که این پرسش‌ها براساس مطالب اصلی درسی بیان شده‌اند و اکثرًا محاسبه‌ای نمی‌باشند.
در صورتی که مفاهیم درسی و تعریف‌ها و قضیه‌ها به طور دقیق مطالعه شوند دانش‌آموزان می‌توانند به خوبی از عهده آن‌ها برآیند.
متن‌های کتاب علاوه بر آن که تمام فصل‌ها و مبحث‌های کتاب درسی را در بردارند، شامل قسمت‌های تکمیلی می‌باشند. بخش‌های تکمیلی کتاب بر دو نوع می باشند، یکی همان مطالب کتاب درسی هستند که به علت ساعت کم درسی به طور ناقص بیان شده‌اند یا اصلاًدر کتاب درسی بیان نشده‌اند. برای نمونه آشنایی با معادله‌های مثلثاتی که علاوه بر سایر مباحث ریاضی کاربرد دارند در فیزیک نیز ضروری می‌باشند، یا تابع‌های صعودی و نزولی که مرتبًادر نمودارها از سال‌های قبل تکرار می‌شوند و در مفهوم تابع‌های یک‌به‌یک و وارون به کار می‌روند به سال بعد موکول شده‌اند. بنابراین سعی شده است که در کتاب این نوع مطالب نیز تحت عنوان مطالب تکمیلی بیان شوند.
تلاش ما بر این بوده است که چالش‌های کتاب درسی مورد توجه واقع شوند و مفاهیم و مطالب به صورت دقیق و با تعمق بیش‌تر مورد بحث و بررسی واقع شوند و به مسأله‌های کاربردی نیز توجه ویژه داشته باشیم.
کتاب علاوه بر فعالیت‌های هر بخش شامل بیش از ۲۲۰۰ مثال، تمرین، تمرین‌های تکمیلی و پرسش می‌باشد که هر کدام اهداف مشخصی را دنبال می‌کنند.
لازم می‌دانم از همه‌ی همکاران ارجمندی که با دقت در نوشته‌های این‌جانب موجبات دلگرمی ما را فراهم می‌کنند و خستگی ناشی از تألیف این آثار را از ما می‌زدایند سپاسگزاری کنم.
از جناب آقای یحیی دهقانی مدیر انتشارات مبتکران که همواره پشتیبان کتاب‌های علمی و مفید می‌باشند، تشکر می‌کنم. در پایان از سرکار خانم فیروزه مرادی که با زحمات فراوان حروفچینی کتاب را انجام داده و خانم نرگس سربندی و رضیه صفریان که زحمت کشیده و نمودارهای کتاب را رسم کرده‌اند و سرکار خانم مینا هرمزی طراح جلد تشکر می‌کنم.

محمود نصیری

فهرست

فصل اول

جبر و معادله

مقدمه

معادله یکی از مهم‌ترین مفاهیم جبر است، زیرا معادله‌ها کاربردهای زیادی در حل مسایل دنیای واقعی دارند. در این فصل پس از مجموع دنباله‌های حسابی و هندسی بحث اصلی فصل را که معادله‌ها می‌باشند بررسی می‌کنیم.

ابتدا معادله چند جمله‌ای درجه دوم و رابطه بین جواب‌ها یادآوری می‌شود. سپس کاربردهای رابطه‌های بین جواب‌ها و کاربرد معادله درجه دوم در معادله‌های دیگر و مروری بر معادله‌های چند جمله‌ای خواهیم داشت.

هم‌چنین جواب معادله‌ها از نظر نمودار بررسی می‌شوند حل و بررسی معادله‌های گویا و گنگ از نظر روش حل و نمودار نیز در این فصل انجام می‌شوند. هم‌چنین قدر مطلق چه از نظر ویژگی‌ها و چه بعضی نمودارهای قدرمطلقی نیز از بحث‌های اساسی این فصل است.

در پایان فصل مقدماتی از هندسه تحلیلی که شامل مفهوم فاصله دو نقطه و فاصله نقطه از خط و مسایلی مربوط به خط راست می‌باشند بررسی می‌شوند.

مجموع جمله‌ها در دنباله‌های حسابی و هندسی

قبلاً با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شده‌اید، اما مجموع جمله‌ها در این دنباله‌ها بررسی نشده‌اند. در این بخش آن‌ها را بیان می‌کنیم، اما قبل از آن ویژگی‌های این دنباله‌ها را از سال قبل مرور می‌کنیم.

اگر a و d دو عدد حقیقی باشند، هر دنباله به‌صورت $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$ را یک دنباله‌ی حسابی تعریف کردیم که در آن جمله‌ی nاُم برابر $a_n = a_1 + (n-1)d$ است که d قدرنسبت و a جمله‌ی اول است. در هر دنباله‌ی حسابی ویژگی‌های زیر به سادگی ثابت می‌شوند.

۱. تفاضل هر جمله از جمله‌ی ما قبل آن مقدار ثابت قدرنسبت است. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2$

۲. در هر دنباله‌ی حسابی جمله‌ی nام برابر است با؛ $a_n = a_1 + (n-1)d$.

۳. اگر a_m و a_n دو جمله‌ی دلخواه یک دنباله‌ی حسابی باشند، $\frac{a_n - a_m}{n-m} = d$.

۴. اگر a_m، a_n، a_p و a_r چهار جمله‌ی دلخواه یک دنباله‌ی حسابی باشند، به طوری‌که $m+n=p+r$ آن‌گاه $a_m + a_n = a_p + a_r$.

به همین ترتیب؛

اگر $a \neq 0$ و $q \neq 0$ دو عدد حقیقی باشند، دنباله؛

$$a \ , \ aq \ , \ aq^2 \ , \dots , \ aq^{n-1}$$

یک دنباله‌ی هندسی نامیده می‌شود که a جمله‌ی اول و q قدرنسبت است. در این دنباله ویژگی‌های زیر مشابه دنباله‌ی حسابی برقرارند.

۱. نسبت هر جمله به جمله‌ی ما قبل آن مقداری ثابت و برابر قدرنسبت است.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad , \quad n \geq 2$$

۲. در دنباله‌ی هندسی جمله‌ی nام برابر $a_n = aq^{n-1}$ است.

۳. اگر a_m و a_n دو جمله‌ی هم علامت از یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه $q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ اگر $n-m$ زوج باشد، علامت مثبت و منفی جلوی رادیکال داریم.

۴. اگر a_m ، a_n ، a_r و a_p چهار جمله‌ی دلخواه یک دنباله‌ی هندسی باشند، به طوری‌که $m+n=p+r$ آن‌گاه $a_m a_n = a_p a_r$.

