

ریاضی ۱

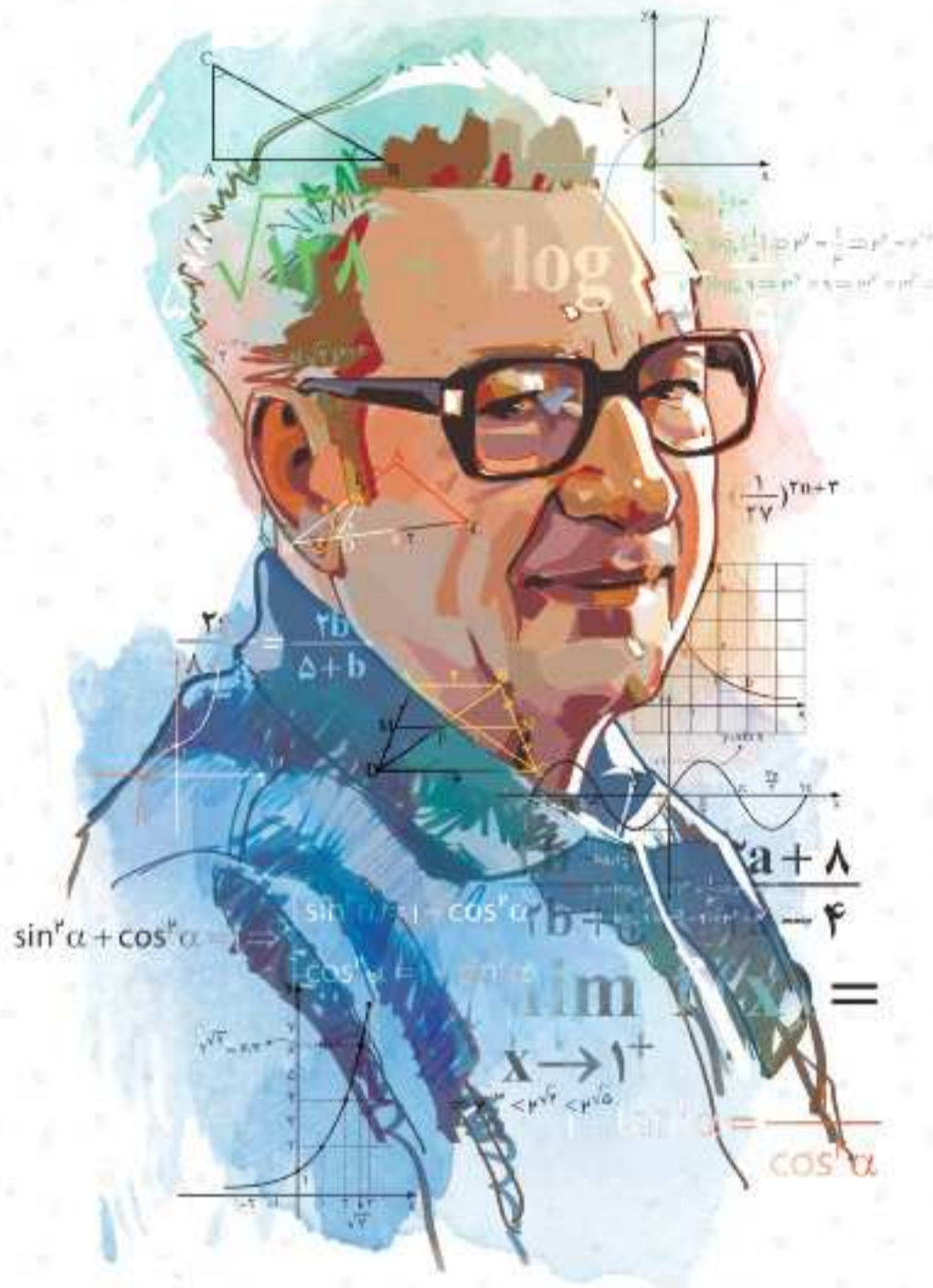
پاورتست
PowerTest

دهم

عباس اشرفی • وهاب تقی زاده • مصطفی دیداری
مشاور علمی: استاد هوشنگ نظری



مهروماه



تقدیم به استاد پرویز شهریار

پرویز شهریار (۲ آذر ۱۳۰۵، کرمان - ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، تهران) ریاضی‌دان و از چهره‌های ماندگار در زمینه دانش و آموزش ایران است.

دوران کودکی شهریار دوران سختی از نظر معیشتی بود. او تا سال سوم دبیرستان را در دبیرستان ایران‌شهر در شهر کرمان گذراند و وارد دانشسرای مقدماتی کرمان شد. در خرداد ۱۳۲۳ دانش‌آموخته شد و برای ادامه تحصیل به تهران آمد. در تهران در سال ۱۳۳۲ در رشته ریاضی در دانشکده علوم دانشگاه تهران دانش‌آموخته شد. پس از آن یک سال در شیراز آموزگار بود. در ۱۳۳۳ به تهران بازگشت و به فعالیت‌های درخشان علمی و آموزشی خود ادامه داد. استاد پرویز شهریار سرانجام در ۸۶ سالگی و در روز جمعه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ به علت مشکل تنفسی در بیمارستان جم تهران زندگی را بدرود گفت.

فعالیت‌ها: ■ انتشار نشریاتی چون اندیشه‌ما، وهومن و چیستا، آشتی با ریاضیات (بعدها: آشنایی با ریاضیات) و سردبیری مجله دانشمند ■ تأسیس دبیرستان‌های خوارزمی، مرجان و مدرسه عالی اراک ■ تالیف کتاب‌های ریاضی و هم‌زمان با آن تالیف و ترجمه صدها کتاب در تاریخ و آموزش ریاضیات ■ انتشار ماهنامه «اندیشه‌ما» ■ تهیه یک دوره کتاب درسی ریاضی دوره اول دبیرستان ■ راه‌اندازی اولین کلاس کنکور در ایران با نام گروه فرهنگی خوارزمی ■ تأسیس و ثبت بنیاد فرهنگی پرویز شهریار

مقدمه



«روزی یکی از دانشجویان دکتر حسابی به ایشان گفت: شما سه ترم است که مرا در این درس رد می‌کنید. من که نمی‌خواهم موشک هوا کنم! می‌خواهم در روستایمان معلم شوم.»

پروفسور حسابی جواب داد: تو اگر نخواهی موشک هوا کنی و فقط بخواهی معلم شوی، قبول! ولی تو نمی‌توانی به من تضمین بدهی که یکی از شاگردان تو در روستا، نخواهد موشک هوا کند!»

امیدوارم تو از اون دسته دانش‌آموزانی باشی که بخواهی موشک هوا کنی!

امیدوارم سقف آرزوهای اونقدر بلند باشه که دچار روزمرگی نشی!

و امیدوارم بدونی برای موشک هواکردن، بیشتر به همت بلند نیازه تا هوش و استعداد!

هنوز سال دهم هستی، حتی اگه تا حالا هم ریاضی رو خوب نخوندی فرصت هست!

سه سال تا کنکور فاصله داری و خیلی کارها می‌تونن بکنن. توی این مدت امکانش رو داری یه حال اساسی به اوضاع ریاضیت بدی.

بزار یه مثال واقعی از شاگردهام برات بزنم. چند سال پیش علیرضا صحاف با معدل «سیزده» و با نمره ریاضی «ده» وارد دبیرستان شد.

اون موقع دبیرستان ۴ ساله بود. اول دبیرستان ریاضی رو افتاد. 😞 اما توی سه سال آخر شروع به درس خوندن کرد. نمره ریاضیش شروع

به رشد کرد. سال بعد ۱۶، سال بعدش ۱۸ و سال آخر هم درخشید و الان دانشجوی مهندسی کامپیوتر دانشگاه شریفه!

اگر بخواهی می‌تونن مثل علیرضا توی این چند سال آخر، غول ریاضی رو مهار کنی و شاخ اونو بشکنی. البته برای این کار باید زحمت

بکشی و ابزار مناسب هم داشته باشی.

یکی از چیزهایی که می‌تونه کمکت کنه کتاب کمک آموزشی خوبه! یعنی همین کتاب! 😊

ما خیلی تلاش کردیم این کتاب طوری نوشته شه که مطالب از ساده به دشوار چیده بشن تا اول کار، از ریاضی زده نشی.

تست‌ها رو دست‌چین کردیم و دونه دونه اون‌ها رو بررسی کردیم و بعد از مطمئن شدن از کیفیت مهروماهی، اجازه ورود به کتاب

رو بهشون دادیم.

پاسخنامه‌ها رو تا اونجا که می‌شده تشریحی و کامل نوشتیم، حتی براشون روش دوم و سوم هم آوردیم.

ویژگی‌های این کتاب

- ۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.
- ۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو یه جا بخونی!
- ۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.
- ۴ توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونه.
- ۵ هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.
- ۶ پُر از تست‌های دوست‌داشتنیه! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن یه تست سخت، سخته نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.
- ۷ همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست! البته فقط تست‌هایی رو آوردیم که مربوط به کتاب جدید.
- ۸ پاسخنامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال‌ها گیر نمی‌کنی و می‌دونن که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخنامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!
- ۹ مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن و از حالت انتزاعی خارج شدن.

۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین، قلب ریاضیات است. اگه اینطوره پس کتاب ما متخصص قلبه! ❤️

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم. توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل شده برات آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم. «راهبردها» برای کسانی که می‌خوان صد بزنن! بعد از درسنامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. یه سری تست‌هایی هم اومده به نام «برای ۱۰۰٪» واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزنن و مخصوص دانش‌آموزای قویه. فصل که تموم میشه یه آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. بعد از اتمام درسنامه‌ها و تست‌ها، پاسخ تشریحی تمام تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌های کلیدی تمام تست‌ها و آزمون‌ها.

تست‌ها رو براتون دست‌چین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی که براتون پیش میاد رو پیرسید. سوالات سخت رو با علامت 🌟 مشخص کردیم. سعی کنید پس از حل سایر تست‌ها سراغ این سوالات بروید.

راهنمای استفاده از کتاب

خب بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی‌تونی یه سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، شاید راهبردی داره که تو بلد نیستی. اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن! مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته یه بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل، برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.

و اما قدردانی...

یه بار رفتم اتاق مدیر انتشارات، آقای احمد اختیاری، دیدم پرینت اولیه همین کتاب رو به همراه کتاب درسی گذاشتن جلوشون و دارن مطابقت میدن. خیلی برام جالب بود با اینکه اصلاً وقت سر خاروندن ندارن و رشته تحصیلیشون هم به ریاضی ربطی نداره، به نکاتی اشاره می‌کردن که توی کتاب تأثیرگذار بود. چقدر شکل کتاب و نحوه چیدمان مطالب و رده‌بندی تست‌ها و میزان پاسخ تشریحی و ... برایشون اهمیت داره!

