

معمولاً وقتی که صبح از خواب بیدار می‌شیم، برنامه‌هایی که برای طول روزمون داریم، تو ذهنمون مرور می‌شن که امروز باید فلان کار رو انجام بدیم، یا به فلان جا بریم برای دیدن یک شخص، حالا می‌تونه کاری یا غیرکاری باشه 😊). یا باید امروز ۸ ساعت مفید درس بخونیم و مثلاً بیشتر روی درس ریاضی یا فیزیک زمان بذاریم. معمولاً اوایل ماجرا، انرژی کافی داریم و همه چی خوب پیش می‌ره، اما اگه آخر شب به یه سری از برنامه‌های طول روزمون نرسیم حس ناتمومی کار بهمون دست می‌ده! یه حسی شبیه عذاب وجدان که کارمون به نحو احسن انجام نشده!

کلن انتهای یه کار خیلی مهم و تأثیرگذاره و خوب انجام دادن آخر یه کار خیلی ارزشمند (قدیمی‌ها یه ضرب‌المثل دارن که می‌گه، کار را که کرد آن که تمام کرد 😊).

تو پروژه «آماده‌شدن برای کنکور» هم آخرای ماجرا مهم‌تره و کسی برنده است که کار رو خوب تمومه کنه! با یه جمع‌بندی خوب، می‌تونیم خودمون رو واسه یه رقابت سرسخت و تنگاتنگ آماده‌تر کنیم. از اون‌جا که ما خیلی سبز هستیم، پس سعی می‌کنیم هر کاری رو خیلی خوب انجام بدیم! توی کتابای جمع‌بندی خیلی سبز، خواستیم با تغییرات جالب و گسترده‌ای که دادیم خیلی خیلی متفاوت باشیم و همه مطالب و مباحث رو به بهترین شکل ممکن طبقه‌بندی کنیم.

خلاصه این‌که: جمع‌بندی کردن رو جدی بگیرید و خیلی خوب و با صبر و حوصله فراوان این کار رو به ته برسونید تا ته ماجرا اون حس بده نیاد سراغتون! ما هم که این‌جا خیلی خیلی هواتونو داریم. دوستون داریم.

«خطبه خط این کتاب، با احترام
تقدیم به همه دانش‌آموزان و معلم‌های عزیز»

به کتاب جمع‌بندی **حسابان و ریاضیات پایه** خوش آمدید. من همیشه به دنبال یک جواب منطقی برای این سؤال دانش‌آموزان بودم: «استاد! کدام قسمت‌ها مهم‌تر هستند که اون‌ها رو بیشتر بخونیم، برای چه نکاتی کم‌تر وقت بذاریم؟» سعی کردم با تألیف این کتاب، جواب آبرومندی برای دانش‌آموزان عزیزم، آماده کرده باشم. توی این کتاب، سعی کردیم «دست‌اندازها» رو از سر راه یادگیری دانش‌آموزان برداریم و «ترمز» پیشرفت در فراگیری مطالب نباشیم. با استفاده از تجربه سال‌ها تدریس و بارها تألیف، گفتنی‌ها رو گفتیم و از گفتن هر آن‌چه که ممکن بود دانش‌آموز عزیزمون رو از مسیر اصلی دور کنه پرهیز کردیم، در واقع: «این تمام چیزی بود که می‌خواستیم بگیم، نه تمام چیزی که می‌تونستیم بگیم» شاید سخت‌ترین قسمت تألیف این کتاب، «مقاومت» در برابر نوشتن مطالبی بود که در طول سال خوندنشون خالی از لطف نیست ولی قطعاً در کتاب جمع‌بندی مسیر پیشرفت رو ناهموار می‌کنه. این کتاب شامل ۱۱ فصل هست که تمام مباحث هر سه پایه دهم، یازدهم و دوازدهم رو در بر می‌گیره. مهم‌ترین ویژگی‌های این کتاب به نظرم این‌ها هستند:

- ۱ تیپ‌بندی تست‌های هر مبحث
 - ۲ درس‌نامه‌های آموزشی کاربردی برای هر تیپ از هر مبحث
 - ۳ ارائه مثال حل‌شده داخل درس‌نامه بلافاصله بعد از بیان هر نکته، برای درک بهتر.
 - ۴ پاسخ‌های تشریحی جذاب که گاهی با ارائه راه دوم یا راه سوم، سعی شده راه‌حل‌های خلاقانه و ایده‌های زیبا در حل مسائل بیان بشه.
 - ۵ ستاره‌داربودن کادر درس‌نامه‌ها، برای بیان اهمیت اون درس‌نامه در کنکور
- از این نکته هم غافل نباشید که اگرچه تنوع و حل مسائل مختلف مهمه، اما مهم‌تر از اون کیفیت تسلط به سؤالات هست، یعنی اگر یک کتاب تست رو خیلی خوب کار کنید، بهتر و مؤثرتر هست تا این‌که چندین کتاب مختلف رو سطحی مطالعه و تمرین کنید.
- پس اگر احساس می‌کنید از مطالعاتی که انجام دادید راضی نیستید، این کتاب رو اونقدر تمرین کنید تا کاملاً به تست‌ها مسلط شوید.
- متواضعانه ازتون می‌خوام نظر، پیشنهاد و انتقاد خودتون از طریق این آیدی برای من بفرستید.

 [mahdiazizi_math](https://t.me/mahdiazizi_math)

و در نهایت:

سپاس از همسر عزیزم که حضورش پشتوانه‌ای بس عظیم برای من است.
سپاس از مدیریت محترم انتشارات خیلی سبز، جناب آقای دکتر نصری
سپاس از مدیر تألیف این کتاب، دوست عزیزم جناب آقای مهندس نوید شاهی
سپاس از استاد محسن فراهانی که بدون همکاری و صبوری ایشان، تألیف این کتاب ممکن نبود.

| | | |
|-----|-------------------------------|-----------|
| ۷ | تابع | فصل اول |
| ۴۴ | مثلثات | فصل دوم |
| ۷۰ | حد و پیوستگی | فصل سوم |
| ۹۴ | مشتق | فصل چهارم |
| ۱۱۲ | کاربرد مشتق | فصل پنجم |
| ۱۳۴ | تعیین علامت و نامعادله | فصل ششم |
| ۱۴۱ | معادلات و سهمی | فصل هفتم |
| ۱۵۵ | توابع نمایی و لگاریتم | فصل هشتم |
| ۱۶۳ | توان‌های گویا و عبارتهای جبری | فصل نهم |
| ۱۶۸ | مجموعه، الگو و دنباله | فصل دهم |

۱۷۷

هندسه تحلیلی

فصل یازدهم

۱۸۲

آزمون‌های جامع

۱۸۶

پاسخ‌نامه تشریحی

۲۶۴

پاسخ‌نامه کلیدی

تعیین علامت و نامعادله

فصل ۶

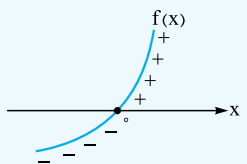
در یک کلام، آچار فرانسه است. در فصل‌های تابع، حد و کاربرد مشتق حسابی به کار می‌آید.

پیش‌نیازهای این فصل: اتحاضا و خواص نامساوی‌ها، نمودار قدر مطلق و رادیکال

مهم‌ترین بحث این فصل: نامعادلات گویا

فصل‌های منطبق با کتاب درسی: فصل ۴ ریاضی ۱

۱ تعیین علامت توابع درجه ۱ یا درجه ۲



علامت $f(x)$ اگر نمودار تابع $f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، در این صورت:

نمودار تابع f بالای محور x ‌ها است. $f(x) = 0 \Rightarrow$

نمودار تابع f با محور x برخورد می‌کند. $f(x) = 0 \Rightarrow$

نمودار تابع f پایین محور x ‌ها است. $f(x) < 0 \Rightarrow$

علامت چندجمله‌ای درجه اول به صورت $P(x) = ax + b$ در اطراف ریشه‌اش عوض می‌شود که در جدول تعیین علامت، علامت خانه اول از سمت راست، همان علامت a (ضریب x) است:

| نمونه | ویژگی | نمودار | $P(x) = ax + b$ |
|---|----------------------|--------|--|
| $\begin{array}{c c} x & 3 \\ \hline 2x - 6 & - \quad \quad + \end{array}$ | شیب مثبت ($a > 0$) | | $\begin{array}{c c} x & -\frac{b}{a} \\ \hline P(x) & - \quad \quad + \end{array}$ |
| $\begin{array}{c c} x & 3 \\ \hline 3 - x & + \quad \quad - \end{array}$ | شیب منفی ($a < 0$) | | $\begin{array}{c c} x & \frac{b}{a} \\ \hline P(x) & + \quad \quad - \end{array}$ |

علامت چندجمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ برحسب تعداد ریشه‌های سه حالت دارد:

حالت اول: اگر فاقد ریشه باشد ($\Delta < 0$)، علامت آن همواره موافق علامت a است:

| اصطلاح | نمونه جدول تعیین علامت | نمودار | $ax^2 + bx + c$ |
|-------------|---|--------|-----------------|
| همواره مثبت | $\begin{array}{c c} x & -\infty \quad +\infty \\ \hline x^2 + 1 & + \end{array}$ | | $a > 0$ |
| همواره منفی | $\begin{array}{c c} x & -\infty \quad +\infty \\ \hline -x^2 + x - 1 & - \end{array}$ | | $a < 0$ |

حالت دوم: اگر ریشه مضاعف (دو ریشه مساوی) داشته باشد ($\Delta = 0$)، علامت در اطراف ریشه عوض نمی‌شود و علامت آن همواره همان علامت a است.