محاسبه‌ی مجموع n جمله‌ی اول در دنباله‌ی حسابی

فرض کنیم در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اول a و قدرنسبت d و جمله‌ی آخر یعنی a_n برابر ℓ باشد. طبق ویژگی که در هر دنباله حسابی حاصل‌جمع جمله‌ها از طرفین برابر می‌باشند به سادگی می‌توانیم مجموع را محاسبه کنیم:

$$S_n = a + (a+d) + \dots + (\ell - d) + \ell$$

$$S_n = \ell + (\ell - d) + \dots + (a+d) + a$$

با جمع این دو رابطه داریم:

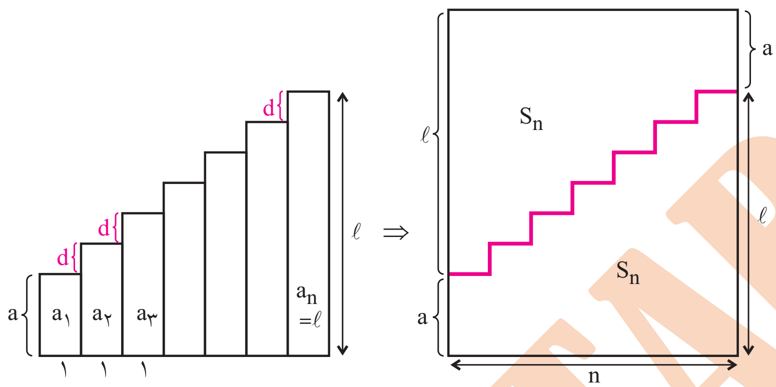
$$2S_n = (a+\ell) + (a+\ell) + \dots + (a+\ell) + (a+\ell) = n(a+\ell) \Rightarrow$$

در نتیجه؛

$$S_n = \frac{n(a+\ell)}{2}$$

به روش هندسی نیز می‌توانیم این فرمول را محاسبه کنیم؛

ابتدا فرض کنید $a>۰$ و $d>۰$ حالت‌های دیگر مشابه آن است. هر جمله دنباله‌ی حسابی را می‌توان برابر مساحت مستطیلی به عرض واحد و طول‌های a، $a+d$، ... و ℓ در نظر گرفت. در این صورت مجموع مساحت‌های این مستطیل‌ها برابر مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی است که یک شکل پله‌ای است. اکنون با این شکل یک مستطیل می‌سازیم. چگونگی ساختن آن را با توجه به شکل توضیح دهید.



از شکل مشاهده می‌کنید که مساحت مستطیل دو برابر مساحت شکل پله‌ای است که برابر مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی است. اندازه‌های اضلاع این مستطیل n و $a+\ell$ است، پس:

$$۲S_n = n(a+\ell) \Rightarrow S_n = \frac{n(a+\ell)}{۲}$$

می‌توانید فرمول را برحسب a و d نیز بنویسید؛

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

مثال ۱. حداقل چند جمله به‌ترتیب از دنباله ...، ۱۳، ۹، ۵ انتخاب کنیم تا مجموع آن‌ها $S_n=۵+۹+۱۳+...$ از ۳۰۰ بزرگ‌تر باشد.

پاسخ. در این دنباله جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۴ است. در نتیجه:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲\times۵+(n-۱)۴] = \frac{n(۴n+۶)}{۲} = ۲n^۲+۳n > ۳۰۰$$

ابتدا معادله‌ی $۲n^۲+۳n=۳۰۰$ را حل می‌کنیم:

$$۲n^۲+۳n-۳۰۰=۰ \Rightarrow n=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۲۴۰۹}}{۴}=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۴۱۸}}{۴}\approx\frac{-۳\pm۴۹}{۴} \quad , \quad n>۰ \Rightarrow n\approx ۱۱/۵$$

اما n طبیعی است، پس اگر $n=۱۱$ مجموع به ۳۰۰ نمی‌رسد، اما اگر $n\geq۱۲$ آن‌گاه مجموع از ۳۰۰ بیش‌تر می‌شود، در نتیجه؛ حداقل n باید ۱۲ باشد.

مثال ۲. در یک دنباله‌ی حسابی که ۳۵ جمله دارد، جمله‌ی وسط ۱۲۰ است. مجموع این ۳۵ جمله چه‌قدر است؟

پاسخ. بنا بر ویژگی دنباله‌ی حسابی وقتی تعداد جمله‌ها فرد باشد، دنباله دارای جمله‌ی وسط است که جمله $\frac{n+۱}{۲}$ است. چرا؟ و چون مجموع جمله‌ها از دو طرف برابرند، پس: $۲a_{\frac{n+۱}{۲}}=a+\ell$ در نتیجه: $S_{۳۵}=۳۵\times۱۲۰=۴۲۰۰$.

با استفاده از فرمول مجموع n جمله‌ی اول در دنباله‌ی حسابی مجموع‌های مهمی را می‌توان محاسبه کرد.

۱. مجموع n عدد طبیعی متوالی شروع از ۱ برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، چرا؟

۲. مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی شروع از ۱ همواره مربع کامل است. $۱+۳+۵+...+۲n-۱=\frac{n(۱+۲n-۱)}{۲}=n^۲$

۳. مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی شروع از ۲ برابر $n(n+۱)$ است. $۲+۴+۶+...+۲n=\frac{n(۲n+۲)}{۲}=n(n+۱)$

فعالیت. نشان دهید در هر دنباله‌ی حسابی مجموع n جمله‌ی اول به‌صورت $S_n = pn^2 + qn$ است که p و q اعداد ثابتی هستند. به عکس نشان دهید که اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله به‌صورت $S_n = pn^2 + qn$ باشد، آن‌گاه این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است. مثال عددی $S_n = 4n^2 + 5n$ را درنظر بگیرید. ابتدا a_1 جمله‌ی اول را پیدا کنید. $a_2 = S_2 - S_1$ و سپس قدرنسبت را محاسبه کنید. چرا $a_n = S_n - S_{n-1}$؟

مجموع جمله‌ها در دنباله‌ی هندسی

فرض کنید a جمله‌ی اول و q قدرنسبت یک دنباله‌ی هندسی باشد. اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی باشد، آن‌گاه؛

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \qquad (1)$$

اکنون طرفین این رابطه را در q ضرب کنید. $(q \neq 0)$

$$qS_n = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n \qquad (2)$$

رابطه‌ی (۱) را از رابطه‌ی (۲) کم می‌کنیم؛

$$qS_n - S_n = aq^n - a \Rightarrow S_n(q-1) = a(q^n - 1)$$

اگر $q \neq 1$ آن‌گاه:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

مثال ۳. حداقل مقدار n چه‌قدر باشد تا مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $\dots, \frac{9}{2}, 3, 2$ از ۴۰ بزرگ‌تر باشد.

پاسخ. در این دنباله‌ی هندسی $a_1 = 2$ و $q = \frac{3}{2}$ پس $S_n = 2\frac{(\frac{3}{2})^n - 1}{\frac{3}{2} - 1}$ یا $S_n = 4\left((\frac{3}{2})^n - 1\right)$ پس باید $4\left((\frac{3}{2})^n - 1\right) > 40$

در نتیجه $(\frac{3}{2})^n - 1 > 10$ پس باید $(\frac{3}{2})^n > 11$.

می‌توانیم از لگاریتم استفاده کنیم اما بدون استفاده از آن نیز امکان دارد، زیرا اعداد کوچک‌اند.

$$(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16} \approx 5 \quad , \quad (\frac{3}{2})^5 = \frac{243}{32} \approx 7/6 \quad , \quad (\frac{3}{2})^6 = \frac{243 \times 3}{64} \approx 11/39 \Rightarrow n \geq 6$$

در نتیجه حداقل n برابر ۶ است.