باید اینجا خیلی ازشون تشکر کنم و بگم خیلی چیزها ازشون یاد گرفتم. دوم باید از استاد انوشه، بزرگ‌مرد شیمی ایران تشکر کنم که در حال حاضر مدیر شورای تألیف مهر و ماه هستن. ایشون چندین جلسه با من و مولف‌ها گذاشتن و حتی به خاطر خواهش مکرر من، بخشی از کتاب رو بررسی کردن و نظرات مهمی، برای بهبود کتاب دادن. سوم، از استادان بزرگوار بهمن اصلاح‌پذیر و هوشنگ نظری متشکریم که تجربه‌گران بهاشون در زمینه آموزشی ریاضی رو در اختیار من و سایر مؤلفان عزیز قرار دادن. همچنین استاد نظری فرصتی گذاشتن و کتاب رو مطالعه فرمودن.

مطالب درسی، بسیار دقیق و خوب بیان شده است. تمام درسنامه‌ها و تست‌ها را با جواب‌ها مطالعه کردم؛
انصافاً هم غلط مغربی نداشت و هم بعضی از تست‌ها که چندین راه حل داشت هر چند راه بیان شده بود.
ارادتمند دوستان: بهوشنگ نظری

سرکار خانم آزاده غنی‌فرد مسئول ویراستاری گروه ریاضی و آقایان وحید جعفری، امیرحسین عباسی، آروین حسینی، امین پورفرهنگ، مهدی حصاری، مهدی مرادی و خانم زهرا رسولی ویراستاران کتاب.


سرکار خانم مریم تاجداری مدیر تولید و همه عزیزانی که در زمینه تولید کتاب همراهی کردند! بخصوص خانم رویا طبسی صفحه‌آرای عزیز و بادقت مهروماه که زحمات زیادی رو متقبل شدن.

گروه هنری خلاق و دوست داشتنی آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و حسام طلایی به خاطر طرح‌های زیباشون.

تایپست محترم، ربابه موسوی‌خواه و رسام‌ها مریم صابری‌برون و میترا میرمصطفی.

آقایان مهندس امیر انوشه مدیر سایت، عماد ولدی و حمیدرضا پیام واحد انفورماتیک و تبلیغات بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون. امیدوارم این کتاب اولین گام در مسیر موفقیت‌هاتون باشه.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند.

 ashrafii.official

خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرام به آیدی مقابل ارسال نمایند.

مدیر پروژه و ناظر علمی

عباس اشرفی

فهرست



۹

فصل اول مجموعه، الگو و دنباله

۳۵

فصل دوم مثلثات

۵۹

فصل سوم توان‌های گویا و عبارتهای جبری

۸۷

فصل چهارم معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۱۵

فصل پنجم تابع

۱۴۳

فصل ششم شمارش، بدون شمردن

۱۵۹

فصل هفتم آمار و احتمال

۱۷۷

پاسخ‌نامه تشریحی

۳۰۸

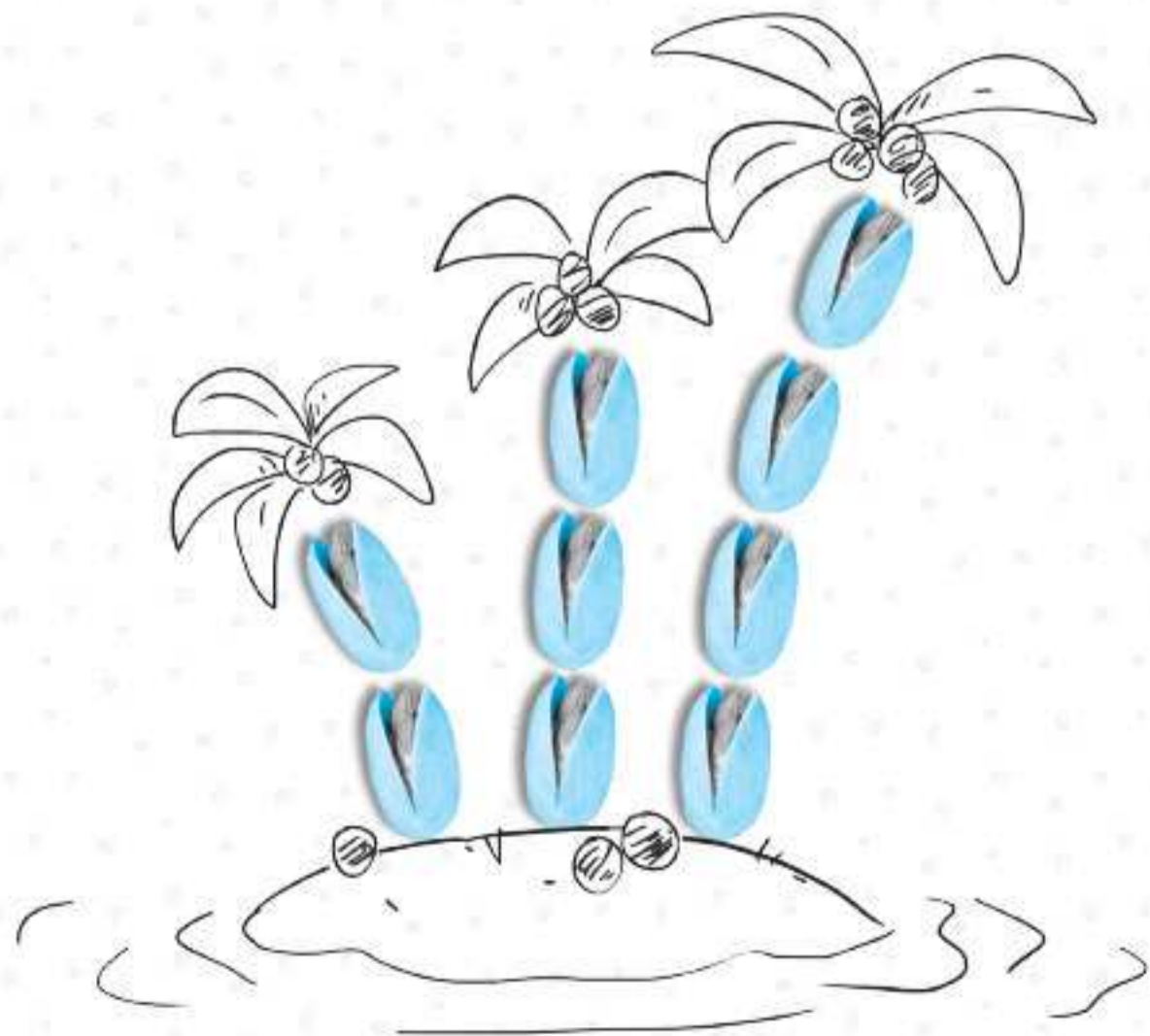
پاسخ‌نامه کلیدی

۳۱۳

فرمولنامه

مجموعه، الگو و دنباله

این فصل به دو بخش متفاوت تقسیم میشه!
اولیش، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و متمم یک مجموعه‌اس.
توی این درس یاد می‌گیری عضوهای چه مجموعه‌هایی رو آگه بشمری تموم میشن
و کدوم‌ها تموم نمیشن. همین‌طور یاد می‌گیری مجموعهٔ مرجع چیه و اعضای که
متعلق به یه مجموعه نیستن کجا قرار می‌گیرن.
دومیش الگو و دنباله‌اس.
توی این درس یواش، یواش یاد می‌گیری چطوری پدیده‌های نظم‌پذیر رو بیاری توی
قالب ریاضی و رفتارشون رو پیش‌بینی کنی.
آخرش هم با چند تا دنبالهٔ مهم آشنا میشی.



درس اول: مجموعه‌ها

یادآوری: در سال‌های گذشته با مجموعه‌های مهمی از اعداد مانند اعداد طبیعی و ... آشنا شدید که به‌طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

نکته

1. مجموعه اعداد طبیعی، زیرمجموعه اعداد حسابی است و مجموعه اعداد حسابی، خود زیرمجموعه اعداد صحیح است و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

2. مجموعه اعداد گویا و گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند ولی هر دو زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

اعداد حقیقی (\mathbb{R})

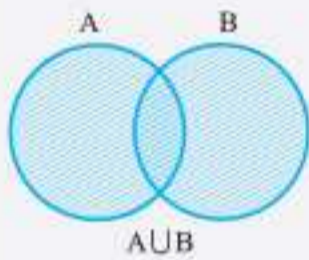
اعداد گویا (\mathbb{Q})	اعداد گنگ (\mathbb{Q}')
اعداد صحیح (\mathbb{Z})	$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}$
اعداد حسابی (\mathbb{W})	$\frac{2}{7}, \frac{2}{3}$
اعداد طبیعی (\mathbb{N})	$0, 31$
5 1 3 12	-3

در نمودار مقابل، همه مجموعه‌های گفته‌شده نشان داده‌شده و رابطه آن‌ها با یکدیگر مشخص شده است:

مهم

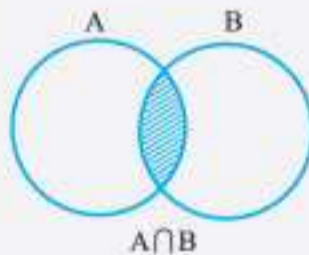
تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه \mathbb{N} عضو $2^{\mathbb{N}}$ است.

اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعه A یا مجموعه B یا عضو هر دوی آن‌ها باشند. اجتماع دو مجموعه را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهند.

اشتراک دو مجموعه

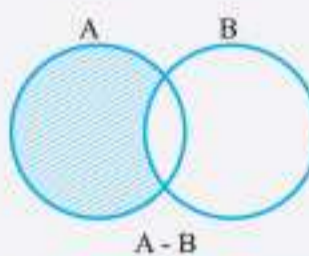


اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو هر دو مجموعه A و B باشند. اشتراک دو مجموعه را با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهند.

نکته

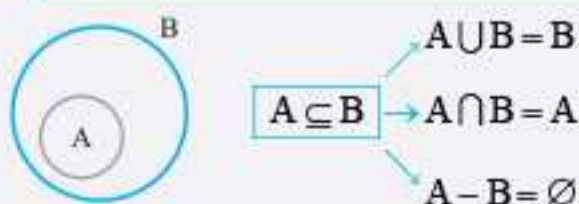
دو مجموعه A و B را جدا از هم گوئیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد.