| اصطلاح | نمونه | جدول تعیین علامت | نمودار | $ax^2 + bx + c$ |
|--------|--|---|--------|-----------------|
| نامنفی | $\begin{array}{c c} x & 2 \\ \hline x^2 - 4x + 4 & + \quad \quad + \end{array}$ | $\begin{array}{c c} x & -\frac{b}{2a} \\ \hline P(x) & + \quad \quad + \end{array}$ | | $a > 0$ |
| نامثبت | $\begin{array}{c c} x & 1 \\ \hline -x^2 + 2x - 1 & - \quad \quad - \end{array}$ | $\begin{array}{c c} x & -\frac{b}{2a} \\ \hline P(x) & - \quad \quad - \end{array}$ | | $a < 0$ |

حالت سوم: اگر چندجمله‌ای درجه دوم، دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، علامت چندجمله‌ای در اطراف ریشه‌ها عوض می‌شود که باز هم علامت اولین خانه از سمت راست در جدول، همان علامت ضریب x^2 یعنی علامت a است.

| نمونه | جدول تعیین علامت | نمودار | $ax^2 + bx + c$ |
|-------|--|--------|-----------------|
| | $\begin{array}{c ccc} x & & -1 & 2 \\ \hline P(x) & + & - & + \end{array}$ | | $a > 0$ |
| | $\begin{array}{c ccc} x & & -2 & 2 \\ \hline P(x) & - & + & - \end{array}$ | | $a < 0$ |

وایسانو! مواظب به تفاوت دو مورد زیر باشه:

$$\begin{array}{c|c} x & 5 \\ \hline P(x) & - \quad + \end{array} \Rightarrow \text{ریشه ساده } P(x) \text{ است. } x = 5 \xrightarrow{\text{مثلاً}} P(x) = x - 5 \text{ یا } 5 - x \xrightarrow{\text{خانه اول از راست}} P(x) = x - 5$$

$$\begin{array}{c|c} x & 5 \\ \hline P(x) & + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow \text{ریشه مضاعف } P(x) \text{ است. } x = 5 \xrightarrow{\text{مثلاً}} P(x) = (x - 5)^2$$

۴۴۷- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = (m+1)x^2 + 6x + m - 7$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $m+n$ کدام است؟

| | | | | |
|--------|-----|-------|-----|-----|
| x | n | | | |
| $P(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| | | -11 | 4 | 1 |

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۴۴۸- اگر نامساوی $(m+1)x^2 - 8x + m + 1 \leq 0$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، حدود m کدام است؟

| | | | |
|----------|----------|-------------|------------------|
| $m > -1$ | $m < -1$ | $m \leq -5$ | $-5 \leq m < -1$ |
|----------|----------|-------------|------------------|

۴۴۹- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = ax + b$ به شکل روبه‌رو باشد، جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = a - bx$ کدام است؟

| | | |
|--------|-----|-----|
| x | 3 | |
| $P(x)$ | $+$ | $-$ |

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

| | | | | | | | |
|--------|----------------|-----|----------------|-----|---------------|-----|---------------|
| x | $-\frac{1}{3}$ | x | $-\frac{1}{3}$ | x | $\frac{1}{3}$ | x | $\frac{1}{3}$ |
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| | 4 | | 3 | | 2 | | 1 |

تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها در حالت کلی

برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها با هر درجه دلخواه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

| مرحله | تعیین علامت سریع |
|-------|---|
| ۱ | عبارت را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌ها به دست آیند. |
| ۲ | ریشه‌ها را در جدول، به ترتیب از چپ به راست (و از کوچک به بزرگ) می‌نویسیم. |
| ۳ | علامت ضریب جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد، همان علامت خانه اول، از سمت راست است. |
| ۴ | علامت‌ها از سمت راست، یکی در میان عوض می‌شوند، به جز در ریشه‌های مضاعف (تکراری) که علامت تغییر نمی‌کند. |

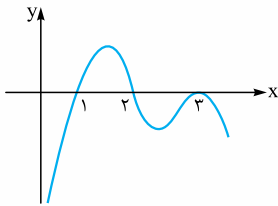
وایسانو! دقت کنید که چون علامت خانه اول از سمت راست در جدول منفی است؛ یعنی شاخه سمت راست نمودار (برای $x > 3$) زیر محور x قرار دارد.

| | | |
|------|----|----|
| x | -2 | -1 |
| P(x) | - | + |

۴۵۰- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = x^2 + ax^2 + \Delta x + b$ به صورت روبه‌رو است. حاصل $a \times b$ کدام است؟

- ۱) -۸
- ۲) ۶
- ۳) -۶
- ۴) ۸

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)



۴۵۱- عبارت $P(x) = (x^2 - 4x + 2)(2x^2 + ax + b)$ همواره نامنفی است. $a - b$ کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۱۴
- ۳) -۱۴
- ۴) -۲

۴۵۲- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه عبارت $y = f(x)(x^2 - 5x + 4)$ در بازه (a, b) مثبت است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱) ۴
- ۲) ۳
- ۳) ۲
- ۴) ۱

۳ تعیین علامت عبارات گویا

تعیین علامت یک عبارت کسری گویا، شبیه تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها است، فقط بدانید:

۱ ریشه‌های مخرج کسر، عبارت را تعریف‌نشده می‌کنند.

۲ ریشه‌های صورت کسر، عبارت را صفر می‌کنند.

۳ این‌جا هم علامت خانه اول از سمت راست، از ضرب علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه هر عبارت، به دست می‌آید، فقط در نهایت علامت صورت را به علامت مخرج تقسیم می‌کنیم. (یا این‌که حاصل عبارت گویا را به ازای عددی دلخواه و بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، مشخص می‌کنیم).

۴ علامت‌ها از سمت راست یکی‌درمیان عوض می‌شوند، به جز در ریشه‌های مضاعف (تکراری).

$$P(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x(x-1)^2}$$

$x=2$ $x=-2$
 \uparrow \uparrow
 $x=0$ $x=1$
 \downarrow \downarrow

مثلاً عبارت گویای $P(x) = \frac{4-x^2}{x^3-2x^2+x}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

ابتدا صورت و مخرج را تجزیه و ریشه‌یابی می‌کنیم:

| | | | | |
|------|----|---|---|---|
| x | -2 | 0 | 1 | 2 |
| P(x) | + | - | + | - |

تن تن

فقط $x=1$ ریشه مضاعف است. ضمناً علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ها در صورت

$(-x^2)$ و در مخرج (x^3) را که ضرب کنیم، حاصل منفی می‌شود:

یا مثلاً به ازای عددی بزرگتر از ۲، مثلاً $x=3$ حاصل $P(x)$ منفی می‌شود، پس

خانه اول از سمت راست منفی خواهد بود.

وایسازو! اگر یک عدد هم ریشه صورت باشد هم ریشه مخرج، چه کنیم؟

صورت و مخرج رو ساده کنید، فقط بدونید اون عدد عضو دامنه عبارت نیست، مثلاً به تعیین علامت زیر دقت کنید:

$$\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} > 0 \xrightarrow{x \neq 2} \frac{x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{+} \begin{matrix} 0 \\ - \\ + \end{matrix} \xrightarrow{x > -1} x < -1 \text{ یا } x > 0 \xrightarrow{x \neq 2} x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) - \{2\}$$

تن

۴۵۳- عبارت $P(x) = \frac{(2x^2 - 3x - 5)(x+1)}{(x^2 + x + 1)(1-x)}$ در بازه (a, b) مثبت است. بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) ۱/۵
- ۳) ۲
- ۴) ۲/۵

| | | | |
|------|------|---|---|
| x | -1/2 | 0 | 4 |
| P(x) | - | + | + |

تن

۴۵۴- جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{(x+d)(x-a)^2}{ax^2 + bx + c}$ به صورت روبه‌رو است. مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

- ۱) ۷
- ۲) ۸
- ۳) ۹
- ۴) ۱۰

۴۵۵- عبارت $A = \frac{(m-2)x^2 + 6x + 2m-1}{-x^2 - 2x - 7}$ به ازای هر x منفی است. حدود m کدام است؟

- ۱) $m < -1$
- ۲) $m > 3/5$
- ۳) $m > 2/5$
- ۴) $2 < m < 3/5$

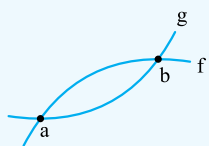
۴۵۶- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x-3} > 0$ ، به ازای $x > 3/4$ ، بازه $(2, 4)$ باشد. مقدار m کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) صفر
- ۳) ۱
- ۴) ۲

۴۵۷- اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۵
- ۲) ۶
- ۳) ۷
- ۴) ۸

برای حل نامعادلات چندجمله‌ای به فرم $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$ دو راه اصلی وجود دارد:
راه اول: نامعادله را به شکل $f(x) - g(x) > 0$ نوشته، آن را ساده کرده و عبارت نهایی را تعیین علامت کنیم.

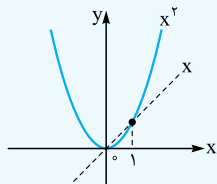


راه دوم: با استفاده از رسم نمودار توابع فرض $f(x)$ و $g(x)$ ببینیم:

- ۱ کجا یکدیگر را قطع کرده‌اند $x = b, x = a \Leftarrow f(x) = g(x) \Leftarrow$
- ۲ کجا نمودار f بالای نمودار g است $a < x < b \Leftarrow f(x) > g(x) \Leftarrow$
- ۳ کجا نمودار f پایین نمودار g است $x < a$ یا $x > b \Leftarrow f(x) < g(x) \Leftarrow$

مثلاً فرض کنید $f(x) = x^2$ و $g(x) = x$: در این صورت:

$$f(x) > g(x) \xrightarrow{\text{یعنی}} x^2 > x \xrightarrow{\text{یعنی}} x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \oplus \quad | \quad \ominus \quad | \quad \oplus \\ x < 0 \quad \text{یا} \quad x > 1 \end{array}$$



طبق شکل دقیقاً در فواصل $x > 1$ یا $x < 0$ نمودار $y = x^2$ بالای نمودار $y = x$ است.