مثال ۴. در یک دنباله‌ی هندسی $S_{10} = 3069$ و $S_5 = 93$ در این صورت S_7 را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$S_{10} = a\frac{q^{10} - 1}{q - 1} \quad , \quad S_5 = a\frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{q^{10} - 1}{q^5 - 1} = \frac{(q^5 - 1)(q^5 + 1)}{q^5 - 1} = q^5 + 1$$

بنابراین؛

$$\frac{3069}{93} = q^5 + 1 \Rightarrow q^5 = \frac{2976}{93} = 32 \Rightarrow q = 2 \quad , \quad S_5 = a\frac{2^5 - 1}{2 - 1} \Rightarrow 93 = a(31) \Rightarrow a = 3$$

در نتیجه؛

$$S_7 = 3\frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 3(128 - 1) = 3 \times 127 = 381.$$

فعالیت. مشابه مثال قبلی نشان دهید در هر دنباله‌ی هندسی $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$ و به‌طور کلی $\frac{S_n}{S_m} = \frac{1 - q^n}{1 - q^m}$. $(q \neq 1)$

دنباله هندسی و تعمیم چند اتحاد

در سال‌های قبل با اتحادهای $a^2-1=(a-1)(a+1)$، $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ آشنا شده‌اید. آیا می‌توانید مشابه آن را برای a^4-1 نیز بنویسید.

$$a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)=(a-1)(a+1)(a^2+1)=(a-1)(a^3+a^2+1)$$

آیا می‌توانید رابطه‌ای بین جمله‌های دوم این اتحادها با جمله‌های یک دنباله هندسی برقرار کنید؟ قدر نسبت چه عددی است؟

اکنون اگر $a\neq 0$ عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آیا عبارت $S=1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$ مجموع n جمله یک دنباله هندسی است؟ قدر نسبت چقدر است؟

این مجموع n جمله یک دنباله هندسی با قدر نسبت a است بنابراین،

اگر $a\neq 1$،

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=S=1\times\frac{1-a^n}{1-a}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

با ضرب دو طرف در $a-1$ چون $a\neq 1$ داریم،

$$\boxed{a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)}$$

که این تعمیم یا حالت کلی اتحادهای بالا است.

اگر $a=1$ آن‌گاه $S=n$ که در این اتحاد کاربردی ندارد زیرا به ازای $a=1$ دو طرف صفر می‌شوند.

اگر n عددی فرد باشد با تبدیل a به $-a$ و ضرب دو طرف در یک منفی نتیجه می‌گیریم،

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots+a^2-a+1)$$

که در حالت $n=3$ با آن کاملاً آشنایی دارید.

$$a^3+1=(a+1)(a^2+a+1)$$

اکنون می‌توانید همین روش را برای x^n-a^n به کار ببرید، یا آن را به‌صورت $a^n((\frac{x}{a})^n-1)$ نوشته از قبلی استفاده کنید.

به‌طور مستقیم، $S=x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$، مجموع n جمله یک دنباله هندسی با قدر نسبت $x^{-1}a$ است چرا؟ اگر $x\neq a$ داریم؛

$$S=x^{n-1}\cdot\frac{1-(\frac{a}{x})^n}{1-\frac{a}{x}}=x^{n-1}\cdot\frac{(x^n-a^n)x}{x^n(x-a)}=\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

با ضرب دو طرف در $x-a$ اتحاد مورد نظر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})}$$

در این حالت نیز اگر n فرد باشد با تبدیل a به $-a$ داریم؛

$$x^n+a^n=(x-a)(x^{n-1}-x^{n-2}a+\cdots+-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

فعالیت. به کمک اتحادهای فوق نشان دهید. $25^{100}-16^{100}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. همچنین نشان دهید،

$$\frac{(x^5-4x^3+3)(x^3+1)}{x^6-1}=\frac{x^4-x^3-3x^2-5x-3}{x^2+x+1}$$

عبارت $x^5-4x^3+3=(x^5-1)-4(x^3-1)$ را در نظر داشته باشید.

سری هندسی نامتناهی

هر عبارت به‌صورت زیر یک سری نامتناهی نامیده می‌شود. $a+aq+aq^{۲}+...$

نقطه‌ها نشان‌دهنده‌ی این هستند که جمع‌ها به‌طور نامتناهی ادامه دارند، بدون آن‌که پایانی داشته باشند. به‌طور مثال اگر سری متناهی $\frac{۱}{۲^{۱}}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{۳}}+...+\frac{۱}{۲^{n}}$ را درنظر بگیریم، فرض کنیم $S_{۱}=\frac{۱}{۲}$، $S_{۲}=\frac{۱}{۲^{۱}}+\frac{۱}{۲^{۲}}$ ، $S_{۳}=\frac{۱}{۲^{۱}}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{۳}}$ در حالت کلی؛

$$S_n=\frac{۱}{۲^{۱}}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{۳}}+...+\frac{۱}{۲^{n}}$$

اگر بخواهیم S_n را به ازای هر n عدد طبیعی محاسبه کنیم باید همان فرمول مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی متناهی را به‌کار ببریم. بنابراین؛

$$S_n=\frac{۱}{۲}\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{n}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-(\frac{۱}{۲})^{n}$$

اکنون اگر n بزرگ و بزرگ‌تر شود به طوری‌که از هر عدد بزرگی بزرگ‌تر باشد $(\frac{۱}{۲})^{n}$ به صفر نزدیک می‌شود و در نتیجه S_n به یک نزدیک می‌شود. در نتیجه:

$$\frac{۱}{۲^{۱}}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{۳}}+...+\frac{۱}{۲^{n}}+...=۱$$

پس عدد ۱ برابر حاصل‌جمع نامتناهی جمله از این دنباله‌ی هندسی است. اکنون اگر روش فوق را برای مجموع نامتناهی جمله‌ی دنباله‌ی هندسی وقتی $|q|<۱$ به‌کار ببریم ابتدا؛ $a+aq+aq^{۲}+...+aq^{n-۱}=a\left(\frac{۱-q^{n}}{۱-q}\right)$ سپس چون $|q|<۱$ پس وقتی n از هر عدد بزرگی بزرگ‌تر شود، آن‌گاه q^{n} به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و در نتیجه مجموع نامتناهی جمله‌ی این دنباله به $a\left(\frac{۱-۰}{۱-q}\right)$ نزدیک می‌شود. بنابراین اگر S مجموع این نامتناهی جمله باشد، آن‌گاه؛

$$S=a+ar+ar^{۲}+...=\frac{a}{۱-q}$$

نتیجه. فرض کنیم $۰<|q|<۱$. در این صورت S مجموع نامتناهی جمله‌ی دنباله‌ی هندسی $a+aq+aq^{۲}+...$ برابر است با:

$$S=\frac{a}{۱-q}$$

مثال ۵. مجموع نامتناهی سری هندسی $۱+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۹}+...$ را پیدا کنید.

پاسخ. $a=۱$ و $q=\frac{۲}{۳}$ در نتیجه؛ $S=\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}}=۳$.