تفاضل دو مجموعه



مجموعه $A - B$ ، مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

نکته



با توجه به نمودار مقابل اگر $A \subseteq B$ باشد، نتایج مقابل به‌دست می‌آید:

با برقراری هر کدام از نتایج، می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq B$.

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر با سایر مجموعه‌ها متفاوت است؟

$$Q' - R \quad (۴)$$

$$Q' \cap Q \quad (۳)$$

$$W - N \quad (۲)$$

$$Z - R \quad (۱)$$

پاسخ:

گزینه ۱: $Z - R = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\} - R = \emptyset$

گزینه ۲: $W - N = \{۰, ۱, ۲, \dots\} - \{۱, ۲, ۳, \dots\} = \{۰\}$

گزینه ۳: $Q' \cap Q = \emptyset$

گزینه ۴: $Q' - R = \emptyset$

مثال: اگر $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{a, \{b\}, c\}$ و $C = \{a, b, \{c\}\}$ باشند، آن‌گاه $(A \cup B) - C$ کدام است؟

$$\{\{b\}, \{c\}\} \quad (۴)$$

$$\{\{b\}, c\} \quad (۳)$$

$$\{\{c\}, b\} \quad (۲)$$

$$\{b, c\} \quad (۱)$$

$$A \cup B = \{a, b, \{b\}, c\}$$

پاسخ: اجتماع دو مجموعه A و B را می‌یابیم:

اکنون از اجتماع دو مجموعه A و B عضوهای شامل C را حذف می‌کنیم تا به $(A \cup B) - C$ برسیم.

$$(A \cup B) - C = \{\{b\}, c\}$$

مثال: اگر $A \cap B = A \cup B - \{1, 2\}$ و $A \cap B \neq \emptyset$ باشند، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

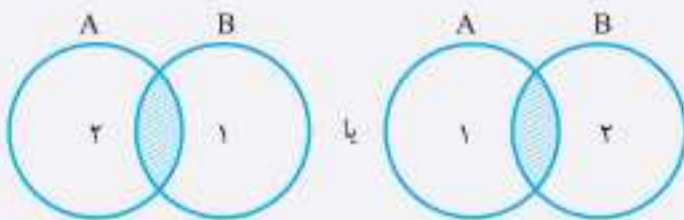
$$A - B = \{1, 2\} \quad (۲)$$

$$B - A = \{1, 2\} \quad (۱)$$

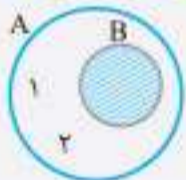
$$A \cap B = B - A \quad (۴)$$

$$(B - A) \cup (A - B) = \{1, 2\} \quad (۳)$$

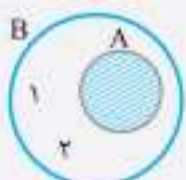
پاسخ: این دو مجموعه می‌توانند به شکل‌های زیر باشند:



الف: در این حالت $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\}$



ب: در این حالت B زیر مجموعه A است، مشخص است که: $A - B = \{1, 2\}$



پ: در این حالت که A زیر مجموعه B است، خواهیم داشت: $B - A = \{1, 2\}$

پس گزینه «۴» درست است.

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱. کدام گزینه نادرست است؟

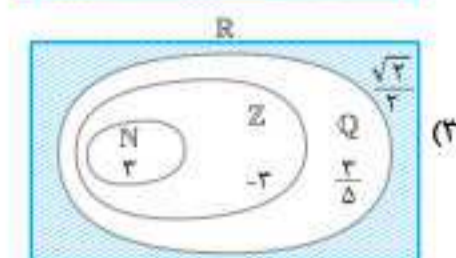
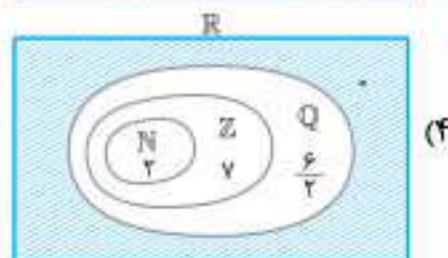
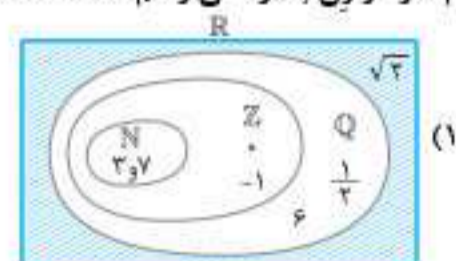
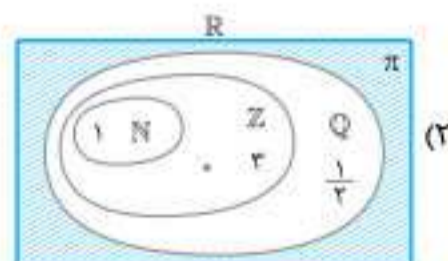
(۱) مجموعه $Q - R$ اعداد گنگ نام دارد.

(۳) هر عدد طبیعی، حسابی است.

۲. کدام نمودار ون به درستی رسم شده است؟

(۲) هر عدد گویا صحیح است.

(۴) مجموعه $W - N$ تک‌عضوی است.



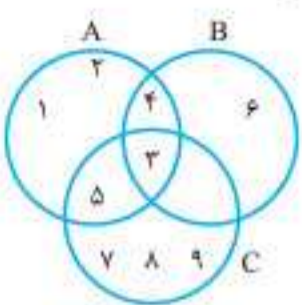


۳. کدام دو مجموعه جدا از هم هستند؟

- Q-N, Z (۴)
- R-Z, Q (۳)
- Q-Z, N (۲)
- R-N, Z (۱)

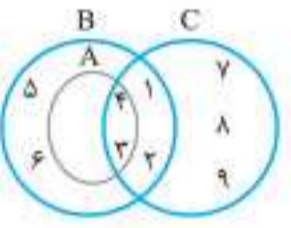
۴. با توجه به شکل مقابل، حاصل $(A-B) - (C \cup B)$ کدام است؟

- {1, 2} (۱)
- {1, 2, 5} (۲)
- {1, 2, 4} (۳)
- {1, 2, 3} (۴)



۵. با توجه به شکل مقابل مجموعه $(A-B) \cup (C-A)$ چند عضو دارد؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)



۶. اگر $A \cap B = \{1, 2\}$ ، $A - B = \{3, 5, 9\}$ و $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ باشند، مجموعه B کدام است؟

- {1, 2, 3, 9} (۱)
- {1, 2, 4} (۲)
- {1, 2, 3} (۳)
- {1, 2, 4, 9} (۴)

۷. اگر $A = \{2^x | x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{2^{|x|} | x \in \mathbb{Z}\}$ باشند، آن گاه مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- هیچ عضوی ندارد. (۱)
- یک عضو دارد. (۲)
- دو عضو دارد. (۳)
- بی شمار عضو دارد. (۴)

۸. اگر $A = \{\frac{f-n}{n} | n \in \mathbb{N}, n < 5\}$ و $B = \{\frac{fn-n^2}{n+2} | n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$ باشند، مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

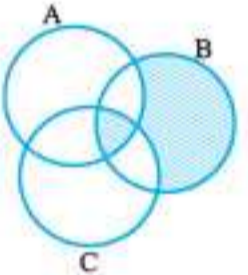
- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

۹. اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و $(A \cap B) \cup \{1\} = A \cup B \neq A \cap B$ باشد، کدام مورد صحیح است؟

- $A = B$ (۱)
- $1 \in A$ (۲)
- $A \subseteq B$ (۳)
- $\{1\} \subseteq (B - A) \cup (A - B)$ (۴)

۱۰. اگر به اعضای مجموعه‌ای، یک عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

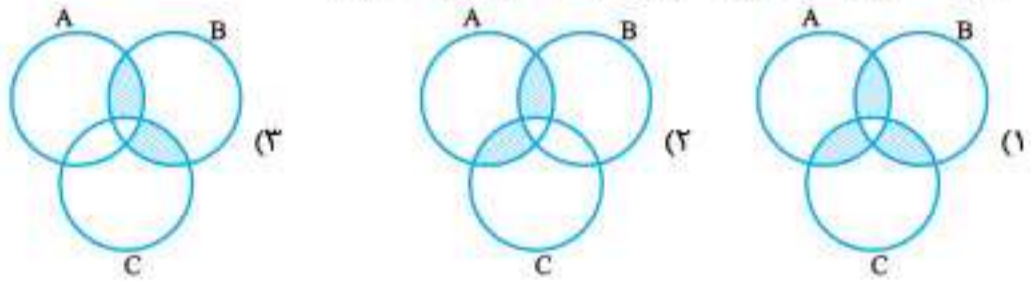
- ۲ واحد اضافه می‌شود. (۱)
- ۲ واحد برابر می‌شود. (۲)
- ۴ واحد اضافه می‌شود. (۳)
- ۴ برابر می‌شود. (۴)



۱۱. در شکل مقابل قسمت هاشورخورده کدام است؟

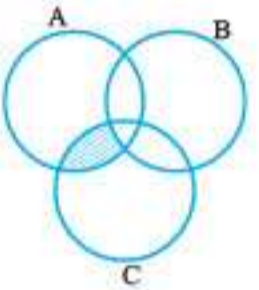
- $(B - (A - C)) \cup (A \cap B \cap C)$ (۱)
- $((B - A) - C) \cup (A \cap B \cap C)$ (۲)
- $((C - B) - A) \cup (A \cap B \cap C)$ (۳)
- $(C - (B - A)) \cup (A \cap B \cap C)$ (۴)

۱۲. کدام گزینه نمایش نمودار ون مجموعه $A \cap (B \cup C) - (B \cap C)$ است؟



۱۳. با توجه به نمودار مقابل، قسمت هاشورخورده با کدام گزینه برابر نیست؟

- $A \cap C - (A \cap B)$ (۱)
- $A \cap C - (A \cap B \cap C)$ (۲)
- $(A \cap C) - (B \cup C)$ (۳)
- $(A - B) \cap C$ (۴)



۱۴. اگر $A \cup B = A$ باشد، حاصل $(A \cap B) \cup (A - B)$ کدام است؟

- B (۱)
- \emptyset (۲)
- U (۳)
- A (۴)

۱۵. اگر $C \subseteq A \cap B$ باشد، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- $C \subseteq B - A$ (۱)
- $C \subseteq A - B$ (۲)
- $C \subseteq A \cup B$ (۳)
- $C \subseteq (A - B) \cup (B - A)$ (۴)

۱۶. اگر $A - B = \emptyset$ و $A - C = \emptyset$ باشند، آن گاه همواره می‌توان نتیجه گرفت (مجموعه‌ها غیر تهی اند):

- $B = C$ (۱)
- $B \cap C = \emptyset$ (۲)
- $B \cap C = A$ (۳)
- $B \cap C \neq \emptyset$ (۴)

۱۷. اگر $A \cap C \subseteq A \cap B$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟

- $C \subseteq B$ (۱)
- $B \subseteq C$ (۲)
- $A - C \subseteq A - B$ (۳)
- $A \cap C \subseteq A \cup B$ (۴)





۴۹. چه تعداد از مجموعه‌های زیر نامتناهی هستند؟

- الف) مجموعه شماره‌های طبیعی ۲۴
- ب) مجموعه اعداد گویا که گنگ نباشند.
- ۱) صفر
- ۲) ۱

ب) مجموعه کسرهای مثبت با صورت ۲

- ۳) ۴
- ۲) ۳

۵۰. اگر A مجموعه شماره‌های مثبت عدد ۲۴ و B مجموعه مضارب مثبت عدد ۳ باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- الف) $A \cup B$ دارای ۸ عضو است.
- ب) $A - B$ متناهی است.
- ۱) هیچ
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۳

۵۱. کدام گزینه وجود ندارد؟

- ۱) مجموعه متناهی که زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.
- ۲) دو مجموعه نامتناهی A و B که $A - B$ تک‌عضوی باشد.
- ۳) مجموعه نامتناهی که زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد.
- ۴) دو مجموعه نامتناهی که اشتراک آن‌ها نامتناهی باشد.