بدیهی است که در فاصله $0 < x < 1$ ، نمودار $y = x^2$ پایین نمودار $y = x$ است؛ یعنی جواب نامعادله $x^2 < x$ همان جواب نامعادله $x^2 - x < 0$ ؛ یعنی بازه $0 < x < 1$ است.

نکته توی اگر دو تابع f و g پیوسته باشند، بازه جواب نامعادلاتی به فرم $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$ از نقاط برخورد دو تابع f و g ساخته می‌شود:

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

یعنی جواب نامعادلات $x^2 > x$ یا $x^2 < x$ بازه‌هایی هستند که اول و آخر آن‌ها $x = 0$ یا $x = 1$ است.

(تجربی خارج ۹۹)

۴۵۸- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۴)

هنگام حل نامعادلات به صورت $f(x) > g(x)$ اگر f یا g کسری باشند، حق طرفین وسطین کردن نداریم، بلکه باید همه عبارات را به یک طرف برده، ساده کنیم و تعیین علامت کنیم، مگر در یک حالت:

عبارت مخرج همواره مثبت یا همواره منفی باشد. (در حالت منفی، بعد از طرفین وسطین کردن، جهت نامعادله عوض می‌شود.)

مثلاً نامعادلات زیر را ببینید:

$$1 \quad \frac{2x}{x+3} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x}{x+3} - 1 \leq 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x-3}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -3 \quad \quad 3 \\ + \quad \quad - \quad \quad 0 \quad \quad + \\ \text{تن} \end{array} \Rightarrow -3 < x \leq 3$$

$$2 \quad \frac{4x}{x^2+3} \leq 1 \xrightarrow{\text{مخرج همواره مثبت}} 4x \leq x^2+3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2-4x+3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad \quad 3 \\ + \quad \quad - \quad \quad + \end{array} \quad x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3$$

وایستادو! هنگام حل نامعادلات، اگر جواب نامعادله در گزینه‌ها به صورت «بازه» بیان شده باشد، می‌توانیم با امتحان گزینه‌ها، سوال رو حل کنیم؛ یعنی: «عددی که باعث تفاوت بین گزینه‌ها می‌شه رو انتخاب و در نامعادله پیک کنیم.»

مثلاً جواب نامعادله $\frac{3x+1}{2x-6} < 1$ را از بین گزینه‌های زیر مشخص می‌کنیم:

(۱) $(-\infty, -7)$ (۲) $(3, \infty)$ (۳) $(-7, 3)$ (۴) $(-\infty, -7) \cup (3, \infty)$

عددی انتخاب می‌کنیم که بین گزینه‌ها تفاوت ایجاد کند، مثلاً $x = 4$ که در بعضی گزینه‌ها هست و در بعضی‌ها نیست:

رد گزینه‌های (۲) و (۴) $\Rightarrow \frac{13}{2} < 1 \Rightarrow \frac{12+1}{8-6} < 1 \Rightarrow x = 4$

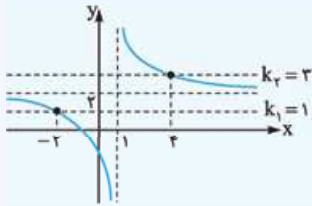
حالا برای بررسی تفاوت گزینه‌های (۱) و (۳) می‌توانیم $x = 0$ را امتحان کنیم:

جواب گزینه (۳) \Rightarrow گزینه (۳) عدد $x = 0$ را دارد \Rightarrow درست $\Rightarrow -\frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \frac{0+1}{0-6} < 1 \Rightarrow x = 0$

نکته توی در نامعادلاتی به شکل $k_1 < \frac{ax+b}{cx+d} < k_2$ ، اگر نامساوی‌ها را به مساوی تبدیل کنیم، x ‌های به دست آمده از معادلات

$k_1 = \frac{ax+b}{cx+d}$ و $k_2 = \frac{ax+b}{cx+d}$ اعداد ابتدا یا انتهای بازه جواب نامعادله هستند. مثلاً جواب نامعادله $3 < \frac{2x+1}{x-1} < 1$ ، یعنی فواصلی که نمودار

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ بین دو خط $y = 1$ و $y = 3$ باشد.



$$\frac{2x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x+1 = x-1 \Rightarrow x = -2$$

$$\frac{2x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 3x-3 \Rightarrow x = 4$$

برای $x > 4$ یا $x < -2$ نمودار تابع بین دو خط $y=1$ و $y=3$ قرار دارد.

پس جواب نامعادله $1 < \frac{2x+1}{x-1} < 3$ به شکل $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ است و اعداد -2 و 4 ریشه‌های معادلات $1 = \frac{2x+1}{x-1}$ هستند.

۴۵۹- مجموعه جواب نامعادله $\frac{yx-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ ، به صورت بازه، کدام است؟

- (۱) $(-4, 2) \cup (2, 3)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$ (۴) $(-1, 2)$

۴۶۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه (a, b) پایین‌تر از خط به معادله $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 6 (۳) 8 (۴) ∞

۴۶۱- مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

- (۱) $(0/6, 1/5)$ (۲) $(0/8, 1/2)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(0/8, 2)$

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۴۶۲- اگر $0 < \frac{1-3x}{x+1} < -2$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{4}\right]$ چند عضو دارد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

۴۶۳- نمودار تابع $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ ، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=0$ و $y=-2$ واقع می‌شود؟

- (۱) 1 (۲) 3 (۳) 4 (۴) صفر

۶ نامعادلات رادیکالی

برای حل نامعادلات شامل رادیکال:

راه اول: با توجه به فرجه رادیکال شرط تعریف شده بودن عبارت داده شده را چک می‌کنیم، سپس با توان‌رسانی، رادیکال را حذف کرده و نامعادله را حل می‌کنیم. در نهایت بین دامنه و Xهای به دست آمده از حل نامعادله اشتراک می‌گیریم.

$$\sqrt{O} > \square \xrightarrow{\text{شرط}} O \geq 0 \xrightarrow{\text{حالا}} 2 \text{ به توان } 2$$

$$\sqrt{O} < \square \xrightarrow{\text{شرط}} \begin{cases} O \geq 0 \\ O > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا}} 2 \text{ به توان } 2$$

راه دوم: استفاده از رسم شکل و این که «کجا! کدام نمودار بالاتر یا پایین‌تر هست».

راه سوم: اگر جواب نامعادله در گزینه‌ها به شکل بازه بود \Leftarrow امتحان گزینه‌ها

مثال: نامعادله $\sqrt{x+3} < x+1$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > -1 \quad (I)$$

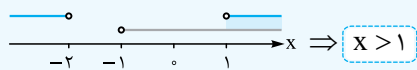
راه اول: اولاً؛ شرط تعریف عبارت را به دست می‌آوریم:

$$x+3 < (x+1)^2 \Rightarrow x+3 < x^2+2x+1$$

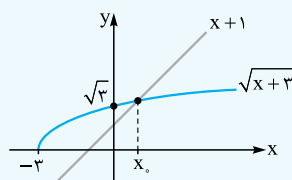
ثانیاً؛ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x^2+x-2 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} -2 & 1 \\ + & - & + \end{matrix} \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1 \quad (II)$$

حالا بین جواب دو مرحله، اشتراک می‌گیریم:



راه دوم: در شکل، x_0 نقطه برخورد دو تابع است:



$$\sqrt{x+3} = x+1 \xrightarrow{\text{تایلو حدس بزن}} x_0 = 1$$

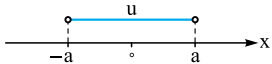
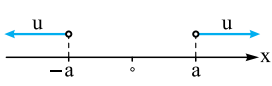
طبق شکل در بازه $x > 1$ نمودار $y = \sqrt{x+3}$ پایین نمودار $y = x+1$ است.

(برگرفته از کتاب درسی)

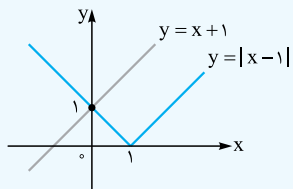
۴۶۴- جواب نامعادله $x + \sqrt{x} \leq 6$ کدام است؟

- (۱) $(0, 4)$ (۲) $\mathbb{R} - [0, 4]$ (۳) $\mathbb{R} - (0, 4)$ (۴) $[0, 4]$

تیپ اول: نامعادلات کلاسیک:

| نامعادله | جواب | نمونه |
|----------------------|---|---|
| $ u < a$ | $a < 0$ جواب ندارد. | امکان پذیر نیست. $ x+4 < -3 \Rightarrow$ |
| | $a \geq 0$ $-a < u < a$  | $ 2x-3 < 5 \Rightarrow -5 < 2x-3 < 5$ $\Rightarrow -2 < 2x < 8 \Rightarrow -1 < x < 4$ |
| $ u > a$ | $a \leq 0$ همواره جواب دارد. | $ x-5 > -6 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ |
| | $a > 0$ $u < -a$ یا $u > a$  | $\frac{1}{ 2x-1 } \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2} \text{ عکس}} 2x-1 \geq 3$ $\Rightarrow 2x-1 \leq -3$ یا $2x-1 \geq 3 \Rightarrow x \leq -1$ یا $x \geq 2$ |
| $ f(x) \geq g(x) $ | به توان ۲ رساندن طرفین | $ x+2 \geq x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4x + 4 \geq x^2$ $\Rightarrow 4x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ |
| $ f(x) \leq g(x) $ | به توان ۲ رساندن طرفین | $ 2x-1 < x-3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x-1)^2 < (x-3)^2$ $\Rightarrow (2x-1)^2 - (x-3)^2 < 0$ $\xrightarrow{\text{مزدوج}} (x+2)(3x-4) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < x < \frac{4}{3}$ |

تیپ دوم: استفاده از رسم نمودار



مثلاً جواب نامعادله $|x-1| < x+1$ را به دست می آوریم. یعنی می خواهیم ببینیم در چه بازه‌های نمودار $y = |x-1|$ پایین نمودار $y = x+1$ قرار دارد. واضح است که $x=0$ طول نقطه برخورد دو نمودار است. در بازه $(0, +\infty)$ نمودار $y = |x-1|$ پایین نمودار $y = x+1$ قرار دارد.