مثال ۶. عدد اعشاری $۰/۲۳۵۳۵۳۵۳۵...$ یک عدد گویای متناوب نامیده می‌شود. عدد ۳۵ به‌طور نامتناهی تکرار می‌شود و آن‌را دوره‌ی گردش آن می‌نامند. برای سادگی این عدد را به‌صورت $۰/۲\overline{۳۵}$ نیز نشان می‌دهند. به کمک سری هندسی کسر گویای معادل آن را محاسبه کنید.

پاسخ. فرض کنیم $S=۰/۲\overline{۳۵}$ در نتیجه؛

$$S=۰/۲۳۵۳۵۳۵...=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰۰۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰۰۰۰۰۰}+...=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳۵}{۱۰^{۳}}+\frac{۳۵}{۱۰^{۵}}+\frac{۳۵}{۱۰^{۷}}+...=\frac{۲}{۱۰}+\frac{\frac{۳۵}{۱۰۰۰}}{۱-\frac{۱}{۱۰۰}}=\frac{۲۳۳}{۹۹۰}$$

اگر $\frac{۲}{۱۰}$ را کنار بگذاریم بقیه یک سری هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول $a=\frac{۳۵}{۱۰۰۰}$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{۱۰۰}$ است.

فعالیت. مانند روش فوق اگر $S=0/\overline{abc}=0/abcabc...$ یک عدد اعشاری متناوب باشد که a، b و c رقم و abc دوره‌ی گردش آن است، نشان دهید؛

$$S=0/\overline{abc}=\frac{abc}{999}$$

و اگر $S=0/xy\overline{abc}$ که این‌بار xy ثابت است، اما abc دوره‌ی گردش است، آن‌گاه؛

$$S=\frac{xyabc-xy}{99900}$$

چگونه آن‌را به زبان غیرریاضی بیان می‌کنید؟

مثال ۷. توپی را از ارتفاع ۶ متری رها می‌کنیم، اگر هر بار که توپ به زمین می‌خورد $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی بالا برود، تعیین کنید توپ تا زمان ایستادن چه مسافتی را طی می‌کند؟

پاسخ. بار اول از ۶ متری رها شده اما وقتی به زمین برخورد می‌کند تا ارتفاع $2=\frac{1}{3}\times 6$ متر بالا می‌رود و سپس به زمین برخورد می‌کند، پس ۴ متر طی می‌کند. بار دوم تا ارتفاع $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times 2$ بالا می‌رود و سپس به زمین برخورد می‌کند، سپس بار دوم $\frac{4}{3}$ متر طی می‌کند. بار سوم تا ارتفاع $\frac{2}{3^2}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$ بالا می‌رود و سپس به زمین برخورد می‌کند، سپس بار سوم مسافتی به اندازه‌ی $\frac{4}{3^2}$ طی می‌کند. اکنون می‌توانیم دنباله مسافت‌های طی شده را به‌صورت زیر بنویسیم؛

$$6\,,\,4\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{4}{3^2}\,,\,\frac{4}{3^3}\,,\,\dots$$

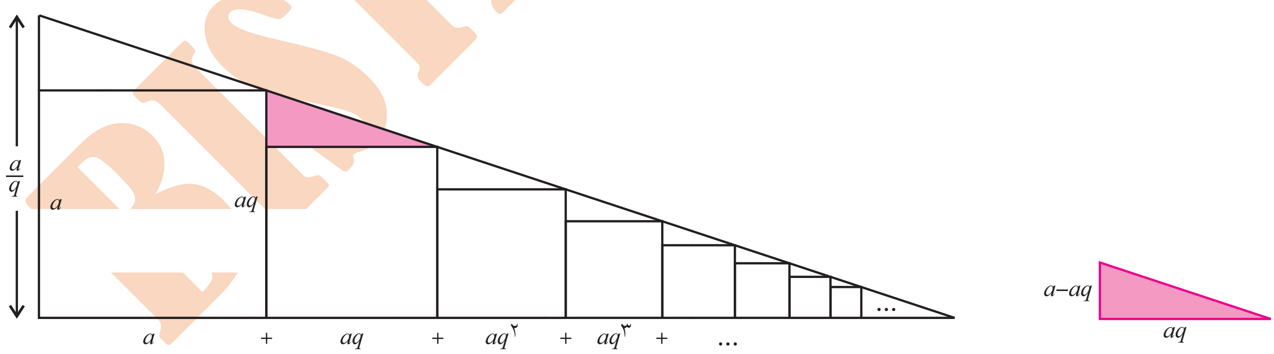
که مجموع آن‌ها برابر است با؛

$$S=6+4+\frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+\dots=6+\frac{4}{1-\frac{1}{3}}=6+\frac{4}{\frac{2}{3}}=6+6=12\,.$$

فعالیت. با استفاده از شکل زیر نشان دهید؛

$$a+aq+aq^2+\dots=\frac{a}{1-q}$$

$$\frac{a-aq}{aq}=\frac{\frac{a}{q}}{a+aq+aq^2+aq^3+\dots}\Rightarrow a+aq+aq^2+aq^3+\dots=\frac{a}{1-q}$$



۱. تمـــــرین

۱. در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله‌ی اول ۳- و جمله‌ی هفتم برابر ۴۹ است. چه جمله‌ای از این دنباله برابر ۲۸۹ است؟

۲. مجموع اعداد طبیعی دو رقمی را پیدا کنید که بر ۳ بخش‌پذیراند.

۳. مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی، $13, \frac{33}{2}, 20, ...$ برابر مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی، $3, 7, 11, ...$ است. n را محاسبه کنید.

۴. $\{a_n\}$ یک دنباله حسابی و $\{b_n\}$ یک دنباله هندسی است به‌طوری که چهار جمله اول دنباله $\{a_n + b_n\}$ به ترتیب عبارت‌اند از ۰، ۱، ۰، ۰ نشان دهید؛ $a_n = 3n - 4$ و $b_n = (-2)^{n-1}$، سپس، $a_{10} + b_{10}$ را محاسبه کنید.

۵. یک توپ را از یک سراشیبی رها می‌کنیم. این توپ در ثانیه‌های متوالی مسافت‌های ۴ سانتی‌متر، ۱۲ سانتی‌متر، ۲۰ سانتی‌متر را به همین ترتیب طی می‌کند. پس از چند ثانیه مجموع مسافت‌های طی شده برابر ۳۶ متر است؟

۶. نسبت مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی دیگر برابر $\frac{7n+1}{4n+27}$ است. نسبت جمله‌های یازده‌ام آن‌ها را پیدا کنید.

۷. مجموع ۲۰ جمله از دنباله $\frac{1}{1-\sqrt{a}}, \frac{1}{1-a}, \frac{1}{1+\sqrt{a}}, ...$ را پیدا کنید $0 < a \neq 1$.

۸. در یک دنباله‌ی حسابی $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ ثابت کنید $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ و اگر $S_m = S_n$ ثابت کنید $S_{m+n} = 0$.

۹. یک دنباله‌ی حسابی ۳۰ جمله دارد. اگر مجموع جمله‌های با شماره‌ی فرد ۶۴۵ و مجموع جمله‌های بـا شـماره‌ی زوج ۶۹۰ باشـد، قدرنسبت را محاسبه کنید.

۱۰. اگر در یک دنباله‌ی حسابی قدرنسبت دو برابر جمله‌ی اول باشد، ثابت کنید $\frac{S_n}{S_m} = \frac{n^2}{m^2}$.