۵۲. کدام مجموعه زیر متناهی است؟

- ۱) $Z - W$
- ۲) $W \cap N$
- ۳) $Z \cap N$
- ۴) $W - N$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۳. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- ۱) مجموعه مضرب‌های مثبت عدد ۳
- ۲) مجموعه اعداد اول
- ۳) مجموعه اعداد فرد و مضرب ۵

۵۴. اگر A یک زیرمجموعه متناهی و B یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه اعداد صحیح باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) $A - B$ مجموعه‌ای متناهی است.
- ۲) $B - A$ مجموعه‌ای نامتناهی است.
- ۳) $A - B'$ مجموعه‌ای متناهی است.
- ۴) $A' - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

۵۵. A مجموعه B متناهی و مجموعه‌های A و C نامتناهی اند. کدام یک از گزینه‌های زیر حتماً نامتناهی است؟

- ۱) $A - (C - B)$
- ۲) $B \cup (A - C)$
- ۳) $A - (B - C)$
- ۴) $(B \cap C) - A$

۵۶. اگر مجموعه A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، هریک از مجموعه‌های $A \cap (B \cup C)$ و $B - (A \cap C)$ به ترتیب از راست به چپ، از نظر متناهی بودن یا نبودن چگونه‌اند؟

- ۱) متناهی - متناهی
- ۲) نامتناهی - متناهی
- ۳) متناهی - نامتناهی
- ۴) نامتناهی - نامتناهی

۵۷. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه کدام مجموعه یقیناً مجموعه‌ای متناهی است؟

- ۱) $(B - A) \cap (A \cup B)$
- ۲) $(A \cap B) \cup (A - B)$
- ۳) $(A \cup B) \cap (A - B)$
- ۴) $(B - A) \cup (A - B)$

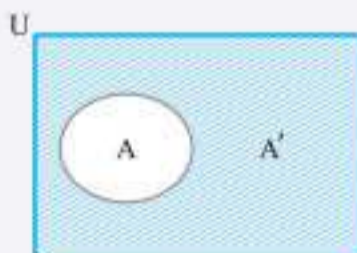
درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نمایش می‌دهیم.

متمم

در نظر بگیریم U مجموعه مرجع باشد، مجموعه $U - A$ را مجموعه متمم A می‌نامیم و آن را با A' نمایش می‌دهیم.



مثال: اگر $A' = \{1, 2, 4\}$ و $B' = \{2, 3\}$ باشند و مجموعه مرجع، اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه $(A \cap B)'$ کدام است؟

- ۱) $\{1, 2, 3\}$
- ۲) $\{1, 2, 3, 4\}$
- ۳) $\{4, 5, 6, \dots\}$
- ۴) $\{5, 6, 7, \dots\}$

• پاسخ: از آن جایی که $A' = \{1, 2, 4\}$ است با توجه به مرجع بودن N داریم:
 $A = \{3, 5, 6, \dots\}$, $B = \{1, 4, 5, \dots\}$
 $A \cap B = \{3, 5, 6, \dots\} \cap \{1, 4, 5, 6, \dots\} = \{5, 6, \dots\}$
 بنابراین:
 و همین‌طور $(A \cap B)'$ برابر می‌گردد با:

۱ $(A')' = A$

۲ $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$ قوانین دمورگان

۳ $\begin{cases} A - B = A \cap B' \\ B - A = B \cap A' \end{cases}$ قانون تفاضل به اشتراک

۴ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

۵ $A - (A \cap B) = A - B$

۶ $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

مثال: اگر $A \subseteq B$ و U مجموعه مرجع باشد، آن گاه چه تعداد از رابطه‌های زیر درست است؟

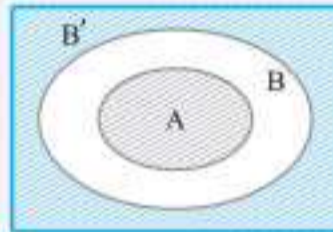
ت $A \cup B' = U - (B - A)$ ۴ (۴)

پ $B' \subseteq A'$ ۳ (۳)

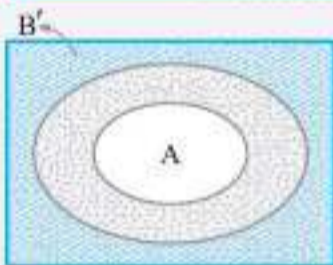
ب $A' \cap B' = B'$ ۲ (۲)

الف $A \cap B' = \emptyset$ ۱ (۱)

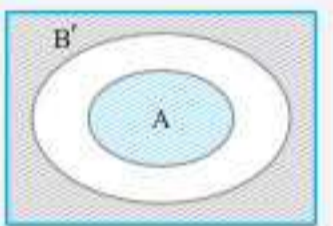
پاسخ:



روش اول: ابتدا نمودار این مجموعه‌ها را رسم می‌کنیم. برای بررسی قسمت **الف** قسمت‌های B' و A را هاشور می‌زنیم. همان‌طور که می‌بینید این دو مجموعه اشتراکی ندارند. همین کار را برای قسمت **ب** انجام می‌دهیم.



می‌بینیم که اشتراک A' (قسمت نقطه‌چین) با B' (قسمت هاشور خورده) همان B' می‌باشد و در همین شکل می‌بینید که $B' \subseteq A'$ است. برای بررسی قسمت **ت** ابتدا $A \cup B'$ را تعیین می‌کنیم. حال $B - A$ را می‌یابیم.



اگر دقت کنید مجموعه $U - (B - A)$ برابر قسمت هاشور خورده شکل قبلی است و $A \cup B' = U - (B - A)$ است.

روش دوم: قسمت‌های مختلف را به کمک قوانین مجموعه‌ها بررسی می‌کنیم.

الف: با توجه به قوانین اشاره شده داریم:

$A \cap B' = A - B$ و از آن جایی که $A \subseteq B$ است، پس $A - B = \emptyset$ است.

ب: به کمک قانون اجتماع و اشتراک متمم‌ها داریم:

از آن جایی که $A \cup B = B$ می‌باشد پس $(A \cup B)' = B'$ است و در نتیجه $A' \cap B' = B'$ است.

پ: چون $A \subseteq B$ است، پس $B' \subseteq A'$ است. (به نمودار دقت کنید)

ت: از آن جایی که $U - (B - A) = (B - A)'$ و با توجه به این که $B - A = B \cap A'$ بنابراین:

$(B - A)' = (B \cap A')' = B' \cup A = A \cup B'$

پس گزینه «۴» درست است.

سؤال چهارگزینه‌ای

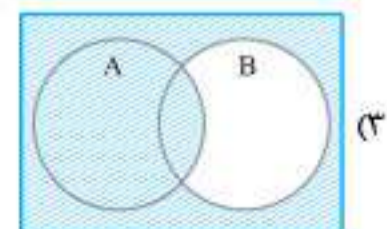
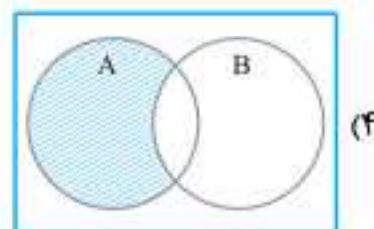
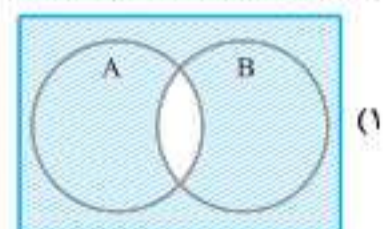
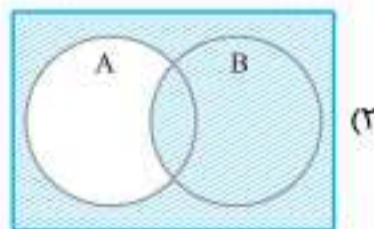
۵۸. اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی و A متناهی و B نامتناهی باشند، آن گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

- ۱ $A' \cup B'$ ۲ $A \cap B'$ ۳ $A \cup B'$ ۴ $A' \cap B'$

۵۹. اگر $A = (-1, 5]$ و $B = (-1, 4)$ باشند، مجموعه مرجع کدام باشد تا مجموعه $A' \cap B'$ متناهی باشد؟

- ۱ $[-2, 5]$ ۲ $(-1, 5]$ ۳ $(-2, 6]$ ۴ $(-1, 6]$

۶۰. نمودار $(A - B) \cup (A \cap B)$ کدام است؟





Lim



۸۹. در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۲ نفر از دانش‌آموزان دارای برادر و ۱۴ نفر دارای خواهر هستند. اگر تعداد دانش‌آموزان تک فرزند را با x نمایش دهیم، محدوده حسابی x کدام است؟

- ۰ ≤ x ≤ ۱۸ (۴)
- ۴ ≤ x ≤ ۱۸ (۳)
- ۴ ≤ x ≤ ۱۶ (۲)
- ۰ ≤ x ≤ ۱۶ (۱)

۹۰. اگر $A \subseteq B \subseteq C'$ باشد و مجموعه‌های A, B, A و C, B, A (مرجع) به ترتیب دارای ۲، ۶، ۱۲ و ۳۰ عضو باشند، حاصل $n((A \cup B) - C)$ کدام است؟

