راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۲. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۳. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژهٔ علاقمندان آورده شده است که ویژهٔ آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعهٔ آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌های فراتر از کتاب درسی با عنوان «ویژهٔ علاقمندان» مشخص شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

جلسه اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... 80 min
جلسه دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... 88 min
جلسه سوم: الگو و دنباله 106 min
جلسه چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی 118 min
جلسه پنجم: نسبت‌های مثلثاتی 84 min
جلسه ششم: دایرهٔ مثلثاتی 109 min
جلسه هفتم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی 96 min
جلسه هشتم: ریشه و توان 72 min
جلسه نهم: ریشه nام 58 min
جلسه دهم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها 47 min
جلسه یازدهم: اتحاد و تجزیه، عبارت‌های گویا 146 min
جلسه دوازدهم: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن 165 min
جلسه سیزدهم: سهمی 102 min
جلسه چهاردهم: تعیین علامت 200 min
جلسه پانزدهم: تابع 58 min
جلسه شانزدهم: دامنه و برد تابع 100 min
جلسه هفدهم: انواع تابع 125 min
جلسه هجدهم: شمارش 74 min
جلسه نوزدهم: جایگشت 70 min
جلسه بیستم: ترکیب 90 min
جلسه بست و یکم: فضای نمونه‌ای، احتمال رخداد ... 104 min
جلسه بیست و دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه 30 min
جلسه بیست و سوم: متغیر و انواع آن 40 min

درسنامه آموزشی

فصل اوّل: مجموعه، الگو و دنباله
قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... ۱۰
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... ۱۷
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی ۲۲
قسمت چهارم: دنبالهٔ هندسی ۳۳

فصل دوم: مثلثات
قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی ۳۷
قسمت دوم: دایرهٔ مثلثاتی ۴۴
قسمت سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۱

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
قسمت اول: ریشه و توان، ریشه nام ۵۵
قسمت دوم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها ۶۱
قسمت سوم: اتحاد و تجزیه ۶۸
قسمت چهارم: عبارت‌های گویا ۷۷

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها
قسمت اول: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۸۲
قسمت دوم: سهمی ۹۰
قسمت سوم: تعیین علامت ۹۵

فصل پنجم: تابع
قسمت اول: تابع ۱۱۰
قسمت دوم: دامنه و برد تابع، انواع تابع و انتقال نمودارها ۱۱۹

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن
قسمت اول: شمارش ۱۳۲
قسمت دوم: جایگشت ۱۳۶
قسمت سوم: ترکیب ۱۴۰

فصل هفتم: آمار و احتمال
قسمت اول: فضای نمونه‌ای، پیشامد و اعمال روی... ۱۴۸
قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۱۵۴
قسمت سوم: قوانین احتمال ۱۶۰
قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و... ۱۶۴

پرسش‌های تشریحی

فصل اوّل: مجموعه، الگو و دنباله
قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... ۱۷۰
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... ۱۷۱
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی ۱۷۲
قسمت چهارم: دنبالهٔ هندسی ۱۷۳

فصل دوم: مثلثات
قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۲
قسمت دوم: دایرهٔ مثلثاتی ۱۸۳
قسمت سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۴

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
قسمت اول: ریشه و توان، ریشه nام ۱۹۳
قسمت دوم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها ۱۹۴
قسمت سوم: اتحاد و تجزیه ۱۹۵
قسمت چهارم: عبارت‌های گویا ۱۹۷

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها
قسمت اول: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۲۰۸
قسمت دوم: سهمی ۲۰۹
قسمت سوم: تعیین علامت ۲۱۰

فصل پنجم: تابع
قسمت اول: تابع ۲۲۲
قسمت دوم: دامنه و برد تابع، انواع تابع و انتقال نمودارها ۲۲۵

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن
قسمت اول: شمارش ۲۳۷
قسمت دوم: جایگشت ۲۳۹
قسمت سوم: ترکیب ۲۴۰

فصل هفتم: آمار و احتمال
قسمت اول: فضای نمونه‌ای، پیشامد و اعمال روی... ۲۵۲
قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۲۵۳
قسمت سوم: قوانین احتمال ۲۵۴
قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و... ۲۵۵

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اوّل: مجموعه، الگو و دنباله
قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های... ۲۶۴
قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم... ۲۶۶
قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی ۲۶۸
قسمت چهارم: دنبالهٔ هندسی ۲۷۴

فصل دوم: مثلثات
قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی ۲۹۷
قسمت دوم: دایرهٔ مثلثاتی ۳۰۲
قسمت سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۳۰۳

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
قسمت اول: ریشه و توان، ریشه nام ۳۲۴
قسمت دوم: توان‌های گویا و قواعد رادیکال‌ها ۳۲۶
قسمت سوم: اتحاد و تجزیه ۳۲۹
قسمت چهارم: عبارت‌های گویا ۳۳۳