۱۱. در یک دنباله‌ی هندسی $S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$، جمله‌ی n ام و قدرنسبت را پیدا کنید.

۱۲. فرض کنید a_n یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q \neq 1$ باشد و $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ و $R_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$ ثابت کنید $\frac{S_n}{R_n} = a_1 a_n$.

۱۳. ثابت کنید در هر دنباله‌ی هندسی $S_{n+1} = qS_n + a_1$

۱۴. عبارت $A = \frac{(x^8-1)(x^5+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x^6-1)(x^2+1)}$ را ساده کنید.

۱۵. به کمک اتحادها خارج قسمت $x^{24} - 1$ بر $x^3 + 1$ و $x^4 - 1$ را بنویسید.

۱۶. مجموع n جمله از دنباله‌ی زیر را پیدا کنید: $9, 99, 999, ...$

$$S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99\cdots9}_{\text{تا } n} = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^n - 1$$

اکنون فرمول مجموع دنباله‌ی هندسی را به‌کار ببرید.

سپس به کمک آن حاصل $S_n = 7 + 77 + ... + \underbrace{77...7}_{n}$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: $777 = 7(111) = \frac{7}{9}(999)$. آن را برای همه جمله‌ها نوشته و از قسمت قبلی استفاده کنید.

۱۷. در یک دنباله‌ی هندسی نامتناهی که $۰<|q|<۱$، مجموع نامتناهی جمله برابر ۴ و مجموع مکعب‌های این نامتناهی جمله ۱۹۲ است. قدرنسبت و جمله‌ی اول را مشخص کنید.

۱۸. در سری هندسی $S=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+...$ به ازای چه مقدار n تفاضل S_n مجموع n جمله‌ی اول از S کم‌تر از ۰/۰۰۰۰۱ است؟

۱۹. نشان دهید؛

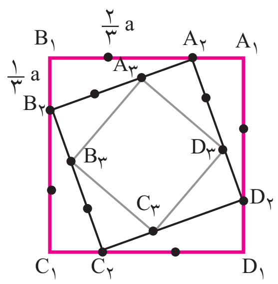
$$۰/\overline{۵۱}=۰/۵۱۵۱۵۱...=\frac{۱۷}{۳۳}$$

$$۰/۴\overline{۷۲۶}=۰/۴۷۲۶۷۲۶۷۲۶...=\frac{۷۸۷}{۱۶۶۵}\ .$$

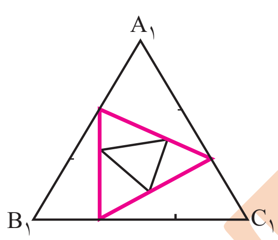
۲۰. در یک دنباله‌ی هندسی نامتناهی که $۰<q<۱$ اگر هر جمله برابر مجموع نامتناهی جمله بعد از آن باشد، نشان دهید $q=\frac{۱}{۲}$.

۲۱. جمله‌ی عمومی یک دنباله $a_n=\frac{۱}{(۳+(-۱)^n)^n}$ می‌باشد. مجموع نامتناهی جمله‌ی این دنباله را محاسبه کنید. سعی کنید ابتدا چند جمله‌ی اولیه را نوشته و دنباله را مشخص کنید.

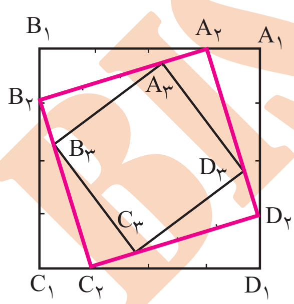
۲۲. مربع با ضلع به اندازه a مفروض است. هر ضلع را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مطابق شکل نقاط تقسیم را به هم وصل می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم دنباله‌ای از مربع‌های q_1، q_2، q_3، ... را داریم دنباله محیط‌ها و مساحت‌های این مثلث‌ها را بنویسید. و سپس مجموع‌های آن‌ها را محاسبه کنید.



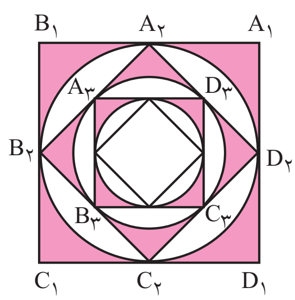
۲۳. مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ با اضلاع به اندازه a مفروض است. هر سه ضلع مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را مطابق شکل به هم وصل می‌کنیم، دنباله‌ای از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع پدید می‌اید، دنباله‌ی اندازه‌های اضلاع، محیط‌ها، ارتفاع‌ها و مساحت‌ها را بنویسید، و مجموع هر یک را محاسبه کنید.

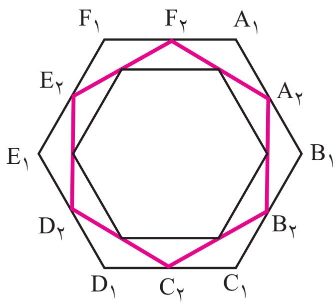


۲۴. اندازه هر ضلع مربع a است هر ضلع را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده و مطابق شکل نقاطی از تقسیم را به هم وصل می‌کنیم و برای مربع‌های پدید آمده بعدی نیز این عمل را ادامه می‌دهیم، دنباله‌ی اندازه‌های اضلاع مربع‌ها همچنین دنباله‌ی مساحت‌ها را بنویسید، و سپس مجموع مساحت‌های مربع‌های پدید آمده را محاسبه کنید.

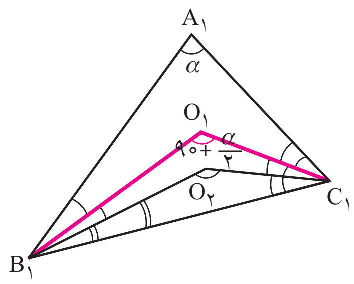


۲۵. در مربع $A_1B_1C_1D_1$، اندازه هر ضلع a است دایره C در وسط‌های اضلاع مربع بر آن مماس است سپس در مربع وسط‌های اضلاع را متوالیاًبه هم وصل می‌کنیم تا مربع $A_2B_2C_2D_2$ پدید آید دوباره دایره محاطی این مربع را رسم کرده و اعمال قبلی را مرتباًتکرار می‌کنیم مطابق شکل در هر عمل ناحیه بین مربع و دایره محاطی آن را سایه می‌زنیم دنباله‌ی اندازه مساحت‌های سایه‌زده در هر مرحله را بنویسید، و مجموع مساحت‌های سایه زده را محاسبه کنید.





۲۶. شش ضلعی منتظم $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را در نظر گرفته وسط‌های اضلاع آن را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا شش‌ضلعی منتظم $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ پدید آید سپس این عمل را برای وسط‌های اضلاع این شش ضلعی انجام می‌دهیم و به همین ترتیب ادامه‌ی می‌دهیم اگر اندازه ضلع شش ضلعی اولیه a باشد دنباله‌ای را بنویسید که جمله‌های آن مساحت‌های شش ضلعی‌های متوالی است که پدید می‌آیند.