- ۱۰ (۴)
- ۱۲ (۳)
- ۱۸ (۲)
- ۲۴ (۱)

۹۱. در یک کلاس ۶۰ نفری، ۲۸ نفر والیبال، ۲۶ نفر بسکتبال و هدهای هم فوتبال بازی می‌کنند. از این تعداد ۱۰ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر بسکتبال و والیبال، ۹ نفر فوتبال و بسکتبال و ۷ نفر هر سه ورزش را بازی می‌کنند. در این کلاس چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند (به شرط آن‌که هر فرد لااقل در یک ورزش شرکت کند)

- ۱۹ (۴)
- ۱۸ (۳)
- ۱۷ (۲)
- ۱۶ (۱)

۹۲. در یک میهمانی ۴۰ نفره از زنان و مردان، تعداد زنان هینکی سه برابر مردان بدون هینک است. تعداد زنان ۴ نفر بیشتر از تعداد مردان است. اگر زنان بدون هینک هفت نفر باشند، تعداد هینکی‌ها چند نفر است؟

- ۲۸ (۴)
- ۲۷ (۳)
- ۲۶ (۲)
- ۲۵ (۱)

۹۳. در یک کلاس ۲۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸)

- ۱۸ (۴)
- ۱۷ (۳)
- ۱۶ (۲)
- ۱۵ (۱)

۹۴. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی خارج ۹۸)

- ۲۲ (۴)
- ۲۱ (۳)
- ۱۸ (۲)
- ۱۵ (۱)

درس سوم: الگو

• یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد را الگو می‌نامند.
 • برای مطالعه الگوها بهتر است آن‌ها را به زبان اعداد بیان کنیم و به کمک اعداد آن‌ها را ساماندهی کنیم. مثلاً به کمک اعداد می‌توان الگوی بلندی و کوتاهی طول روز را در طی یکسال یافت.

مثال: در مرحله پانزدهم از الگوی زیر تعداد دایره‌های مشکی کدام است؟



مرحله ۱

۶۳ (۴)



مرحله ۲

۵۵ (۳)



مرحله ۳

۵۹ (۲)

۵۱ (۱)

پاسخ: اگر دایره‌های مشکی را بشماریم می‌توان به اعداد مقابل دست یافت: یعنی هر مرحله ۴ واحد به تعداد آن‌ها اضافه می‌شود. بنابراین برای رسیدن به پانزدهمین مرحله، ۱۴ بار عدد ۴ به عدد اول یعنی ۷ اضافه می‌گردد.
 $7 + (14 \times 4) = 7 + 56 = 63$

سؤالات چهارگزینه‌ای

۹۵. با توجه به الگوی زیر، در چندمین مرحله تعداد نقاط ۸۲ تا می‌شود؟



مرحله (۱)

۲۸ (۴)



مرحله (۲)

۲۷ (۳)




مرحله (۳)

۲۶ (۲)


۲۵ (۱)

۹۶. تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله دهم الگوی زیر کدام است؟



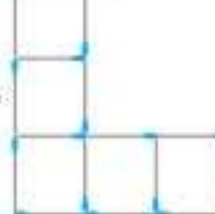
مرحله (۱)

۷۶ (۴)



مرحله (۲)

۷۰ (۳)

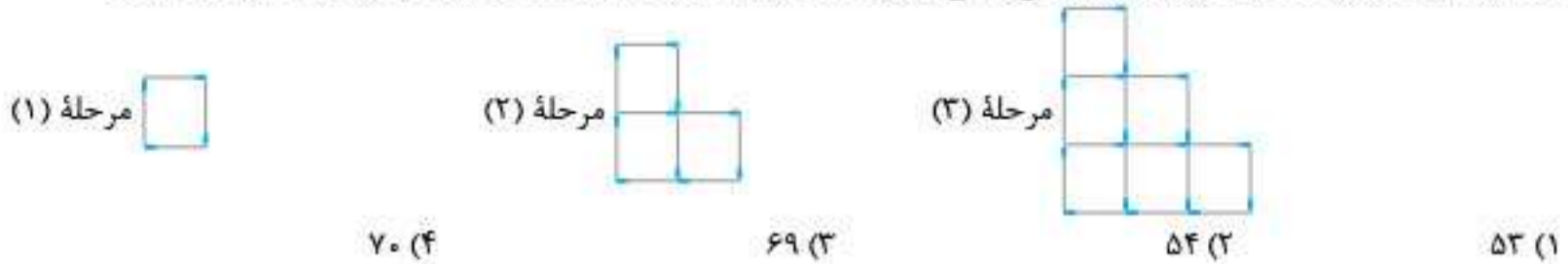


مرحله (۳)

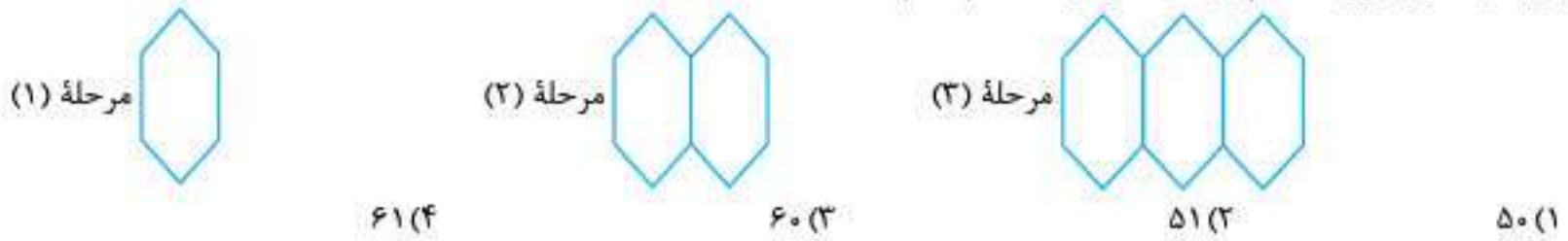
۶۴ (۲)

۵۸ (۱)

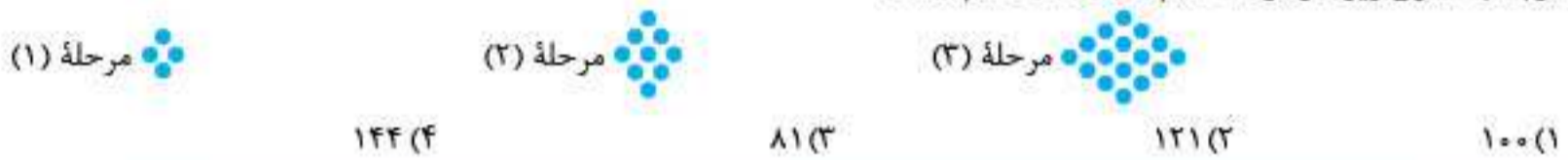
۹۷. با تعدادی چوب کبریت مطابق الگوی زیر اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده در مرحله هفتم کدام است؟



۹۸. با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خطها در مرحله دهم کدام است؟



۹۹. با توجه به الگوی زیر، در مرحله دهم تعداد نقاط کدام است؟



الگوهای مهم

الگوی خطی

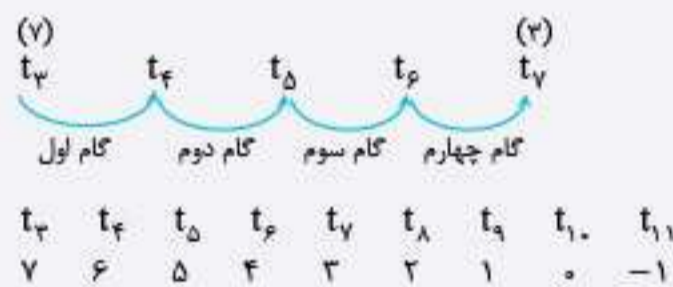
الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها $t_n = an + b$ است، الگوی خطی می‌نامیم که در آن‌ها a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

در این الگوها اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر ضریب n می‌باشد. مثلاً اختلاف دو جمله متوالی از دنباله $a_n = 3n - 1$ برابر ۳ است.

مثال: در دنباله‌ای که از الگوی خطی پیروی می‌کند، اگر جمله سوم برابر ۷ و جمله هفتم برابر ۲ باشد، چند جمله این دنباله مثبت است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

پاسخ: با توجه به این که از جمله سوم تا جمله هفتم مطابق عبارت زیر، ۴ گام اختلاف وجود دارد و اختلاف ۷ و ۳ هم برابر ۴- است، پس هر گام ۱- است.



همان‌طور که مشخص شد تا جمله نهم، جملات مثبت هستند.

الگوی مربعی

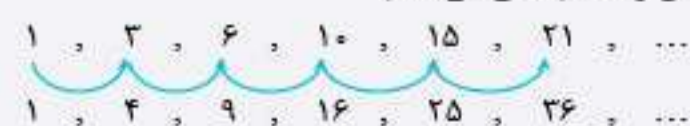
الگویی است که هر جمله را به مربع شماره همان جمله نسبت می‌دهد، مثلاً $t_5 = 5^2$ و $t_6 = 6^2$ و جمله دهم الگو برابر ۱۰۰ است. جملات این الگو از $t_n = n^2$ پیروی می‌کنند.

الگوی مثلثی

الگویی است که هر جمله را به مجموع اعداد از یک تا شماره آن عدد نسبت می‌دهد، مثلاً $a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. جملات این الگو از $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ پیروی می‌کنند.

مثال: اگر جملات متوالی الگوی مثلثی را با هم جمع کنیم، جملات الگوی حاصل به کدام صورت تبدیل می‌گردد؟
 (۱) الگوی خطی (۲) الگوی مثلثی (۳) الگوی مربعی (۴) الگوی درجه دو

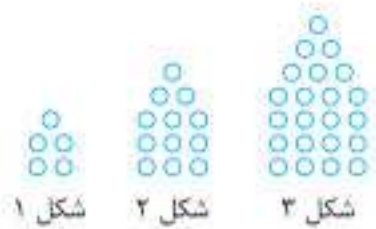
پاسخ: اول جملات الگوی مثلثی را می‌نویسیم و سپس جملات متوالی آن را با هم جمع می‌کنیم:



جملات الگوی جدید، مربعی است.