وایساندوا! کماکان اگر گزینه‌ها به صورت بازه بود، از امتحان گزینه‌ها استفاده کنید.

نگنهم در حل نامعادلاتی به شکل $|\frac{\square}{\bigcirc}| < a$ یا $|\frac{\square}{\bigcirc}| > a$ ، اگر گزینه‌ها بازه‌ای نبود که عددگذاری کنیم، بهتر است با کنارگذاشتن ریشه مخرج این گونه عمل کنیم:

$$|\frac{\square}{\bigcirc}| < a \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} |\square| < a|\bigcirc| \xrightarrow{\text{توان ۲}} \dots \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} \dots \xrightarrow{\text{مزدوج}} \dots \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \dots$$

مثلاً جواب نامعادله $|\frac{2x+3}{x-1}| \geq 1$ را می یابیم:

$$\xrightarrow{x \neq 1 \text{ ریشه مخرج}} |2x+3| \geq |x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x+3)^2 \geq (x-1)^2 \Rightarrow (2x+3)^2 - (x-1)^2 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (2x+3+x-1)(2x+3-x+1) \geq 0 \Rightarrow (3x+2)(x+4) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{cccc} & -4 & & -\frac{2}{3} \\ & | & - & | & \\ + & & & & + \end{array}$$

بنابراین $\{1\} - (-\frac{2}{3}, +\infty) \cup (-\infty, -4]$ می باشد.

تذکر اگر رسم نمودار قدرمطلق سخت بود یا تیپ معروفی نبود، براساس ریشه داخل قدرمطلق، نامعادله را حالت بندی می کنیم و بین جواب‌ها اجتماع می گیریم.

مثلاً نامعادله $|x-2| \geq 3$ را حل می کنیم:

ریشه داخل قدرمطلق $x=0$ است:

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow (x-2)x \geq 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{cccc} & -1 & & 3 \\ & | & - & | & \\ + & & & & + \end{array} \xrightarrow{x \geq 0} [3, +\infty) \\ x < 0 \Rightarrow (x-2)(-x) \geq 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \leq 0 \xrightarrow{\frac{\Delta < 0}{a > 0}} \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$\emptyset \cup [3, +\infty) = [3, +\infty)$$

بنابراین جواب نامعادله به این شکل است:



(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۴۶۵- مجموعه جواب نامعادله $x^2 - mx + n \geq 0$ به صورت $|x - 4| \geq 3$ است. حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۳

۴۶۶- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام است؟

- (۱) (۰, ۱) (۲) (۰, ۳) (۳) (۱, ۲) (۴) (۱, ۳)

۴۶۷- مجموعه جواب نامعادله $1 > \left| \frac{2-x}{2x-3} \right|$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(1, \frac{3}{2})$ (۲) $(1, \frac{5}{3}) - \{\frac{3}{2}\}$ (۳) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ (۴) $(\frac{5}{3}, 2)$

۴۶۸- در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۶۹- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) (-۲, ۱) (۲) (-۱, ۱) (۳) (-۱, ۲) (۴) (۱, ۲)

۴۷۰- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ ، در بالای نمودار تابع $f(x) = |x-1| - 2$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۷۱- مجموع اعداد صحیحی که در مجموعه جواب‌های نامعادله $4 < |x-1| - 3$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) صفر

۴۷۲- مجموعه جواب نامعادله $6 > |x+1| + |x-7|$ به کدام صورت است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) \emptyset (۳) $|x-3| < 3$ (۴) $|x-2| < 1$

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۲)

۴۷۳- در بازه (a, b) عبارت $14x^2 + 73x + 14$ منفی و عبارت $|x-1| - \frac{x-1}{3}$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{23}{3}$ (۳) $\frac{4}{15}$ (۴) $\frac{67}{15}$

آزمون

[برای مشاهده پاسخ‌های تشریحی این آزمون، QR Code صفحه شناسنامه کتاب را اسکن کنید.]

۱- به ازای چه مقادیری از m ، جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + (m - 1)x + \frac{1}{4}$ به صورت زیر است؟

| | | | |
|--------|-------|-------|---|
| x | x_1 | x_2 | |
| $f(x)$ | - | + | - |

(۱) $(-\infty, 3)$ (۲) $(2, 3)$
(۳) $(-1, 3)$ (۴) $(-1, 2)$

۲- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ با شرط $x > -1$ در بازه (a, b) زیر محور x ها قرار دارد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(برگرفته از کتاب درسی)

۳- علامت عبارت $P(x) = \frac{ax+12}{3x+b}$ فقط در بازه $(-1, 6)$ مثبت است. حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) -۵

۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $2 \geq \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10}$ بازه $(a, b]$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۵- در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x-1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد؟

- (۱) $(-\frac{4}{3}, 1)$ (۲) $(-\frac{2}{3}, 1)$ (۳) $(-\frac{4}{3}, 2)$ (۴) $(-\frac{2}{3}, 2)$

۴۴۱ **گزینه ۲** اولاً؛ $x = 0$ مجانب قائم است؛ پس ریشهٔ مخرج است، یعنی $b = 0$ است.

ثانیاً؛ تابع از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد؛ پس:

$$y = \frac{ax^2 - 1}{x} \xrightarrow{(2,0)} 0 = \frac{4a - 1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین $a + b = \frac{1}{4}$ است.

۴۴۲ **گزینه ۴** اولاً؛ مجانب افقی $y = 2$ است؛ پس $a = 2$ می‌باشد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow a = 2$$

ثانیاً؛ $x = \frac{1}{3}$ ریشهٔ صورت است، چون تابع را صفر کرده (به محور x برخورد کرده).

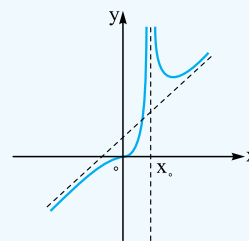
ثالثاً؛ چون نمودار حفره دارد، پس طول آن حفره هم ریشهٔ مخرج است و هم ریشهٔ صورت، ضمناً از $\frac{1}{3}$ هم بزرگ‌تر است.

$$f(x) = \frac{2x^2 + bx + c}{(x+3)(x-2)}$$

ریشه‌های مخرج $x = 2$ و $x = -3$ هستند. $x = 2$ که از $\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر است، طول حفره است؛ پس ریشهٔ صورت هم هست. بنابراین ریشه‌های صورت $x = \frac{1}{3}$ و $x = 2$ هستند.

$$2x^2 + bx + c \xrightarrow{\substack{x_1=2 \\ x_2=\frac{1}{3}}} \begin{cases} S = \frac{\Delta}{2} = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -5 \\ P = 1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

۴۴۳ **گزینه ۴** اولاً؛ نمودار تابع f دارای انفصال مضاعف است؛ پس مخرج، ریشهٔ مضاعف مثبتی به نام x_0 دارد:



چون x_0 مثبت است؛ پس مخرج کسر به شکل $(x-1)^2$ یعنی $x^2 - 2x + 1$ است تا $x_0 = 1$ باشد؛ بنابراین $b = -2$ است.

ثانیاً؛ نمودار تابع f فقط یک ریشهٔ $x = 0$ دارد (شبهه به لُرا)؛ پس در صورت کسر $a = 0$ بوده تا فقط x^2 باقی بماند و یک ریشهٔ $x = 0$ داشته باشد.

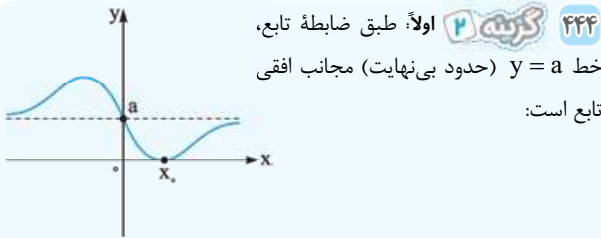
بنابراین $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ، حالا \min را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2(x-1)(2(x-1)-2x)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

| | | | |
|------|------------|--------------|------------|
| x | 0 | 1 | 3 |
| y' | \nearrow | \downarrow | \nearrow |
| | | تن | |

$$\Rightarrow \min \begin{cases} x = 3 \\ y = f(3) = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4} \end{cases}$$



۴۴۴ **گزینه ۲** اولاً؛ طبق ضابطهٔ تابع، خط $y = a$ (حدود بی‌نهایت) مجانب افقی تابع است:

پس طبق نمودار می‌توان گفت تابع از نقطه $(0, a)$ می‌گذرد:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + \lambda}{x + 4} \xrightarrow{(0,a)} a = \frac{0 + 0 + \lambda}{0 + 4} \Rightarrow a = 2$$

ثانیاً؛ عرض \min برابر صفر است؛ پس معادله $f(x) = 0$ ، ریشهٔ مضاعف دارد (آن هم ریشهٔ مضاعفی مثبت، چون $x_0 > 0$ است).

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + bx + \lambda = 0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b = \pm 8$$

به ازای $b = 8$ ، معادلهٔ $2x^2 + 8x + 8$ به شکل $2x^2 + 8x + 8$ درآمده و ریشهٔ مضاعف منفی دارد که قابل قبول نیست:

$$2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2(x+2)^2$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه}} x = -2 < 0$$

پس $b = -8$ قابل قبول است و $a + b = -6$ خواهد بود.