۲۷. مثلث $A_1B_1C_1$ با زاویه $\hat{A}_1$ به اندازه α مفروض است O_1B_1 و O_1C_1 دو نیمساز داخلی زوایای B_1 و C_1 هستند واضح است که $B_1\hat{O}_1C_1=\hat{O}_1=90+\frac{\alpha}{2}$ زیرا:

$$B_1\hat{O}_1C_1=180-\left(\frac{\hat{B}_1+\hat{C}_1}{2}\right)=180-\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)=90+\frac{\alpha}{2}$$

اکنون در مثلث $O_1B_1C_1$ دوباره نیمسازهای داخلی دو زاویه B_1 و C_1 را رسم می‌کنیم تا O_2 به‌دست می‌آید و این عمل را به همین‌ترتیب ادامه می‌دهیم آیا می‌توانید دنباله اندازه زاویه‌های O_1، O_2، O_3، .... را بنویسید؟ آیا می‌توانید تعیین کنید دنباله‌ی O_n به چه عددی نزدیک می‌شود؟

معادله

یادآوری و تکمیل معادله درجه دوم

در سال قبل تا حدودی با معادله درجه دوم و تعیین علامت آن آشنا شده‌اید در این قسمت مروری کلی بر این مطالب داریم.

هر معادله به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a\neq 0$ یک معادله چند جمله‌ای درجه دوم نامیده می‌شود که a,b,c اعداد حقیقی‌اند.

اگر $b^2-4ac\geq 0$ معادله دارای جواب است و جواب‌های آن از رابطه $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ محاسبه می‌شوند. اگر $b^2-4ac>0$ دو جواب متمایز و اگر $b^2-4ac=0$ دو جواب مساوی‌اند و گوییم جواب مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ دارد. $\Delta=b^2-4ac$ مبین یا دلتای معادله نامیده می‌شود اگر $b^2-4ac<0$ معادله دارای جواب حقیقی نمی‌باشد.

اگر $b=2b'$ یعنی b زوج باشد جواب‌های معادله از رابطه $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ به‌دست می‌آیند که $\Delta'=b'^2-ac$.

مثال ۸. **به ازای چه مقادیر k معادله $x^2+2(k+2)x+9k=0$**

۱) جواب مضاعف دارد. ۲) دو جواب متمایز دارد

پاسخ. ۱) باید $b^2-4ac=0$ یا $b'^2-ac=0$ در نتیجه $(k+2)^2-9k=0$ یا $k^2-5k+4=0$ که از آن $k=1$ یا $k=4$ به‌دست می‌آید.

۲) $b'^2-ac>0\Rightarrow k^2-5k+4>0\Rightarrow k>4$ یا $k<1$.

تذکر. **هرگاه در معادله $ax^2+bx+c=0$، a و b و c اعدادی گویا باشند به شرطی که $\Delta=b^2-4ac$ یا $\Delta'=b'^2-ac$ مربع یک عدد گویا باشد جواب‌های معادله گویا می‌باشند.**

مثال ۹. **اگر p، q و r اعدادی گویا باشند نشان دهید معادله $x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$ دو جواب گویا دارد.**

پاسخ.

$$b'^2-ac=p^2-(p^2-q^2+2qr-r^2)=q^2+r^2-2qr=(q-r)^2$$

Δ' مربع کامل یک عدد گویا است پس جواب‌ها گویا هستند.

$$x=\frac{p\pm(q-r)}{1}=p\pm(q-r).$$

روابط بین جواب‌ها در معادله درجه دوم

اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند؛

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اگر این دو جواب را با هم جمع کنیم، و حاصل‌جمع را به S نشان دهیم، داریم؛ $\mathbf{S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$

به همین ترتیب اگر این دو جواب را در هم ضرب کنیم، داریم؛ $\mathbf{P=x_1x_2=\frac{c}{a}}$

P را حاصل‌ضرب دو جواب می‌نامیم، و بالاخره اگر این دو جواب را از هم کم کرده و قدر مطلق آن را D بنامیم،

$$\mathbf{D=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}.$$

مثال ۱۰. در معادله $x^2 - px + q = 0$، بین p و q چه رابطه‌ای برقرار باشد تا جواب‌های معادله دو عدد صحیح متوالی باشند.

پاسخ. اگر x_1 و x_2 دو جواب این معادله باشند و $x_1 > x_2$ آن‌گاه $x_1 - x_2 = 1$، در نتیجه $\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{1} = 1$ یا $p^2 - 4q = 1$

مثال ۱۱. اگر $x = -2$ یک جواب معادله $2x^2 + (k+3)x + 3k = 0$ باشد جواب دیگر معادله را پیدا کنید.

پاسخ. $x = -2$ جواب معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$8 - 2k - 6 + 3k = 0 \Rightarrow k = -2 \ , \ x_1 x_2 = \frac{3k}{2} \Rightarrow -2x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}.$$

بحث در وجود و علامت جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $(a \neq 0)$

فرض کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادله فوق باشند، چنین داریم؛

- ۱) $\Delta > 0$ معادله دو ریشه دارد
  - $\frac{c}{a} > 0$ دو ریشه هم علامت‌اند
    - $-\frac{b}{a} > 0$ دو ریشه مثبت
    - $-\frac{b}{a} < 0$ دو ریشه منفی
  - $\frac{c}{a} < 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند، $x_1 < 0 < x_2$
    - $-\frac{b}{a} > 0$ ، $|x_2| > |x_1|$
    - $-\frac{b}{a} < 0$ ، $|x_1| > |x_2|$
- ۲) $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- ۳) $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد

نتایج

۱. اگر $c = 0$، یک جواب معادله صفر و جواب دیگر برابر $-\frac{b}{a}$ است.

۲. اگر $b = 0$ با شرط مختلف‌العلامت بودن a و c معادله دو جواب قرینه دارد.

۳. اگر $a + b + c = 0$ یک جواب معادله $x_1 = 1$ و جواب دیگر $x_2 = \frac{c}{a}$ و به عکس

۴. اگر $b = a + c$، یک جواب معادله $x_1 = -1$ و جواب دیگر $x_2 = \frac{-c}{a}$ است، و به عکس.

۵. هرگاه در معادله، $ax^2 + bx + c = 0$، a و c مختلف‌العلامت باشند، معادله همواره دو جواب مختلف‌العلامت دارد و نیازی به تشکیل Δ نمی‌باشد، زیرا با این شرط همواره، $\Delta > 0$. همچنین باید در نظر داشته باشیم که اگر در معادله فوق a و c مختلف‌العلامت نباشند دلیل برنداشتن جواب نیست در این حالت Δ را تشکیل می‌دهیم.

۶. هرگاه در معادله $ax^2 + bx + c = 0$، $a = c$ یعنی، $\frac{c}{a} = 1$ و معادله دو جواب حقیقی داشته باشد آن‌گاه، دو جواب معادله عکس یکدیگرند.

مثال ۱۲. به ازای چه مقادیر m معادله $(m-1)x^2 - (m+2)x + m^2 - 3m = 0$ دو جواب مختلف‌العلامت دارد.

پاسخ. باید $\frac{c}{a} < 0$ یعنی $(m-1)(m^2 - 3m) < 0$ یا $m(m-1)(m-3) < 0$ که با تعیین علامت آن حدود m مشخص می‌شود.

m		0		1		3	
$\frac{c}{a}$	−	0	+	0	−	0	+

$m < 0$ یا $1 < m < 3$.