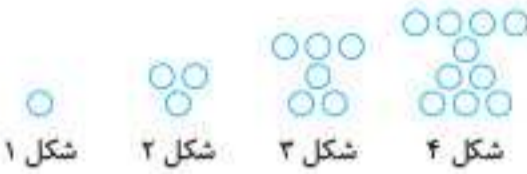


۱۱۶. با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل یازدهم چقدر است؟



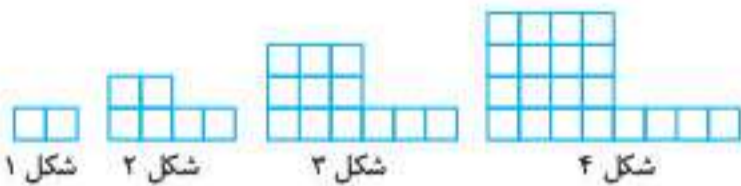
- ۱۷۶ (۱)
- ۱۸۷ (۲)
- ۲۱۰ (۳)
- ۲۵۴ (۴)

۱۱۷. در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل دهم کدام است؟



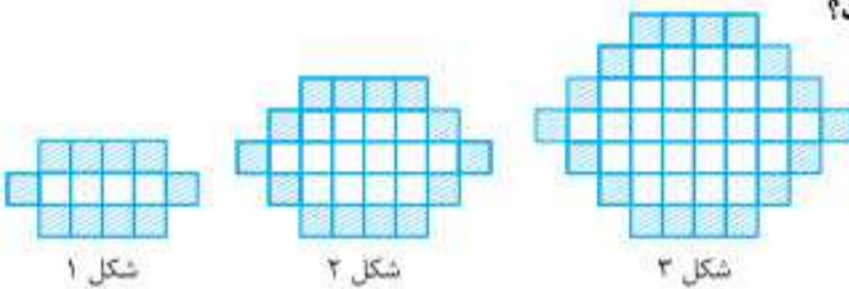
- ۵۵ (۱)
- ۶۵ (۲)
- ۴۵ (۳)
- ۵۰ (۴)

۱۱۸. در الگوی روبه‌رو تعداد مربع‌ها در چندمین شکل برابر ۱۲۲ است؟



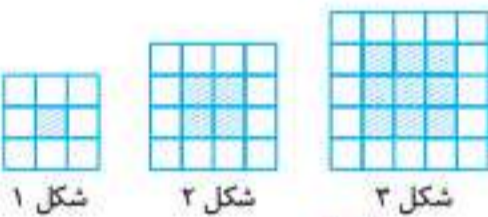
- ۱۰ (۱)
- ۱۱ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۳ (۴)

۱۱۹. در الگوی مقابل تعداد مربع‌های رنگی در شکل بیستم چقدر است؟



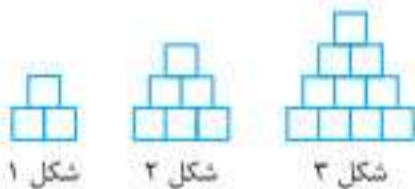
- ۴۴ (۱)
- ۶۶ (۲)
- ۸۶ (۳)
- ۹۹ (۴)

۱۲۰. در الگوی مقابل در شکل دهم، نسبت تعداد مربع‌های سفید به مربع‌های رنگی کدام است؟



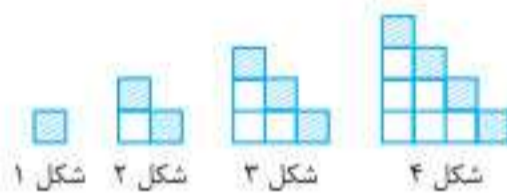
- ۰/۳۳ (۱)
- ۰/۲۲ (۲)
- ۰/۴۴ (۳)
- ۰/۵۵ (۴)

۱۲۱. با توجه به الگوی مقابل تعداد مربع‌های در شکل دهم کدام است؟



- ۲۸ (۱)
- ۶۶ (۲)
- ۴۵ (۳)
- ۵۵ (۴)

۱۲۲. با توجه به الگوی مقابل در شکلی که ۲۸ مربع سفید دارد، چند مربع رنگی می‌بینیم؟



- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

۱۲۳. در الگوی مقابل، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



- ۱۱۷ (۱)
- ۱۲۰ (۲)
- ۱۲۳ (۳)
- ۱۲۵ (۴)

۱۲۴. در الگوی مقابل، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



- ۳۴ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۳۸ (۳)
- ۴۰ (۴)

۱۲۵. اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

- ۱۱/۶ (۱)
- ۱/۴ (۲)
- ۲/۴ (۳)
- ۹/۶ (۴)

دنباله

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

جمله عمومی دنباله

جمله n ام یک دنباله را جمله عمومی دنباله می‌نامند (به شرط طبیعی بودن عدد n) و آن را با t_n یا a_n نمایش می‌دهند.

با داشتن t_n ، برای به دست آوردن هر جمله کافی است شماره آن جمله را به جای n قرار دهیم. به عنوان مثال:

در دنباله $t_n = 5n^2 - 3n + 1$ جمله سوم کدام است؟ $t_3 \Rightarrow t_3 = 5(3)^2 - 3(3) + 1 = 37$ (جمله سوم)



مثال: اگر در یک دنباله $a_1 = 0$ و به ازای $n \geq 2$ داشته باشیم $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})(1 - \frac{1}{(n-1)^2}) \dots (1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{3^2})$ آن گاه جمله چندم

دنباله a_n برابر 0.525 است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

پاسخ: همه پرانتزها را می توان به کمک اتحاد مزدوج به شکل زیر تجزیه نمود:

$$a_n = (1 - (\frac{1}{n})^2)(1 - (\frac{1}{n-1})^2) \dots (1 - (\frac{1}{4})^2)(1 - (\frac{1}{3})^2)$$

حالا همه عبارت ها را تجزیه می کنیم.

$$a_n = (1 - \frac{1}{n}) \cancel{(1 + \frac{1}{n})} (1 - \frac{1}{n-1}) \cancel{(1 + \frac{1}{n-1})} (1 - \frac{1}{n-2}) \dots (1 - \frac{1}{4}) \cancel{(1 + \frac{1}{4})} (1 - \frac{1}{3}) \cancel{(1 + \frac{1}{3})}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(n+1)}{n}$$

اگر دقت کنید اعداد دوم و سوم، چهارم و پنجم ... با هم ساده می شوند و فقط عبارت اول و آخر ساده نمی شوند.

$$a_n = \frac{1}{n} \times \frac{(n+1)}{n}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{(n+1)}{n} = 0.525 \xrightarrow{\text{طرفین}} \frac{n+1}{n} = 1.05 \xrightarrow{\text{وسطین}} n+1 = 1.05n$$

$$\Rightarrow 1 = 1.05n - n \Rightarrow 1 = 0.05n \Rightarrow n = \frac{1}{0.05}$$

$$n = \frac{1}{0.05} = \frac{1}{\frac{1}{20}} = 20$$

می دانیم $\frac{1}{20} = 0.05$ است، بنابراین:

دنباله بازگشتی

دنباله ای که هر جمله آن با نظم خاصی از روی جملات قبلی اش پیدا شود را دنباله بازگشتی می نامند. مشهورترین دنباله بازگشتی، دنباله فیبوناچی است که در آن دو جمله اول دنباله، یک هستند و از جمله سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جمله قبلی به دست می آید، یعنی:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$$

و می توان فرمول آن را به صورت مقابل نوشت:

مثال: اگر جملات یک دنباله به صورت $a_{n+1} = 2a_n$ نوشته شود در صورتی که $a_1 = 2$ باشد، چندمین جمله برابر ۱۹۲ می شود؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: این دنباله از جمله اول «۲» شروع می شود و هر جمله ۲ برابر جمله قبلی است. جملات دنباله را می نویسیم:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots$$

همان طور که می بینید جمله هفتم این دنباله برابر ۱۹۲ است.

مطالعه آزاد



دنباله فیبوناچی: این اعداد به نام لئوناردو فیبوناچی ریاضیدان ایتالیایی نام گذاری شده است. وی نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است که بیشتر فعالیت هایش از آثار ریاضیدان های مسلمان به خصوص خوارزمی، کرجی و ابوکامل تأثیر پذیرفته است. در دوران حیات فیبوناچی مسابقات ریاضی در اروپا مرسوم بود. در یکی از همین مسابقات که در سال ۱۲۲۵ در شهر پیزا توسط امپراتور فردریک دوم برگزار شده بود مسئله زیر مطرح شد:

«قرض کنیم خرگوش هایی وجود دارند که هر جفت (یک نر و ماده) از آن ها به سن یک ماهگی رسیده باشند به ازای هر ماه که از زندگیشان سپری شود یک جفت خرگوش به دنیا می آورند. حال اگر قرض کنیم این خرگوش ها هرگز نمی میرند و در آغاز یک جفت از این نوع خرگوش در اختیار داشته باشیم که به تازگی متولد شده اند، حساب کنید پس از n ماه چند جفت از این نوع خرگوش خواهیم داشت.» اگر تعداد خرگوش ها را در ماه های اول و دوم و ... حساب کنیم به دنباله فیبوناچی می رسیم. فیبوناچی با حل این مسئله و معرفی این دنباله به جهان که خواص شگفت انگیزی دارد تأثیر زیادی بر ریاضی و حتی سایر علوم گذاشت.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۸

اعضای مجموعه‌های A و B را می‌نویسیم:

$$A = \left\{ \frac{4-n}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 5 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{4-1}{1}, \frac{4-2}{2}, \frac{4-3}{3}, \frac{4-4}{4} \right\} = \left\{ 3, 1, \frac{1}{3}, 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{4n-n^2}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 4 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{4-1}{1+2}, \frac{4(2)-2^2}{2+2}, \frac{4(3)-3^2}{3+2}, \frac{4(4)-4^2}{4+2} \right\}$$

$$= \left\{ 1, 1, \frac{2}{5}, 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{2}{5}, 0 \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ 3, 1, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5} \right\}$$

$$A \cap B = \{0, 1\}$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \left\{ 3, \frac{1}{3}, \frac{2}{5} \right\}$$

مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ دارای ۳ عضو است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۹

نمودار این دو مجموعه به یکی از حالت‌های زیر می‌تواند باشد:



B زیر مجموعه A باشد

و ۱ فقط عضو A باشد.

A زیر مجموعه B باشد

و ۱ فقط عضو B باشد.

بنابراین گزینه ۱، ۲ و ۳ همواره درست نیستند در هر دو حالت داریم:

$$\{1\} \subseteq (B - A) \cup (A - B)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۱۰

یادآوری: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n

عضوی 2^n است.