۴۴۵ **گزینه ۱** با توجه به نمودار، تابع دو مجانب قائم قرینه هم دارد؛ پس مخرج باید دو ریشهٔ قرینه داشته باشد، در نتیجه:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4a > 0 \xrightarrow{b=0} a < 0$$

$$2) \text{ دو ریشهٔ قرینه } \Rightarrow S = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

۴۴۶ **گزینه ۳** ضابطهٔ تابع را با مخرج مشترک‌گیری، ساده‌تر می‌کنیم:

$$y = ax + b + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{2ax^2 + 2bx - ax - b + x^2}{2x-1}$$

برای این‌که تابع هموگرافیک باشد، باید صورت و مخرج کسر عبارت خطی باشد؛ پس در صورت کسر x^2 باید حذف شود، بنابراین $2a = -1$ و در نتیجه $a = -\frac{1}{2}$ می‌باشد.

به ازای $a = -\frac{1}{2}$ ضابطهٔ تابع را می‌نویسیم:

$$y = \frac{2bx + \frac{1}{2}x - b}{2x-1}$$

تابع محور y را در نقطه‌ای به عرض یک قطع کرده؛ پس $f(0) = 1$ می‌باشد:

$$1 = \frac{0 + 0 - b}{0 - 1} \Rightarrow b = 1$$

در نتیجه $a + b = \frac{1}{2}$ است.

۴۴۷ **گزینه ۱** اولاً؛ در اطراف ریشه تغییر علامت نداریم پس، چندجمله‌ای ریشهٔ مضاعف دارد؛ یعنی $\Delta = 0$ است:

$$6^2 - 4(m+1)(m-7) = 0 \Rightarrow (m+1)(m-7) = 9$$

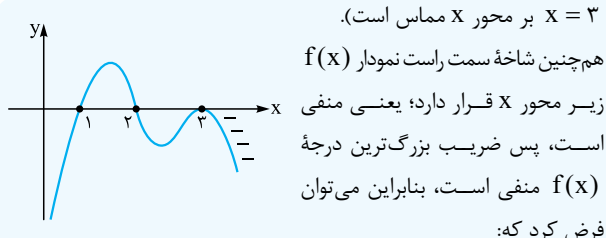
$$\Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0 \Rightarrow (m-8)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 8 \\ m = -2 \end{cases}$$

ثانیاً؛ چون علامت جدول همواره منفی است؛ پس ضرب x^2 منفی بوده، بنابراین $m + 1 < 0$ ، یعنی از بین جواب‌های به دست آمده $m = -2$ قبول است.

ثالثاً؛ عدد n همان ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای درجه دو؛ یعنی $-\frac{b}{2a}$ است:

$$m = -2 \Rightarrow P(x) = -x^2 + 6x - 9 \Rightarrow n = -\frac{6}{2(-1)} = 3$$

بنابراین $m + n = 1$ خواهد بود.



$x = 3$ بر محور x مماس است.

هم‌چنین شاخه سمت راست نمودار $f(x)$ زیر محور x قرار دارد؛ یعنی منفی است، پس ضریب بزرگ‌ترین درجه $f(x)$ منفی است، بنابراین می‌توان فرض کرد که:

$\Rightarrow f(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)^2$
 بنابراین ضابطه y می‌تواند این چنین باشد:

$y = [-(x-1)(x-2)(x-3)^2](x^2 - 5x + 4)$
 $(x-1)(x-4)$

$\Rightarrow y = -(x-1)^2(x-2)(x-4)(x-3)^2$
 حالا این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | - | - | + | + |

$\xrightarrow{y \text{ مثبت باشد}} a \in (2, 4) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2$

دقت کنید بازه $(2, 4)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که y در آن مثبت است؛ پس $b - a$ بیشترین مقدارش $2 = 4 - 2$ می‌شود.

۴۵۳ نکته ابتدا تمام عبارات را در صورت امکان تجزیه و سپس ریشه‌یابی می‌کنیم:

$$\frac{(2x^2 - 3x - 5)(x+1)}{(x^2 + x + 1)(1-x)} = \frac{[(2x-5)(x+1)](x+1)}{(x^2 + x + 1)(1-x)}$$

$$= \frac{(2x-5)(x+1)^2}{(x^2 + x + 1)(1-x)}$$

دقت کنید $x^2 + x + 1$ ریشه ندارد ($\Delta < 0$) و همواره مثبت است ($a > 0$).
 حالا می‌خواهیم کسر مثبت باشد، آن را تعیین علامت می‌کنیم:

اولاً؛ علامت ضریب بزرگ‌ترین درجه پранتزه‌ها را که درهم ضرب کنیم، منفی می‌شود < 0 $\frac{2 \times 1}{1 \times -1}$.
 ثانیاً؛ $x = 1$ ریشه مضاعف است و در اطرافش تغییر علامت نداریم:

| | | | |
|--------|----|---|---------------|
| x | -1 | 1 | $\frac{5}{2}$ |
| $P(x)$ | - | - | + |

تن

پس $a = 1$ و $b = \frac{5}{2}$ و در نتیجه $b - a = \frac{3}{2}$ است.

۴۵۴ نکته اولاً؛ $x = 0$ ریشه ساده صورت و $x = 4$ ریشه مضاعف صورت هستند:

$\begin{cases} x + d = 0 \xrightarrow{x=0} d = 0 \\ (x-a)^2 = 0 \xrightarrow{x=4} a = 4 \end{cases}$
 ثانیاً؛ $x = -\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج است؛ پس:

$a = 4 \Rightarrow \text{مخرج} = 4x^2 + bx + c = 4(x + \frac{1}{2})^2 = 4(x^2 + x + \frac{1}{4})$
 $= 4x^2 + 4x + 1$

بنابراین $b = 4$ و $c = 1$ است. در نتیجه $a + b + c + d = 9$ است.

۴۵۵ نکته چون عبارت کسری A همواره منفی است:

اولاً؛ ضریب بزرگ‌ترین درجه‌های صورت و مخرج، نسبتشان منفی می‌شود:

$\frac{m-2}{-1} < 0 \Rightarrow \boxed{m > 2}$ (I)

ثانیاً؛ ریشه ندارد؛ پس $\Delta < 0$ است چه در صورت چه در مخرج.

۴۴۸ نکته ۲ طبق سؤال عبارت $(m+1)x^2 - 8x + m + 1$ همواره نامثبت است؛ پس یا ریشه ندارد یا اگر دارد مضاعف است، یعنی $\Delta \leq 0$:



اولاً؛ دهانه سهمی رو به پایین است، پس؛ ضریب x^2 منفی است:

$m + 1 < 0 \Rightarrow \boxed{m < -1}$ (I)

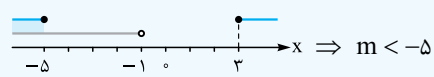
ثانیاً؛ باید $\Delta \leq 0$ باشد:

$64 - 4(m+1)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -4(m+1)^2 \leq -64$

$\Rightarrow (m+1)^2 \geq 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |m+1| \geq 4 \Rightarrow m+1 \leq -4 \text{ یا } m+1 \geq 4$

$\Rightarrow \boxed{m \leq -5 \text{ یا } m \geq 3}$ (II)

بنابراین از اشتراک جواب‌های (I) و (II) خواهیم داشت:



۴۴۹ نکته ۳ عبارت $P(x) = ax + b$ ریشه‌اش $x = 3$ بوده و ضریب آن یعنی a منفی است (چون علامت خانه اول از سمت راست منفی است)؛ پس می‌توان فرض کرد $P(x) = -x + 3$ است، یعنی $a = -1$ و $b = 3$ می‌باشد.

در این صورت $f(x) = a - bx$ به صورت $f(x) = -1 - 3x$ است؛ پس:

| | |
|--------|----------------|
| x | $-\frac{1}{3}$ |
| $f(x)$ | + |

۴۵۰ نکته ۴ راه اول: طبق جدول تعیین علامت، $x = -2$ ریشه ساده و $x = -1$ ریشه مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ هستند؛ پس $P(x)$ که

درجه ۳ است، شامل $x + 2$ و $(x + 1)^2$ است.

$P(x) = (x+2)(x+1)^2 = (x+2)(x^2 + 2x + 1)$
 $= x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

بنابراین طبق عبارت فوق می‌توان گفت $a = 4$ و $b = 2$ است و $a \times b = 8$ خواهد بود.

راه دوم: $x = -2$ و $x = -1$ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس:

$\begin{cases} P(-1) = 0 \Rightarrow a + b = 6 \\ P(-2) = 0 \Rightarrow 4a + b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a \times b = 8$

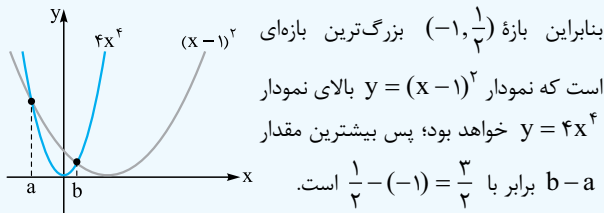
۴۵۱ نکته ۳ همواره $P(x)$ نامنفی است؛ پس یا ریشه ندارد یا اگر دارد، ریشه مضاعف دارد.

از آنجایی که $x^2 - 4x + 3$ به شکل $(x-1)(x-3)$ دارای ریشه‌های $x = 1$ و $x = 3$ است؛ پس $P(x)$ ریشه دارد. حالا باید این ریشه‌ها مضاعف باشند تا تغییر علامت در اطرافشان نداشته باشیم و عبارت همواره نامنفی باشد؛ یعنی باید $x = 1$ و $x = 3$ در پранتزه دیگر هم جزء ریشه‌ها باشند تا در کل $(x-1)^2$ و $(x-3)^2$ داشته باشیم:

$P(x) = (x-1)(x-3)(2x^2 + ax + b) \Rightarrow 2(x-1)(x-3)$
 $= 2x^2 - 8x + 6$
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ a = -8 & b = 6 \end{matrix}$

بنابراین $a - b = -14$ است.