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها
قسمت اول: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۳۵۲
قسمت دوم: سهمی ۳۵۵
قسمت سوم: تعیین علامت ۳۵۸

فصل پنجم: تابع
قسمت اول: تابع ۳۸۵
قسمت دوم: دامنه و برد تابع، انواع تابع و انتقال نمودارها ۳۹۰

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن
قسمت اول: شمارش ۴۰۸
قسمت دوم: جایگشت ۴۱۰
قسمت سوم: ترکیب ۴۱۱

فصل هفتم: آمار و احتمال
قسمت اول: فضای نمونه‌ای، پیشامد و اعمال روی... ۴۲۶
قسمت دوم: احتمال رخداد یک پیشامد ۴۲۷
قسمت سوم: قوانین احتمال ۴۳۲
قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و... ۴۳۵

Mathematics

فصل ۱

قسمت اوّل

مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مفهوم مجموعه

در ابتدای این درس، قصد داریم مطالب و مفاهیمی را در مورد مجموعه‌ها که در سال نهم با آن آشنا شده‌اید، یادآوری کنیم:

در ریاضیات برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای **مشخص** و دوبه‌دو **متمایز** (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود.

به هر یک از اشیای مجموعه یک عضو مجموعه می‌گوییم.

قرارداد: اگر A یک مجموعه و a عضوی از آن باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر b عضوی از مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$

به‌عنوان مثال، اگر $A = \{۱,۲,۵\}$ ، آن‌گاه $۵ \in A$ و $۳ \notin A$

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

تذکر مجموعهٔ تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، اشتباه بگیریم.

مثال: اگر $A = \{-۱,۰,\{-۱\},\{۰\},\{\{۰\}\}\}$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) $\{\{۰\}\} \in A$ ب) $\{-۱,۰\} \in A$ پ) $\{\{-۱\}\} \notin A$ ت) $\{۰\} \notin A$

پاسخ: A یک مجموعهٔ ۵ عضوی است که اعضای آن -۱ ، ۰ ، $\{-۱\}$ ، $\{۰\}$ و $\{\{۰\}\}$ می‌باشند، بنابراین:

آ) درست است. ب) نادرست است. پ) درست است. ت) نادرست است.

دو مجموعهٔ مساوی: دو مجموعهٔ A و B برابرند هرگاه هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد و می‌نویسیم $A = B$

نتیجه اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$

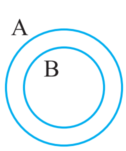
تست: دو مجموعهٔ $\{۴,\{x,۲\}\}$ و $\{y,\{z,۳\}\}$ با هم برابرند. مقدار $xy + z$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: در دو مجموعهٔ مساوی، اعضای آن‌ها یکسان است. بنابراین اگر $\{۴,\{x,۲\}\} = \{y,\{z,۳\}\}$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} y = ۴ \\ \{x,۲\} = \{z,۳\} \Rightarrow x = ۳, z = ۲ \end{cases} \Rightarrow xy + z = ۱۲ + ۲ = ۱۴ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

زیرمجموعه: اگر هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A است و می‌نویسیم $B \subseteq A$



نمایش $B \subseteq A$ با نمودار وِن به‌صورت مقابل است:

تست: اگر $A = \{۱,۲\}$ ، $B = \{۱,\{۱,۲\}\}$ و $C = \{۱,۲,\{۱,\{۱,۲\}\}\}$ سه مجموعه باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A \in B$ ۲) $A \subseteq B$ ۳) $A \subseteq C$ ۴) $B \in C$

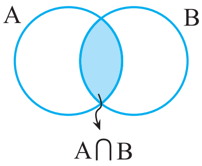
پاسخ: مجموعهٔ B به‌صورت $B = \{۱,A\}$ است، پس $A \in B$ می‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است. مجموعهٔ B دارای دو عضو ۱ و A است، پس مجموعهٔ B دارای زیرمجموعه‌های مقابل است: $\varnothing$, $\{۱\}$, $\{A\} = \{\{۱,۲\}\}$, B

مشاهده می‌شود که A زیرمجموعهٔ B نمی‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۲) نادرست است.

اگر دو عضو ۱ و ۲ از مجموعهٔ C را در یک مجموعه قرار دهیم، یکی از زیرمجموعه‌های C به‌دست می‌آید. این زیرمجموعه، همان مجموعهٔ A است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است. از طرفی مجموعهٔ C به‌صورت $C = \{۱,۲,B\}$ است که درستی گزینهٔ (۴) نتیجه می‌شود.

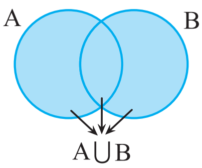
بنابراین گزینهٔ (۲) جواب است.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر ۲^n می‌باشد. به‌عنوان مثال، یک مجموعهٔ ۳ عضوی، $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه دارد.



اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$$

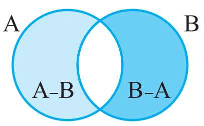


اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار مقابل، قسمت رنگی، اجتماع دو مجموعهٔ A و B را نشان می‌دهد:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{یا} \ x \in B\}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعهٔ $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند. $A - B = \{x \mid x \in A \ , \ x \notin B\}$

نکته برای مشخص کردن مجموعهٔ $A - B$، باید اعضای مشترک A و B را از A حذف کنیم و بقیهٔ اعضای A را بنویسیم.



در نمودار مقابل، مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ رنگی هستند:

مثال اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ \le x \le ۴\}$ و $B = \{۲x \mid x \in A, ۰ < x \le ۳\}$، مجموعهٔ $(A \cup B) - (A \cap B)$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ \le x \le ۴\} = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \quad , \quad B = \{۲x \mid x \in A \ , \ ۰ < x \le ۳\} = \{۲, ۴, ۶\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۶\} \quad , \quad A \cap B = \{۲, ۴\}$

$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{-۱, ۰, ۱, \cancel{۲}, ۳, \cancel{۴}, ۶\} - \{۲, ۴\} = \{-۱, ۰, ۱, ۳, ۶\}$

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C روابط زیر برقرار است:

$۱)\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases} \qquad ۲)\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

$۳)\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases} \qquad ۴)\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

$۵)\begin{cases} A, B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A, B \end{cases} \qquad ۶)\ A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح که به ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\} \quad , \quad \mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\} \quad , \quad \mathbb{Z} = \{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم و به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \ne ۰\right\}$$

تذکر اعداد گویا به دو صورت کسر متعارفی و نماد یا بسط اعشاری، نمایش داده می‌شوند. به‌طور مثال داریم $۰/۶ = \frac{۳}{۵}$ که در آن $\frac{۳}{۵}$ کسر متعارفی و $۰/۶$ نماد اعشاری این عدد گویا است.

نمایش اعشاری عددهای گویا

نمایش اعشاری عددهای گویا به دو صورت است: ۱- مختوم (یا متناهی) ۲- نامتناهی و متناوب

۱) مختوم (تحقیقی یا پایان‌پذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده به صفر می‌رسد و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۹}{۲۰}$ مختوم هستند، زیرا در مخرج این کسرها فقط عامل ۲ یا ۵ وجود دارد و داریم $۰/۷۵ = \frac{۳}{۴}$، $۰/۲ = \frac{۱}{۵}$ و $۰/۴۵ = \frac{۹}{۲۰}$

۲) متناوب (پایان‌ناپذیر): این دسته از اعداد گویا، کسرهای متعارفی هستند که پس از ساده شدن، در مخرج آن‌ها حداقل یک شمارندهٔ اول به جز ۲ و۵ وجود دارد و به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، باقی‌مانده هرگز به صفر نمی‌رسد و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شود. به‌طور مثال کسرهای $\frac{۴}{۳۳}$ و $\frac{۷}{۶}$ متناوب هستند، زیرا در مخرج این کسرها حداقل یک شمارندهٔ اول به‌جز ۲ و۵ وجود دارد و داریم:

$$\frac{۴}{۳۳} = ۰/۱۲۱۲... = ۰/\overline{۱۲} \qquad , \qquad \frac{۷}{۶} = ۱/۱۶۶۶....... = ۱/۱\overline{۶}$$

مجموعهٔ اعداد گنگ: مجموعهٔ اعدادی را که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد، مجموعهٔ اعداد گنگ می‌نامیم.

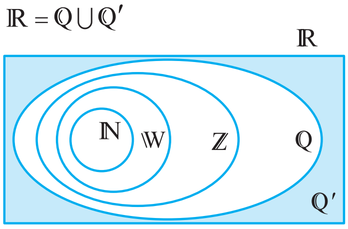
مجموعهٔ اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^C$ نشان می‌دهیم.

نکته در نمایش اعشاری عددهای گنگ، تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار بوده ولی متناوب نیست. بـه عنـوان مثـال، اعـداد $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳...$ و $۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱...$ که نمایش اعشاری آن‌ها بی‌پایان و غیرمتناوب است، اعدادی گنگ هستند.

مجموعهٔ اعداد حقیقی: اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

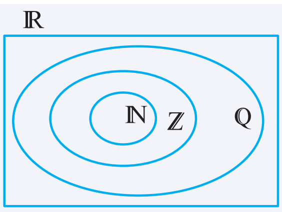
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ می‌باشد.