اگر به اعضای یک مجموعه n عضو یک عضو دیگر اضافه کنیم، تعداد اعضای

آن $n+1$ می‌گردد. پس اگر قبلاً تعداد زیرمجموعه‌ها 2^n بوده، تعداد

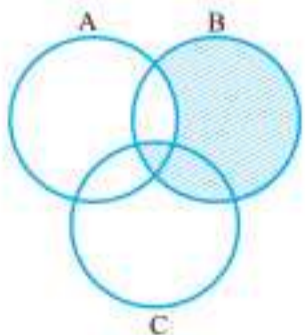
زیرمجموعه‌های مجموعه جدید 2^{n+1} است. $\frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2^1}{2^n} = 2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۱۱

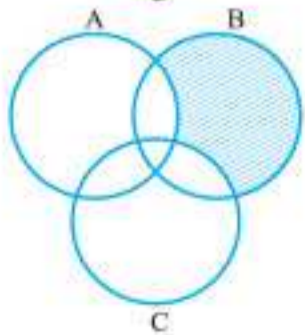
با توجه به این که همه گزینه‌ها شامل $A \cap B \cap C$ یعنی

قسمت مشترک سه مجموعه هستند، بهتر است در هر گزینه

فقط قسمت‌های متفاوت را بررسی کنیم.



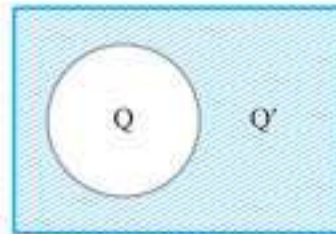
گزینه ۱: $B - (A \cap C)$



گزینه ۲: $(B - A) - C$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۱

گزینه ۱: با توجه به شکل مشخص است اختلاف دو مجموعه \mathbb{Q} و \mathbb{R} برابر \mathbb{Q}' است.



$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$$

گزینه ۲: نادرست. به عنوان مثال عدد $\frac{1}{2}$ عددی گویاست، ولی صحیح نیست.

گزینه ۳: درست $N \subseteq W$

گزینه ۴: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow W - N = \{0\}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۲

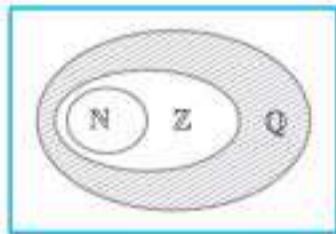
گزینه ۱: عدد ۶ هم طبیعی است و هم صحیح ولی در شکل داخل این دو مجموعه قرار ندارد.

گزینه ۲: عدد ۳ هم طبیعی است و هم صحیح ولی در شکل درون مجموعه اعداد طبیعی قرار ندارد.

گزینه ۴: عدد ۷ هم صحیح است و هم طبیعی، ولی درون مجموعه اعداد طبیعی قرار نگرفته است. همچنین عدد $3 = \frac{6}{2}$ نیز در شکل

درون این دو مجموعه قرار نگرفته است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۳



اگر اشتراک دو مجموعه برابر تهی

باشد، آن دو را جدا از هم گویند. با

توجه به نمودار ون، اشتراک قسمت

هاشورخورده، یعنی $Q - Z$ با N برابر

تهی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۴

$$C \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A - B = \{1, 2, 5\}$$

$$\Rightarrow (A - B) - (C \cup B) = \{1, 2, 5\} - \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2\}$$

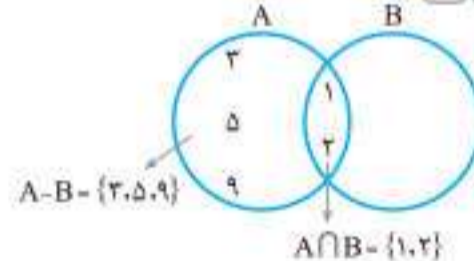
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۵

با توجه به شکل $A \subset B$ است، بنابراین $A - B = \emptyset$ است.

$$C - A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 7, 8, 9\}$$

همان‌طور که می‌بینید، این مجموعه پنج عضو دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶



اکنون چون $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ می‌باشد، متوجه می‌شویم که عدد ۴ فقط عضو B است.

در نتیجه مجموعه B برابر $\{1, 2, 4\}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۷

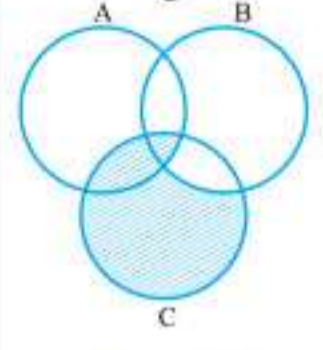
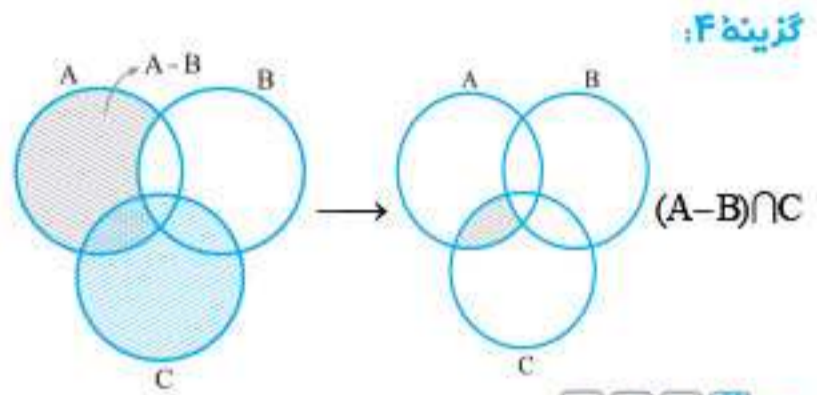
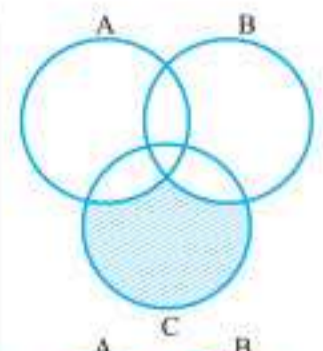
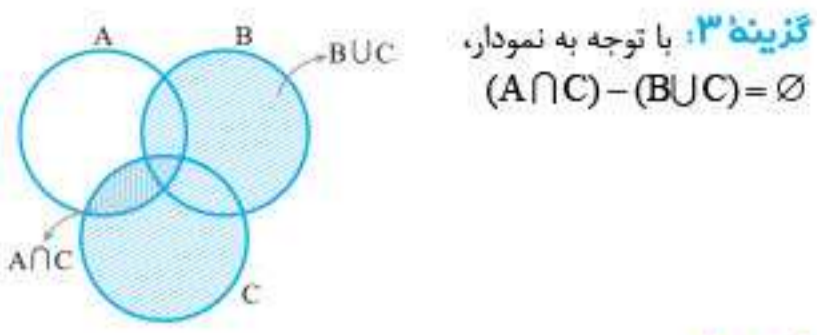
توجه کنید اگر از اعضای مجموعه \mathbb{Z} قدرمطلق بگیریم، همه اعضای آن مثبت یا صفر می‌شوند یعنی $|\mathbb{Z}| = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ بنابراین:

$$B = \{2^{|x|} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

از طرفی در مورد A داریم:

$$A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, \dots\}$$

و در نتیجه $B - A$ ، مجموعه تک عضوی $\{1\}$ است.



۱۴

راهنما

برخی از قوانین جبر مجموعه‌ها

- ◀ خاصیت جابه‌جایی: $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$
- ◀ خاصیت شرکت‌پذیری: $\begin{cases} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{cases}$
- ◀ خاصیت پخش‌ی: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$
- ◀ قوانین جذب: $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$
- ◀ اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه: $\begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$

از آن‌جایی که $A \cup B = A$ است، بنابراین $B \subseteq A$ است. حال به کمک نمودار، حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.



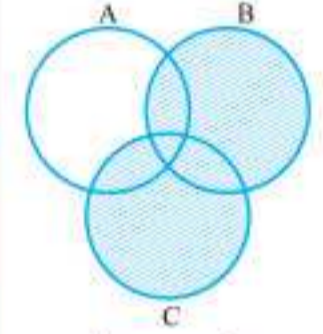
همان‌طور که می‌بینید اجتماع قسمت هاشور خورده با $A \cap B$ که همان B است، مجموعه A را به‌طور کامل پوشش می‌دهد و $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ می‌شود.



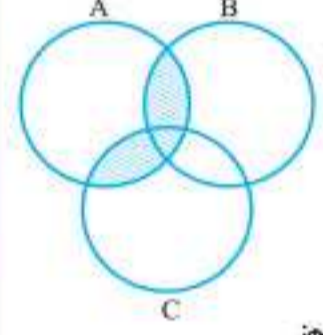
همان‌طور که می‌بینید $C \not\subseteq A - B$ ، $C \not\subseteq B - A$ و $C \not\subseteq (B - A) \cup (A - B)$ می‌تواند زیرمجموعه $A \cup B$ باشد.

چون $A - B = \emptyset$ است، پس $A \subseteq B$ می‌باشد و چون $A - C = \emptyset$ است، پس $A \subseteq C$ می‌باشد یعنی A هم‌زمان، زیرمجموعه B و C است.

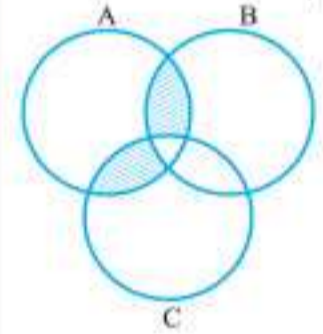
۱۲. مراحل رسم نمودار را به ترتیب جلو می‌بریم: ابتدا $B \cup C$ را رسم می‌کنیم:



سپس $A \cap (B \cup C)$ را رسم می‌کنیم:



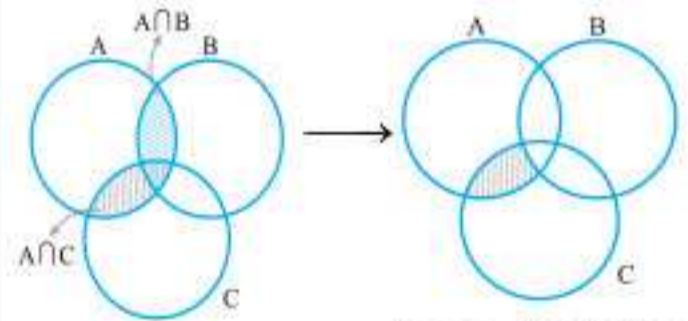
حالا از این مجموعه، $B \cap C$ را کم می‌کنیم:



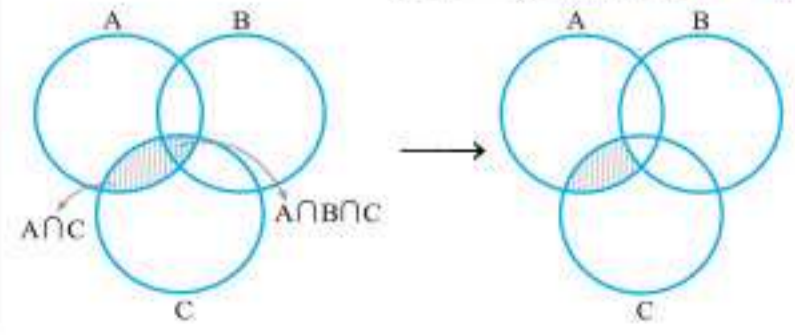
$A \cap (B \cup C) - (B \cap C)$

۱۳. به ترتیب نمودار همه گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

گزینه ۱: $A \cap C - (A \cap B)$



گزینه ۲: $A \cap C - (A \cap B \cap C)$



$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
در یک نقطه بر محور x مماس می‌شود.	دو بار محور x را قطع می‌کند.
$\Delta < 0$	
محور x را قطع نمی‌کند.	