۴۵۲ نکته ۳ طبق نمودار تابع $f(x)$ ، می‌توان گفت تابع f دارای ریشه‌های ساده $x = 1$ و $x = 2$ و ریشه مضاعف $x = 3$ است (چون در



بنابراین بازه $(-1, \frac{1}{4})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار $y = (x-1)^2$ بالای نمودار $y = 4x^4$ خواهد بود؛ پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر با $\frac{1}{4} - (-1) = \frac{5}{4}$ است.

$$\frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} > \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{7x-8-x(x+1)}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} > 0 \xrightarrow{x \neq 2} \frac{-(x-4)}{x+1} > 0$$

$$\xrightarrow{x \neq 2} \frac{-1}{-} \quad \frac{4}{+} \quad \frac{-}{-} \Rightarrow x \in (-1, 4) - \{2\}$$

$$\Rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

راه دوم: چک اعداد دلخواهی از گزینه‌ها:

$$\boxed{x=3} \Rightarrow \frac{13}{4} > \frac{3}{1} \checkmark \Rightarrow (4) \text{ و } (1)$$

$$\boxed{x=0} \Rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 \checkmark \Rightarrow (2)$$

پس گزینه (3) صحیح است.

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \text{ باید نامعادله } < 2 \text{ را حل کنیم، چون مخرج}$$

ریشه ندارد (همواره مثبت است) می‌توانیم طرفین وسطین کنیم:

$$3x^2-2x < 2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow \frac{-2}{+} \quad \frac{4}{-} \quad \frac{+}{+}$$

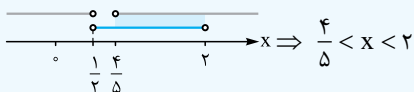
$$\xrightarrow{<} x \in (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow b-a = 6$$

راه اول: دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{-} \quad \frac{2}{+} \quad \frac{-}{-} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \text{ (I)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{-} \quad \frac{4}{+} \quad \frac{-}{-} \Rightarrow x < \frac{1}{5} \text{ یا } x > \frac{4}{5} \text{ (II)} \end{array} \right.$$

بین جواب‌های I و II اشتراک می‌گیریم:



$$\text{مخرج: } \Delta = -24 < 0 \text{ ok}$$

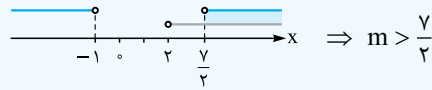
$$\text{صورت: } \Delta = 36 - 4(m-2)(2m-1) < 0$$

$$\Rightarrow -4(m-2)(2m-1) < -36 \Rightarrow (m-2)(2m-1) > 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 > 0 \Rightarrow (2m-7)(m+1) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{+} \quad \frac{7/2}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow \boxed{m < -1 \text{ یا } m > \frac{7}{2}} \text{ (II)}$$

اشتراک جواب‌های (I) و (II) این گونه است:



۴۵۶ به ازای $x > \frac{3}{2}$ عبارت مخرج مثبت می‌شود؛ پس برای

این که کل کسر مثبت شود، باید صورت مثبت باشد؛ یعنی در بازه $(2, 4)$ باید عبارت $(m^2-1)x^2 - 4mx + 4$ مثبت باشد.

$$\frac{2}{-} \quad \frac{4}{+} \quad \frac{-}{-}$$

اولاً $x=2$ و $x=4$ ریشه‌های صورت هستند. از آن جایی که

ریشه $x=2$ است (چون صفرش می‌کند)؛ پس ریشه $x=4$ ریشه $(m^2-1)x^2 - 4mx + 4$ است.

$$(m^2-1)(4) - 4m(2) + 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

از آن جایی که خانه اول از سمت راست منفی است؛ پس حاصل ضرب علامت ضرایب بزرگ‌ترین درجه‌ها باید منفی باشد:

$$(m^2-1)(1) < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow |m| < 1 \Rightarrow -1 < m < 1$$

بنابراین $m=0$ بین جواب‌هایمان، قابل قبول است.

۴۵۷ عبارت $A = \frac{4-2x}{2x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. ریشه

صورت $x=2$ و ریشه مخرج $x = -\frac{1}{2}$ است. نسبت ضریب‌ها < 0 است؛ پس:

$$\frac{x}{A} \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \quad 2 \\ - \quad + \quad - \end{array} \right. \xrightarrow{A \geq 0} -\frac{1}{2} < x \leq 2$$

بنابراین $-1 < 3x \leq 6$ و در نتیجه:

$$[3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow \text{مقدار } 8$$

دقت کنید گرچه خود -1 در بازه نیست ولی اعداد بین 0 و -1 که در بازه هستند، جزء صحیح آن‌ها -1 می‌شود.

۴۵۸ باید نامعادله $(x-1)^2 > 4x^4$ را حل کنیم. از آن جایی

که هر دو تابع پیوسته هستند؛ پس مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ای است که اعداد ابتدا و انتهای آن بازه، طول نقاط برخورد دو نمودار هستند:

$$4x^4 = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 2x^2 = \pm(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = x-1 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ جواب ندارد} \\ 2x^2 = -x+1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

راه دوم: نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

$$1 = \frac{x+1}{2x-1} = 3 \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow x=2 \\ \frac{x+1}{2x-1} = 3 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

اعداد $\frac{4}{5}$ و ۲ باید سر یا ته بازهٔ مجموعه‌جواب نامعادله باشند.

راه سوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

$$\boxed{x = 1/5} \Rightarrow 1 < \frac{2/5}{3} < 3 \checkmark \Rightarrow 2 \text{ و } 1 \text{ رد گزینه‌های } 1 \text{ و } 2$$

$$\boxed{x = 1} \Rightarrow 1 < 2 < 3 \checkmark \Rightarrow 3 \text{ رد گزینه } 3$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

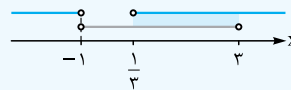
گزینه ۲ راه اول: دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1) \frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{-} + \frac{3}{+} \xrightarrow{>0} -1 < x < 3$$

$$2) \frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{-} + \frac{1}{+} \xrightarrow{<0} x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{3}$$

حالا بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:



بنابراین $1/3 < x < 3$ و در نتیجه $1/6 < x/2 < 3/2$ بوده که ۱ یا $0 < x/2 < 1$ خواهد بود.

راه دوم: تبدیل به معادله:

$$-2 = \frac{1-3x}{x+1} \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

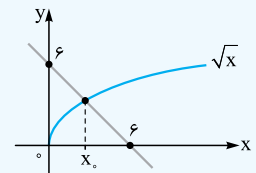
گزینه ۴: باید $0 < \frac{2}{x^2-3x+2} < -2$ باشد، داریم:

حالت اول:

$$\frac{2}{x^2-3x+2} < 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{+} - \frac{2}{+}$$

پس باید $1 < x < 2$ باشد تا حاصل کسر منفی شود که در این بازه هیچ عدد صحیحی وجود ندارد؛ پس به حالت دوم هم احتیاجی نیست.

گزینه ۴ راه اول: رسم نمودار دو طرف نامعادله



$$x + \sqrt{x} \leq 6 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 6 - x \Rightarrow$$

برای یافتن x_0 باید طول نقطهٔ تلاقی دو نمودار را پیدا کنیم. برای این کار باید معادله $\sqrt{x} = 6 - x$ را حل کنیم. یا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم، یا این‌که حدس می‌زنیم. x_0 باید عددی باشد که جذر داشته باشد تا دو طرف تساوی $\sqrt{x} = 6 - x$ برابر شوند و طبق نمودار بین ۰ و ۶ است؛ پس $\sqrt{x} = 6 - x \Rightarrow \boxed{x_0 = 4}$ می‌باشد.

جواب نامعادله $\sqrt{x} \leq 6 - x$ بازه‌ای است که نمودار \sqrt{x} زیر نمودار $6 - x$ باشد یا با آن برخورد کند، که طبق شکل $0 \leq x \leq 4$ خواهد بود.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

$$\boxed{x = 1} \Rightarrow 1 + 1 \leq 6 \checkmark \Rightarrow (3) \text{ و } (2) \text{ رد گزینه‌های } (2) \text{ و } (3)$$

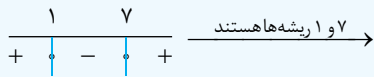
$$\boxed{x = 4} \Rightarrow 4 + 2 \leq 6 \checkmark \Rightarrow (1) \text{ رد گزینه } (1)$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

گزینه ۱ ۴۶۵

$$|x-4| \geq 3 \Rightarrow x-4 \leq -3 \text{ یا } x-4 \geq 3 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 7$$

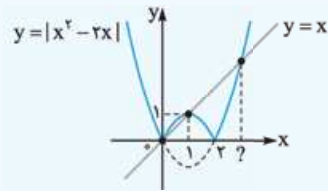
پس باید جواب نامعادله $x^2 - mx + n \geq 0$ به صورت $x \leq 1$ یا $x \geq 7$ باشد؛ یعنی علامت عبارت $x^2 - mx + n$ در $(-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$ بزرگ‌تر مساوی صفر باشد:



$$x^2 - mx + n = (x-1)(x-7) = x^2 - 8x + 7$$

بنابراین $m = 8$ و $n = 7$ پس $m + n = 15$ است.

گزینه ۴ راه اول: رسم نمودار دو طرف نامعادله



طول نقاط برخورد دو نمودار را می‌یابیم:

$$|x^2 - 2x| = x \begin{cases} \text{طبق نمودار} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \\ \rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \checkmark \end{cases}$$

جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ یعنی بازه‌ای که نمودار $y = |x^2 - 2x|$ زیر نمودار $y = x$ باشد، طبق شکل در بازهٔ $1 < x < 3$ این اتفاق افتاده.

راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه از بازه‌ها:

$$\boxed{x = 1} \Rightarrow |1-2| < 1 \Rightarrow 1 < 1 \times \Rightarrow (2) \text{ رد گزینه } (2)$$

$$\boxed{x = 2} \Rightarrow |4-4| < 2 \Rightarrow 0 < 2 \checkmark \Rightarrow (3) \text{ و } (1) \text{ رد گزینه‌های } (1) \text{ و } (3)$$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

گزینه ۲ ۴۶۷: با دقت به ریشهٔ مخرج، طرفین وسطین کرده و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} |2-x| > |2x-3|$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (2-x)^2 > (2x-3)^2$$

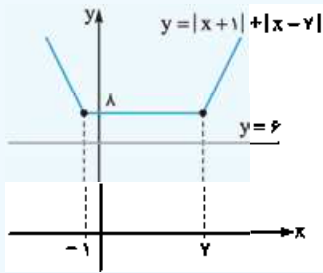
$$(2-x)^2 - (2x-3)^2 > 0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{(x-1)(-3x+5)}{a+b} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-} + \frac{5}{+} \xrightarrow{>0} 1 < x < \frac{5}{3}$$

از آن جایی که $x \neq \frac{3}{2}$ پس:

$$x \in (1, \frac{5}{3}) - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

مجموع اعداد حاصل شده برابر با $6+7=13$ می باشد، چون از -5 تا 5 همه دوتا دوتا قرینه اند و خنثی می شوند.



گزینه ۱ ۴۷۲
مشخص است که نمودار تابع $y = |x+1| + |x-7|$ همواره بالای خط $y = 6$ است؛ پس هر عدد حقیقی می تواند جواب نامعادله $|x+1| + |x-7| > 6$ باشد.

$$15x^2 + 73x + 14 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 73x + 210}{x} < 0$$

$$\Rightarrow (15x + 70)(x + \frac{3}{15}) < 0$$

$$\frac{-14}{3} < x < -\frac{1}{5} \quad (I)$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \Rightarrow \left| \frac{x-3}{2} \right| > 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} > 3 \Rightarrow x > 9 \\ \frac{x-3}{2} < -3 \Rightarrow x < -3 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow -\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow b-a = \frac{5}{3} \quad \text{حالا:}$$

گزینه ۳ ۴۷۴
عدد فرد را به فرم $2x+1$ نشان می دهیم. پس اعداد فرد متوالی به شکل $2x+1, 2x+3, 2x+5, \dots$ می باشند.

$$(2x-1)^2 + (2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 83$$

$$\Rightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 + 4x + 1) + (4x^2 + 12x + 9) = 83$$

$$\Rightarrow 12x^2 + 12x - 72 = 0 \xrightarrow{\div 12} x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

حالا خواهیم داشت:

$$x = 2 \rightarrow \text{مجموع} \rightarrow 3, 5, 7 \rightarrow \text{اعداد}$$

گزینه ۳ ۴۷۵
پول اکرم را x و پول علی را y در نظر می گیریم.

$$\boxed{x+y=100 \Rightarrow y=100-x} \quad (*)$$

علی 10 تومان از پولش را به اکرم داده است، پس پول علی $y-10$ و پول اکرم $x+10$ تومان می شود. حاصل ضرب پولشان در حالت جدید 475 تومان شده، پس:

$$(x+10)(y-10) = 475 \xrightarrow{(*)} (x+10)(100-x-10) = 475$$

$$\Rightarrow (x+10)(90-x) = 475 \Rightarrow -x^2 + 80x + 900 = 475$$

$$\Rightarrow x^2 - 80x - 425 = 0 \Rightarrow (x-85)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 85 \end{cases} \quad \text{غقق}$$

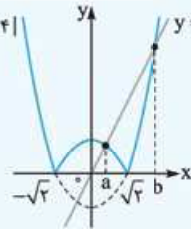
گزینه ۱ ۴۷۶
طبق روش Δ ریشه های معادله عبارتند از:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\alpha}}{2} = -3 \pm \sqrt{9 - \alpha}$$

بنابراین چون $\alpha < \beta$:

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 3(-3 - \sqrt{9 - \alpha})^2 + 2(-3 + \sqrt{9 - \alpha})^2$$

گزینه ۱ ۴۶۸
باید نامعادله $y = |2x^2 - 4|$ را حل کنیم.



رسم نمودار خیلی خوبه:

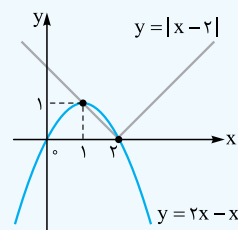
در بازه (a, b) نمودار $y = |2x^2 - 4|$ زیر نمودار $y = 2x$ است که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار هستند که یکی قبل از $\sqrt{2}$ و دیگری بعد از $\sqrt{2}$ است. کافی است حدس بزنیم چه اعدادی در قبل و بعد از $\sqrt{2}$ دو طرف را برابر می کنند:

$$|2x^2 - 4| = 2x \Rightarrow \begin{cases} x < \sqrt{2} \rightarrow x = 1 \\ x > \sqrt{2} \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله، بازه $(1, 2)$ است؛ پس $b-a=1$ خواهد بود.

گزینه ۴ ۴۶۹
عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ پس

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$



$$2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x - x^2 > |x - 2|$$

مشخص است که برای $1 < x < 2$

نمودار $y = 2x - x^2$ بالای نمودار

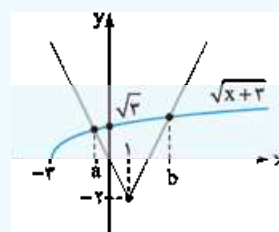
$y = |x - 2|$ است.

راه دوم: امتحان گزینه ها:

$$\boxed{x=0} \Rightarrow 0 + 1 - |-2| > 0 + 1 \Rightarrow -1 > 1$$

نادرست $x=0$ را دارند به جز گزینه (4) .

گزینه ۳ ۴۷۰
می خواهیم نامعادله $\sqrt{x+3} > |x-1| - 2$ را حل کنیم.



از رسم نمودار استفاده می کنیم:

طبق نمودار در بازه (a, b) نمودار

$y = \sqrt{x+3}$ بالای نمودار

$y = |x-1| - 2$ است که a و b

طول نقاط تلاقی دو نمودار هستند:

$$\sqrt{x+3} = |x-1| - 2 \xrightarrow{-2 < a < 0} \sqrt{x+3} = -x + 1 - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = -x - 1 \xrightarrow{\text{حدس}} \boxed{x = -2}$$

$$\sqrt{x+3} = |x-1| - 2 \xrightarrow{b > 1} \sqrt{x+3} = x - 1 - 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{حدس}} \boxed{x = 6}$$

پس $(a, b) = (-2, 6)$ ؛ بنابراین $b-a=8$ است.

وایسا، نرو! دقت کنید وقتی حدس زدیم $x=6$ ؛ یعنی عددی پیدا کردیم که

وقتی جای x در $\sqrt{x+3}$ قرار می گیرد، $x+3$ مربع کامل شود و باعث شود

دو طرف تساوی برابر شوند.

$$||x-1| - 3| < 4 \Rightarrow -4 < |x-1| - 3 < 4 \quad \text{گزینه ۱ ۴۷۱}$$

$$\xrightarrow{+3} -1 < |x-1| < 7$$

باید نامعادله $|x-1| < 7$ را حل کنیم:

$$-7 < x-1 < 7 \xrightarrow{+1} -6 < x < 8$$

$$\xrightarrow{\text{صحیح}} x = -5, -4, \dots, 6, 7$$

ثانیاً: خانه اول از سمت راست منفی است؛ پس ضریب x^2 منفی است:
 $m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) < 0$
 $\Rightarrow \frac{-1}{+} \frac{2}{-} \Rightarrow \boxed{-1 < m < 2}$
 بنابراین از اشتراک دو جواب بالا داریم:

$$\frac{0}{-1} \frac{0}{2} \Rightarrow x \Rightarrow -1 < m < 2$$

۲ نکته ۳ باید بزرگ‌ترین بازه‌های را پیدا کنیم که تابع f در آن‌جا منفی شود تا نمودارش زیر محور x ‌ها قرار گیرد:

$$x^2 - 4x^2 - x + 4 < 0 \xrightarrow{\text{فکتور}} x^2(x-4) - (x-4) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{فکتور}} (x-4)(x^2-1) < 0 \Rightarrow (x-4)(x-1)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{f} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ - & + & - \end{array} \right. \xrightarrow{\text{منفی } f} x < -1$$

یا $1 < x < 4$

با شرط $x > -1$ بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع f در آن بازه زیر محور x ‌ها قرار می‌گیرد، بازه $(1, 4)$ است؛ پس حداکثر $b - a$ برابر با $4 - 1 = 3$ خواهد بود.

۳ نکته ۴ چون علامت $P(x)$ در بازه $(-1, 6)$ مثبت است؛ پس $x = 6$ و $x = -1$ ریشه‌های صورت و مخرج $P(x)$ هستند، یعنی جدول تعیین علامت $P(x)$ یکی از دو حالت زیر است:

| | |
|--------|--------|
| x | x |
| -1 | -1 |
| 6 | 6 |
| $P(x)$ | $P(x)$ |
| $-$ | $-$ |
| $+$ | $+$ |
| $-$ | $-$ |

یا $P(x)$ در $x = -1$ تن و در $x = 6$ تن

علامت خانه اول از سمت راست منفی است؛ پس ضریب بزرگ‌ترین درجه صورت و مخرج باید نسبتشان منفی شود:

$\frac{a}{3} < 0 \Rightarrow a < 0$
 از کجا بفهمیم بین $x = 6$ و $x = -1$ کدام یک ریشه صورت است؟ آهان، از آن جایی که باید a منفی به دست بیاید؛ پس $x = 6$ ریشه صورت است:

$$ax + 12 = 0 \xrightarrow{x=6} 6a + 12 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$x = -1$ هم ریشه مخرج است:

$$3x + b = 0 \xrightarrow{x=-1} -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین $a - b = -5$ است.