اکنون که با معادله درجه دوم و بحث در علامت و تعداد جواب‌ها آشنا شدید مطالب دیگری را در مورد جواب‌ها بیان می‌کنیم و سپس دوباره به بحث جواب‌های معادلات و تقاطع دو نمودار برمی‌گردیم.

کاربردهای روابط بین جواب‌ها در معادله درجه دوم

۱. تشکیل معادله درجه دومی که دو جواب آن معلوم باشند.

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $a\neq 0$ اگر طرفین را بر a تقسیم کنیم چنین داریم؛ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

اکنون اگر معادله دارای دو جواب α و β باشد، $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$، بنابراین از $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ داریم، $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ که از آن داریم؛ $x^2-Sx+P=0$ (۱) یا $(x-\alpha)(x-\beta)=0$، (۲)

در نتیجه مقادیر S و P را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم آن معادله مشخص می‌شود. یا هر جواب را در معادله (۲) قرار داده و ساده می‌کنیم معادله مورد نظر به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳. معادله درجه دومی دارای دو جواب $\sqrt{7}+\sqrt{7-\sqrt{2}}$ و $\sqrt{7}-\sqrt{7-\sqrt{2}}$ می‌باشد معادله را با ضرایب آن مشخص کنید.

پاسخ. $P=(\sqrt{7}+\sqrt{7-\sqrt{2}})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{7-\sqrt{2}})=7-7+\sqrt{2}=\sqrt{2}$ و $S=x_1+x_2=2\sqrt{7}$ در نتیجه $x^2-2\sqrt{7}x+\sqrt{2}=0$ معادله مطلوب است.

۲. تعیین دو عدد که حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع آن دو معلوم‌اند.

اگر آن دو عدد را x_1 و x_2 بنامیم چون $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ معلوم‌اند، معادله درجه دوم را تشکیل می‌دهیم از حل آن، دو عدد مشخص می‌شوند.

مثال ۱۴. حاصل‌ضرب دو عدد ۱− و حاصل‌جمع آن دو ۴ است، آن‌ها را پیدا کنید.

پاسخ. آن دو عدد جواب‌های معادله $x^2-4x-1=0$ می‌باشند. پس $x_1=2+\sqrt{5}$, $x_2=2-\sqrt{5}$.

۳. محاسبه عبارت‌های متقارن بر حسب جواب‌های معادله درجه دوم بدون حل معادله

عبارتی را نسبت به دو یا چند متغیر متقارن گوییم هرگاه با تبدیل دوری متغیرها به یکدیگر عبارت تغییر نکند مثلاً اگر عبارت شامل دو متغیر x و y باشد با تبدیل x به y و تبدیل y به x عبارت برابر خودش شود. هر عبارت شامل دو متغیر x و y را به‌صورت $f(x,y)$ نشان می‌دهند بنابراین؛ $f(x,y)=xy^2+yx^2-x^3y^3$ نسبت به x و y متقارن است زیرا $f(y,x)=f(x,y)$ اما $f(x,y)=xy^2-yx^2-x^3y^3$ نسبت به x و y متقارن نمی‌باشد زیرا $f(y,x)\neq f(x,y)$. همچنین عبارت $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ نسبت به x، y و z متقارن است زیرا $f(y,z,x)=f(z,x,y)=f(x,y,z)$.

در هر عبارت متقارن نسبت به دو یا چند متغیر عبارت‌های متقارن ساده‌تری وجود دارند که می‌توان هر عبارت متقارن را بر حسب آن‌ها نوشت، مثلاً اگر عبارت‌های متقارن را بر حسب دو متغیر x و y را در نظر بگیریم همه این عبارت‌ها را می‌توانیم بر حسب $x+y$ و xy بنویسیم.

بنابراین، $S=x+y$ و $P=xy$ را عبارت‌های متقارن اصلی بر حسب دو متغیر x و y می‌نامند. مشخص است که عبارت‌های متقارن اصلی نسبت به دو متغیر را در معادله درجه دوم به S و P نشان می‌دهیم یعنی $x_1+x_2=S$ و $x_1x_2=P$، در نتیجه هر عبارتی را که نسبت به جواب‌های معادله درجه دوم متقارن باشد می‌توان بر حسب S و P بیان کرد. عبارت‌های متقارن مهمی را که بر حسب جواب‌های معادله درجه دوم متقارن می‌باشند، بر حسب S و P محاسبه شده‌اند.

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=S(S^2-3P)=S^3-3PS$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=(S^2-2P)^2-2P^2 \quad , \quad \frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{S^3-3PS}{P^3}$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$$

مشخص است که x_1-x_2 متقارن نیست اما $D=|x_1-x_2|$ متقارن است و برای محاسبه آن بر حسب S و P طرفین را به توان دو می‌رسانیم.

$$D=|x_1-x_2| \Rightarrow D^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=S^2-4P \quad , \quad D\geq 0$$

در نتیجه $D=\sqrt{S^2-4P}$.

هم‌چنین عبارت $x_1^4-x_2^4$ نیز متقارن نیست اما عبارت $\frac{x_1^4-x_2^4}{x_1-x_2}$ با شرط $x_1\neq x_2$ متقارن است.

$$\frac{x_1^4-x_2^4}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}{x_1-x_2}=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)=S(S^2-2P)=S^3-2PS\ .$$

به‌طور کلی اگر در معادله درجه دوم، ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند تعریف می‌کنیم، $S_k=x_1^k+x_2^k$، مانند $S_2=x_1^2+x_2^2$ یا ...

مثال ۱۵. **در معادله $x^2+5x+1=0$ اگر α و β جواب‌های معادله باشند حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید. $(\alpha>\beta)$**

$$A=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad , \quad B=\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha}} \quad , \quad C=7\alpha^3+3\beta^3$$

پاسخ. واضح است که جواب‌های معادله هم علامت‌اند پس عبارت A با معنی است.

$$A^2=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2=\frac{S^2-2P}{P}+2=\frac{25-2}{1}+2=25\Rightarrow A=5$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt[3]{\beta}}+\frac{\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[3]{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt[3]{P}}=\frac{-5}{\sqrt[3]{1}}=-5$$

$$C=7\alpha^3+3\beta^3=5(\alpha^3+\beta^3)+2(\alpha^3-\beta^3)$$

$$=5(S^3-3PS)+2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=5(S^3-3PS)+\frac{2\sqrt{\Delta}}{|a|}(S^2-P)=550+48\sqrt{21}\ .$$

مثال ۱۶. **اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2-Sx+P=0$ باشند $x_1>x_2$، حاصل عبارت $mx_1^2+nx_2^2$ را پیدا کنید.**
$(S^2-4P\geq 0)$

پاسخ.

$$mx_1^2+nx_2^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)(x_1^2+x_2^2)+\left(\frac{m-n}{2}\right)(x_1^2-x_2^2)=\frac{1}{2}(m+n)(S^2-2P)+\frac{1}{2}(m-n)S\sqrt{S^2-4P}\ .$$

فعالیت. فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند با توجه به رابطه فوق در حالتی که $x_1 > x_2$ حاصل $\frac{17}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2$ را محاسبه کنید. آیا می‌توانید حاصل $7x_1^3 + 5x_2^3$ را در این معادله محاسبه کنید؟

اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ باشند حاصل $B = \frac{(a^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^3 + \beta^2 + \beta + 1)}{(\alpha^2 + 7\alpha + 2)(\beta^2 + 7\beta + 2)}$ را پیدا کنید.