• **حالت ۲:** طول رأس را برابر $\frac{-b}{2a}$ قرار می‌دهیم: سپس مختصات رأس و نقطه دیگر داده شده را در ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ جای گذاری کرده و با حل دستگاه مقادیر a ، b و c را می‌یابیم.

• **حالت ۳:** اگر x_1 و x_2 طول نقطه برخورد منحنی با محور x ها (صفرهای تابع) باشند معادله سهمی را می‌توان به صورت زیر نوشت و برای پیدا کردن مقدار a از نقطه دیگری از سهمی کمک می‌گیریم.

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ با توجه به علامت Δ سه حالت داریم:

فصل ششم: شمارش بدون شمردن

• **استفاده از متمم:** گاهی برای حل برخی از مسائل که حکم آن‌ها حالت‌های مختلفی دارند، به جای بررسی تک تک شرایط حکم از متمم حکم می‌رویم: تعداد حالات نامطلوب - تعداد کل = تعداد حالت‌های مطلوب

• **فاکتوریل:** $n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$

قرار داد: $1! = 1$ $0! = 1$

تبدیل

انتخاب r شیء از n شیء متمایز که ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم باشد:

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

ترکیب

انتخاب r شیء از n شیء متمایز که ترتیب قرار گرفتن اشیا مهم نباشد:

$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

• چند قانون مهم:

۱) $\binom{n}{0} = 1$

۲) $\binom{n}{1} = n$

۳) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

۴) $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

📍 **نکته:** در شمارش و احتمال: $\left. \begin{array}{l} \text{هر جا (و) بود} \leftarrow \text{اشتراک} \\ \text{هر جا (یا) بود} \leftarrow \text{اجتماع} \end{array} \right\}$

📍 **نکته:** در حالت کلی: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ مثال: $\binom{10}{3} = \binom{10}{10-3}$

📍 **مثال:** از بین ۵ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک مختلف به چند طریق:

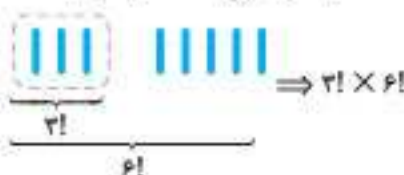
الف) می‌توان ۳ کتاب انتخاب کرد که حداقل ۲ تای آن‌ها ریاضی باشد حالت‌ها را می‌نویسیم:

در این جا ترتیب قرارگیری اهمیت ندارد \leftarrow ترکیب

۲ کتاب ریاضی و ۱ کتاب فیزیک یا ۳ کتاب ریاضی

$\binom{5}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{5}{2}$

ب) می‌توان آن‌ها را در قفسه‌ای چید که کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند:



در این جا ترتیب قرارگیری اهمیت دارد \leftarrow جایگشت

کتاب‌های فیزیک را یک بسته در نظر می‌گیریم.

• **اصل جمع:** اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار به طور کلی $m+n$ روش وجود دارد.

• **اصل ضرب:** اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای انجام مرحله دوم هر کدام از این m انتخاب به n طریق انجام شود، برای انجام این کار به طور کلی mn روش وجود دارد.

جایگشت

فرض کنید چند شیء متمایز داریم، این اشیا را می‌توانیم به حالت‌های مختلفی در کنار یکدیگر در یک ردیف قرار دهیم. به هر حالتی از قرار گرفتن این اشیا کنار هم یک جایگشت می‌گویند (ترتیب پرکردن با شماره گذاری مشخص شده)

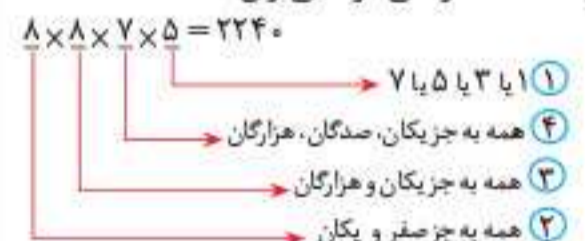
📍 **مثال:** با ارقام ۰ تا ۹:

۱) چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت: همه به جز صفر $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

۲) بدون تکرار ارقام چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت:



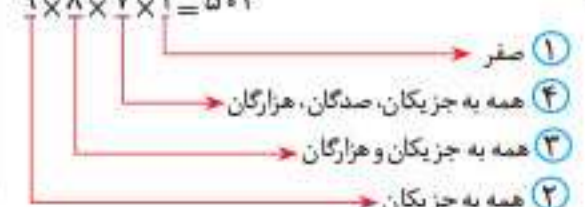
۳) بدون تکرار ارقام چند عدد ۴ رقمی فرد می‌توان ساخت:



۴) بدون تکرار ارقام چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان ساخت: ۲ حالت در نظر می‌گیریم:



• **حالت ۲:** یکان صفر باشد $9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$



فصل هفتم: آمار و احتمال

• **قوانین احتمال:** احتمال رخ دادن پیشامد حتمی (فضای نمونه‌ای) برابر است با:

$$P(S) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

• **نکته:** در مسائل کیسه‌ها اگر مهره‌ها یکی یکی خارج شوند \leftarrow اصل ضرب با هم خارج کنیم \leftarrow ترکیب

• **روش‌های حل سؤالات احتمال:** (برای یافتن تعداد حالت‌های مطلوب)

- 1 اگر حالت‌های مطلوب کم بوده به صورت مستقیم آن‌ها را می‌یابیم.
- 2 از اصل ضرب و جایگشت کمک می‌گیریم.
- 3 از فرمول‌های ترکیب و ترتیب کمک می‌گیریم.
- 4 از قانون متمم استفاده می‌کنیم.

مثال	$n(S)$	آزمایش
پرتاب ۵ سکه: $n(S) = 2^5$	2^n	پرتاب n سکه
پرتاب ۳ تاس: $n(S) = 6^3$	6^n	پرتاب n تاس
پرتاب ۲ سکه و ۴ تاس: $n(S) = 2^2 \times 6^4$	$2^m \times 6^n$	پرتاب m سکه و n تاس
انتخاب ۵ نفر از ۱۵ نفر: $n(S) = \binom{15}{5}$	$\binom{n}{k}$	انتخاب k شیء از n شیء متمایز
قرارگیری ۶ کتاب مختلف کنار هم: $n(S) = 6!$	$n!$	جایگشت n شیء کنار هم

• **متغیر:** ویژگی اعضای جامعه که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

انواع متغیرها

- **متغیر کمی:** متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند.
- **متغیر کمی پیوسته:** متغیر کمی پیوسته متغیری است که اگر بتواند دو مقدار a و b را بپذیرد، کل اعداد حقیقی واقع در بازه (a, b) را نیز می‌تواند بپذیرد.
- **متغیر کمی گسسته:** متغیر کمی که پیوسته نباشد را گسسته گویند.
- **متغیر کیفی:** متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند.
- **متغیر کیفی ترتیبی:** نوعی ترتیب طبیعی در آن‌ها وجود دارد.
- **متغیر کیفی اسمی:** متغیر کیفی که ترتیبی نباشد را اسمی گویند.



گردآورنده: احسان لعل

• **پدیده تصادفی:** هر پدیده‌ای که قبل از رخ دادن، نتیجه آن را نتوان مشخص کرد، اما از همه نتایج ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم.

• **فضای نمونه‌ای:** مجموعه تمام نتایج ممکن از انجام یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای گویند و با S نشان می‌دهند.
برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک برآمد گویند.
پیشامد: زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است.

• **نکته:** اگر فضای نمونه‌ای حاصل از انجام یک آزمایش دارای n برآمد باشد، آن گاه می‌توان 2^n پیشامد برای آن پدیده تصادفی مشخص کرد.

• **پیشامد حتمی:** به پیشامدی که برابر فضای نمونه‌ای باشد: پیشامد حتمی گویند.
• **پیشامد غیرممکن:** به پیشامد \emptyset پیشامد غیرممکن گویند.

• **مثال:** پیشامد این که در پرتاب یک سکه پشت یا رو ظاهر شود \leftarrow پیشامد حتمی

پیشامد این که در پرتاب یک تاس عدد ۷ ظاهر شود \leftarrow پیشامد غیرممکن
• **اعمال روی پیشامدها:** هر پیشامد یک زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای است: بنابراین می‌توانیم اعمال روی مجموعه‌ها نظیر اجتماع، اشتراک، تقاض و ... را روی آن‌ها نیز در نظر بگیریم.

آمار و احتمال

• **آمار:** مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

• **جامعه:** مجموعه تمام افراد یا اشیا که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود. به هر یک از اعضای جامعه آماری یک واحد آماری گویند. به تعداد اعضای یک جامعه، اندازه جامعه (حجم جامعه) گویند.
• **سرشماری:** اگر همه افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، سرشماری انجام داده‌ایم.

• **نمونه تصادفی:** نمونه، زیرمجموعه کوچک‌تری از جامعه آماری است که مطالعه و بررسی‌های مورد نیاز روی آن انجام می‌شود.

• **نکته:** به تعداد اعضای نمونه، اندازه نمونه گفته می‌شود.

• **ویژگی‌های نمونه تصادفی:**

- 1 اعضای نمونه به طور شانس و تصادفی از بین اعضای جامعه آماری انتخاب می‌شوند.
- 2 تعداد اعضای نمونه باید متناسب با تعداد اعضای جامعه باشد.
- 3 نمونه تصادفی باید دربرگیرنده ویژگی‌های اصلی جامعه باشد.
- 4 در سرشماری اندازه نمونه با جامعه برابر است.
- 5 در انتخاب نمونه، همه اعضای جامعه شانس برابری دارند.

• **احتمال:** اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل}}$$

• **نکته:** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای \leq تعداد اعضای هر پیشامد ≤ 0

$$0 \leq n(A) \leq n(S)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

• **نکته:**