۴ نکته ۲ صورت و مخرج کسر ساده می‌شوند. حواسمان به ریشه مخرج باشد و ساده کنیم:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10} \geq 2 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-5)(x+2)} \geq 2$$

$$\xrightarrow{x \neq -2} \frac{x-3}{x-5} \geq 2 \Rightarrow \frac{x-3}{x-5} - 2 \geq 0$$

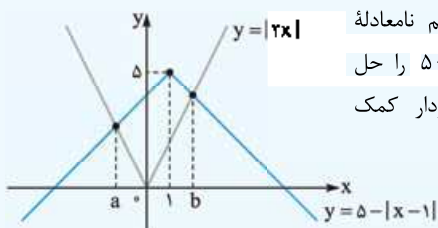
$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{-x+7}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{-} \frac{7}{+}$$

تن

$$\xrightarrow{\geq 0} x \in (5, 7] \Rightarrow b + a = 7 + 5 = 12$$

۵ نکته ۳

راه اول: می‌خواهیم نامعادله $|2x| > |x-1| - 5$ را حل کنیم. از رسم نمودار کمک می‌گیریم:



$$\text{طول نقطه عطف} = -\frac{-(m-1)}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{m-1}{2}$$

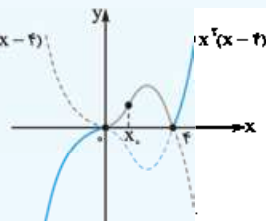
با توجه به حدود m ، حدود طول نقطه عطف تابع را می‌یابیم:

$$m < -3 \Rightarrow m-1 < -4 \Rightarrow \frac{m-1}{2} < -2$$

۸ نکته ۴ و باز هم رسم نمودار:

$$y = x |x^2 - 4x| = \begin{cases} x(x^2 - 4x) & x^2 - 4x \geq 0 \\ x(4x - x^2) & x^2 - 4x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2(x-4) & x < 0 \text{ یا } x > 4 \\ -x^2(x-4) & 0 < x < 4 \end{cases}$$



طول نقاط عطف تابع، $x = 0$ و $x = 4$ است. برای یافتن x_0 می‌توان $f''(x) = 0$ را بررسی کرد:

$$f(x) = -x^2(x-4) \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 8x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

۹ نکته ۴ اولاً: در $x = 0$ و $x = 3$ مماس افقی است؛ پس f' صفر است:

$$y' = 4x^2 + 3ax^2 + 2bx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x = 3 \Rightarrow 108 + 27a + 6b = 0 \quad (I) \end{cases}$$

ثانیاً: $x = 0$ طول عطف است؛ پس f'' صفر است:

$$y'' = 12x^2 + 6ax + 2b \xrightarrow{x=0} b = 0 \xrightarrow{(I)} a = -4$$

بنابراین: $f(x) = x^3 - 4x^2 \Rightarrow f(-2) = 16 + 32 = 48$

۱۰ نکته ۱ اولاً: $x = 0$ مجانب قائم (انفصال مضاعف) است؛ پس ریشه مضاعف مخرج است، یعنی $b = 0$ است.

ثانیاً: تابع از نقطه $(2, 0)$ می‌گذرد؛ پس:

$$f(x) = \frac{ax+2}{x^2} \xrightarrow{(2,0)} 0 = \frac{2a+2}{4} \Rightarrow a = -1$$

بنابراین $f(x) = \frac{-x+2}{x^2}$ ، حال برای یافتن \min نسبی داریم:

$$f'(x) = \frac{-(x^2) - 2x(-x+2)}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x^2 - 4x}{x^4}$$

$$= \frac{x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x-4}{x^3} \Rightarrow y' \left| \begin{array}{ccc} 0 & 4 \\ + & - \\ \nearrow & \searrow \\ \text{تن} & \text{min} \end{array} \right.$$

تابع f در $x = 4$ دارای \min نسبی با مقدار $f(4) = -\frac{1}{8}$ است.

فصل ششم
تعیین علامت و نامعادله

۱ نکته ۴ طبق جدول تعیین علامت $f(x)$:

اولاً: معادله دو ریشه دارد؛ پس $\Delta > 0$:

$$(m-1)^2 - 4\left(m^2 - m - 2\right)\left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

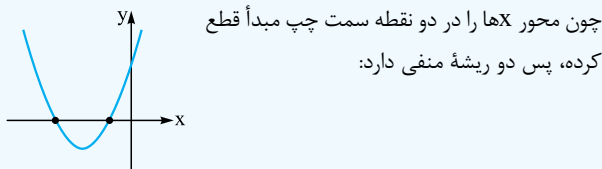
$$\Rightarrow (m^2 - 2m + 1) - (m^2 - m - 2) > 0 \Rightarrow \boxed{m < 3}$$



۴ **گزینه ۳ راه اول:** ابتدا ضابطه معادله را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^2 + m(1-x) + x + 5 = 2x^2 + x - mx + m + 5$$

$$= 2x^2 + (1-m)x + m + 5$$



۱) $\Delta > 0 \Rightarrow (1-m)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 - 10m - 39 > 0$

$$\Rightarrow (m-13)(m+3) > 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -3 \quad 13 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline > \Rightarrow \boxed{m < -3 \text{ یا } m > 13} \end{array}$$

۲) $S < 0 \Rightarrow -\frac{1-m}{2} < 0 \Rightarrow \boxed{m < 1}$

$P > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{m > -5}$

اشتراک جواب‌های بالا $-5 < m < -3$ است



راه دوم: امتحان گزینه‌ها با عدد دلخواه به جای m:

$$m = -4: f(x) = 2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 17 > 0 \\ S = -\frac{5}{2} < 0 \\ P = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

فقط گزینه (۳) شامل $m = -4$ است.

۵ **گزینه ۱** در معادله $x = 5 - x^2$ می‌توان گفت $S = -1$ و $P = -5$ و هم‌چنین:

$$x + x^2 = 5 \Rightarrow x(1+x) = 5 \Rightarrow 1+x = \frac{5}{x}$$

بنابراین: $1+x_1 = \frac{5}{x_1}$, $1+x_2 = \frac{5}{x_2}$

پس در معادله جدید، ریشه‌ها $\frac{1}{(\frac{5}{x_1})^2}$ و $\frac{1}{(\frac{5}{x_2})^2}$ یعنی $\frac{x_1^2}{125}$ و $\frac{x_2^2}{125}$ هستند:

$$S' = \frac{x_1^2}{125} + \frac{x_2^2}{125} = \frac{S^2 - 2PS}{125} = \frac{(-1)^2 - 2(-5)(-1)}{125} = \frac{-16}{125}$$

فقط در گزینه (۱)، مجموع ریشه‌ها $-\frac{16}{125}$ است.

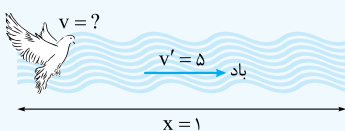
۶ **گزینه ۲** رأس سهمی نقطه $A(-1, 9)$ است؛ پس معادله آن به

شکل $y = a(x+1)^2 + 9$ می‌باشد. حال نقطه $(3, 1)$ را در ضابطه سهمی صدق می‌دهیم:

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 9$$

در بین گزینه‌ها، نقطه $(5, -9)$ در ضابطه سهمی صدق می‌کند:

$$-9 = -\frac{1}{4}(5+1)^2 + 9 \Rightarrow -9 = -9 \quad \text{OK}$$



۷ **گزینه ۴**

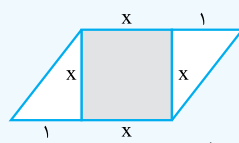
می‌خواهیم ببینیم نمودار تابع $y = 5 - |x-1|$ در چه بازه‌ای بالای نمودار $y = |2x|$ است. طبق نمودار در بازه (a, b) این اتفاق می‌افتد که a و b طول نقاط تلاقی دو نمودار است:

$$5 - |x-1| = |2x| \begin{cases} \frac{a < 0}{x < 0} \rightarrow 5 - (-x+1) = -2x \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \\ \frac{x > 0}{b > 0} \rightarrow 5 - (x-1) = 2x \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b) = (-\frac{4}{3}, 2)$$

راه دوم: امتحان گزینه‌ها (به عهده خودتون 😊)

فصل هفتم معادلات و سهمی



۱ **گزینه ۳** $x^2 =$ مساحت مربع

$$= \frac{1}{2}(1)(x) = \frac{x}{2}$$

مساحت هر مثلث

مساحت مربع از $\frac{3}{4}$ مساحت هر مثلث $\frac{27}{32}$ بیشتر است:

$$x^2 - \frac{3}{4}(\frac{1}{2}x) = \frac{27}{32} \Rightarrow x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{27}{32} = 0$$

با روش Δ داریم:

$$\Delta = (-\frac{3}{8})^2 - 4(1)(-\frac{27}{32}) = \frac{9}{64} + \frac{27}{8} = \frac{225}{64}$$

$$x = \frac{\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{225}{64}}}{2(1)} = \frac{\frac{3}{8} \pm \frac{15}{8}}{2} = \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

غرق

طول ضلع نمی‌تواند عدد منفی شود، پس $x = \frac{9}{8}$ و در نتیجه قاعده متوازی‌الاضلاع $1 + \frac{9}{8}$ یعنی $\frac{17}{8}$ است.

۲ **گزینه ۱**

$$S = \frac{1}{P} \Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow -(2m-1)(2-m) = 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{7}{2} \end{cases}$$

چون معادله دو ریشه حقیقی داشته، نباید Δ منفی باشد:

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(3)(3) = -27 < 0$$

پس فقط $m = \frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۳ **گزینه ۲**

اولاً: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow ab = a + b - 1 \Rightarrow ab - a = b - 1$

$$\Rightarrow a(b-1) = b-1 \xrightarrow{b \neq 1} a = 1$$

ثانیاً:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 - 12$$

$$\xrightarrow{a=1} 1 + b = 1 + b^2 - 12$$

$$\Rightarrow b^2 - b - 12 = 0 \Rightarrow (b-4)(b+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ b = -3 \end{cases} \xrightarrow{a=1} a + b = 5$$

غرق