چون α و β جواب‌های معادله‌اند پس، $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ و $\beta^2 + 2\beta - 1 = 0$. از این دو رابطه به فرم‌های مختلف استفاده می‌کنیم مثلاً $\alpha^2 + \alpha = 1 - \alpha$ و مشابه آن برای β نوشته می‌شود. همچنین $\alpha^2 = 1 - 2\alpha$ یا $\beta^2 = 1 - 2\beta$. این مقادیر را مرتبًادر رابطه به کار ببرید تا به ساده‌ترین صورت تبدیل شود سپس حاصل را محاسبه کنید برابر $-\frac{8}{7}$ می‌شود.

برای نمونه $\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha(\alpha^2 + \alpha) = \alpha(1 - \alpha) = \alpha - \alpha^2 = \alpha - 1 + 2\alpha = 3\alpha - 1$.

معادله درجه دومی که بین جواب‌های آن رابطه‌های خاصی برقرار است

می‌توانیم با استفاده از رابطه‌های بین جواب‌ها در معادله درجه دوم شرایطی را پیدا کنیم که بین دو جواب معادله درجه دوم رابطه خاصی برقرار باشد مثلاًیک جواب مجذور یا مکعب جواب دیگر باشد یا یک جواب k برابر جواب دیگر باشد یا یک جواب k واحد از ریشه دیگر بیش‌تر یا کم‌تر باشد.

اساس حل مسأله‌های فوق بر این است که روابط بین جواب‌ها در معادله را نوشته و رابطه داده شده را نیز بنویسیم و با استفاده از این سه رابطه شرایط مسأله را تعیین کنیم.

مثال ۱۷. به ازای چه مقدار m یک جواب معادله $x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0$ دو برابر جواب دیگر است. سپس جواب‌ها را تعیین کنید.

پاسخ. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله باشند، از طرف دیگر $x_1 = 2x_2$ و $x_1 + x_2 = m + 2$ و $x_1x_2 = m + 4$ اکنون با استفاده از رابطه $x_1 = 2x_2$ این دو رابطه چنین‌اند؛

$$3x_2 = m + 2 \;,\; 2x_2^2 = m + 4 \Rightarrow 2\left(\frac{m+2}{3}\right)^2 = m + 4 \Rightarrow 2m^2 - m - 28 = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ یا } m = -\frac{7}{2}$$

$$m = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \;,\; x = 4 \text{ و } m = -\frac{7}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -1 \;,\; x = -\frac{1}{2}\;.$$

فعالیت. معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض است.

۱. ابتدا روابط بین جواب‌ها را بنویسید.

۲. اگر یک جواب این معادله k برابر جواب دیگر باشد، $x_1 = kx_2$ مانند آن‌چه در مثال قبلی انجام دادیم نشان دهید $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

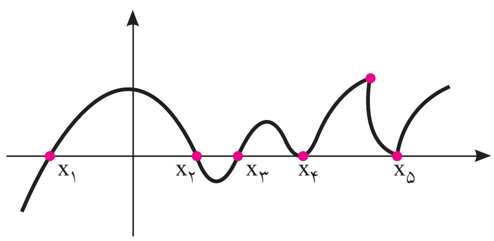
۳. مشابه آن نشان دهید به ازای چه مقدار k یک جواب معادله $x^2 - 4kx + 27 = 0$ مربع جواب دیگر است. یعنی $x_1 = x_2^2$ چون $x_1 + x_2 = 4k \;,\; x_1x_2 = 27$ به سادگی قابل حل است.

۴. اکنون مشابه آن نشان دهید اگر در معادله $x^2 + ax + b = 0$ یک جواب مجذور جواب دیگر باشد آن‌گاه $a^3 + b^2 + b = 3ab$.

حتی علاوه بر روابط بین جواب‌ها می‌توانید از خود معادله نیز استفاده کنید مثلاً $x_2^2 + ax_2 + b = 0$ زیرا x_2 در معادله صدق می‌کند اکنون با توجه به فرض، $x_1 + ax_2 + b = 0$.

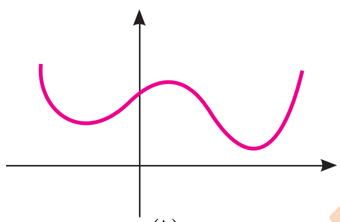
معادله‌ها و نمودارها

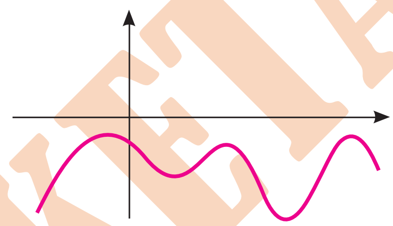
در سال قبل و در قسمت‌های قبلی بیش‌تر روش‌های حل معادلات بیان شد و در واقع با محاسبات سروکار داشتیم و در موارد کمی از نمودار در معادلات استفاده شد.



وقتی نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، اگر به ازای عددی مانند α ، $f(\alpha)=0$ آن‌گاه، $y=0$. یعنی نقطه $(\alpha,0)$ روی نمودار است از طرفی می‌دانیم این نقطه روی محور xها نیز می‌باشد پس جواب‌های معادله $f(x)=0$ نقاط تقاطع نمودار تابع و محور xها می‌باشند. یعنی طول نقاط تلاقی نمودار تابع با محور xها صفرهای $f(x)$ یا جواب‌های $f(x)=0$ نامیده می‌شوند.

از نمودار فوق می‌توانید تشخیص دهید که معادله $f(x)=0$ دارای ۵ جواب متمایز است، یا صفرهای تابع ۵ تا است.


(۱)


(۲)

در نمودارهای فوق معادله $f(x)=0$ جواب حقیقی ندارد زیرا نمودارها محور xها را قطع نمی‌کنند در شکل (۱) به ازای هر x، $f(x)>0$ و در شکل (۲) به ازای هر x، $f(x)<0$.

تعیین علامت و تعداد جواب‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ با استفاده از نمودار آن و ماکسیمم و می‌نیمم تابع درجه دوم

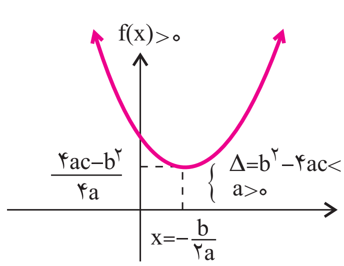
با نمودار تابع با ضابطه $f(x)=ax^2+bx+c$ در سال گذشته آشنایی دارید.

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \quad , \quad a\neq 0$$

$b^2-4ac<0$

عبارت داخل پرانتز همواره مثبت است چرا؟ پس علامت $f(x)$ بستگی به علامت a دارد.

$a>0$ همواره $f(x)>0$ و $a<0$ همواره $f(x)<0$. بنابراین در هر دو حالت نمودار محور xها را قطع نمی‌کند و معادله جواب ندارد.



(۱)