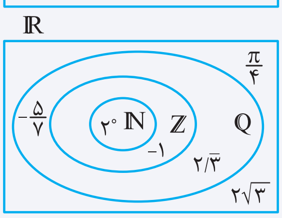


مثال اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.

$$۲\sqrt{۳} \ , -۱ \ , -\frac{۵}{۷} \ , \frac{\pi}{۴} \ , ۲^۰ \ , ۲/۳۳۳...$$



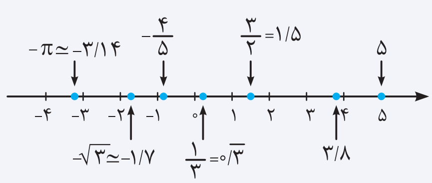
پاسخ : $۲^۰ = ۱$ عددی طبیعی، -۱ عددی صـحیح، $-\frac{۵}{۷}$ و $۲/\overline{۳}$ اعـدادی گویـا و $۲\sqrt{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ اعـدادی گنـگ هستند. بنابراین:



نکته هر عدد دلخواه را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد و همچنین هر نقطه روی محور اعداد نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

مثال هر یک از اعداد $۳/۸$ ، $-\pi$ ، $\frac{۳}{۲}$ ، ۵ ، $-\sqrt{۳}$ ، $-\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$ را روی محورمشخص کنید و بگویید کدام‌یک از آن‌ها گنگ هستند؟

پاسخ :



اعداد $-\sqrt{۳}$ و $-\pi$ گنگ هستند.

بازه (فاصله)

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه یا برشی از محور اعداد حقیقی باشند، «بازه» یا «فاصله» نام دارند. در ادامه به معرفی انواع بازه‌ها می‌پردازیم.

بازه‌های محدود

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین-۱ و ۲ به همراه خود این دو عدد، به‌صورت $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x \le ۲\}$ است. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی از نماد ساده‌تری استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ A که شامل هر دو نقطهٔ انتهایی خود می‌باشد را به‌صورت $[-۱, ۲]$ می‌نویسیم و آن را بازهٔ بسته از-۱ تا ۲ می‌نامیم.

حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه، یعنی -۱ و ۲ را حذف کنیم، آن‌گاه مجموعه‌ای مانند $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۲\}$ به‌دست می‌آید که آن را بازهٔ باز بین -۱ و ۲ می‌نامیم و با نماد $(-۱, ۲)$ نمایش می‌دهیم. همچنین بازه‌هایی مثل $[۱, ۴) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \le x < ۴\}$ و $(۲, ۵] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x \le ۵\}$ که فقط شامل یکی از نقاط انتهایی خود باشد را بازه‌های نیم‌باز (نیم‌بسته) می‌نامیم.

در حالت کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، آن‌گاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول زیر خلاصه شده است:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	a b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	a b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$	a b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$	a b

مثال: کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست می‌باشند؟چرا؟

آ) $\frac{۳}{۲}\in(\frac{۵}{۴},\frac{۸}{۵}]$ ب) $\{-۱,۰\}\subseteq(-۲,۱)$ پ) $-\sqrt{۵}\in[-۳,-۲)$ ت) $[-۱,۱]\subseteq(-۱,۱)$

پاسخ : آ) درست است، زیرا: $\frac{۵}{۴}=۱/۲۵\ ,\ \frac{۸}{۵}=۱/۶\ ,\ \frac{۳}{۲}=۱/۵\Rightarrow\frac{۳}{۲}\in(\frac{۵}{۴},\frac{۸}{۵}]$

ب) درست است، زیرا بازهٔ $(-۲,۱)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۱ می‌باشد، پس بازهٔ $(-۲,۱)$ شامل دو عدد۱- و ۰ می‌باشد. پس داریم:

$\{-۱,۰\}\subseteq(-۲,۱)$

پ) درست است، زیرا: $-\sqrt{۵}\simeq-۲/۲\Rightarrow-\sqrt{۵}\in[-۳,-۲)$

ت) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $-۱\in[-۱,۱]$ ولی $-۱\notin(-۱,۱)$

نکته هر بازه یک مجموعه است، پس اجتماع، اشتراک و تفاضل بین بازه‌ها تعریف می‌شود.

مثال: اگر $A=[-۲,۳)$ و $B=(۰,۴)$ باشد:

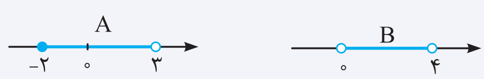
آ) نمایش مجموعه‌ای A و B را بنویسید.

ب) نمایش هندسی هر یک از مجموعه‌های A و B را رسم کنید.

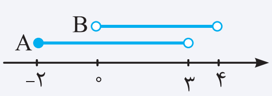
پ) $A\cap B$، $A\cup B$ و $A-B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ : آ) $A=[-۲,۳)=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲\le x<۳\}\ ,\ B=(۰,۴)=\{x\in\mathbb{R} \mid ۰<x<۴\}$

ب)

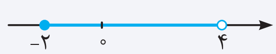


پ) مجموعه‌های A و B را روی یک محور نمایش می‌دهیم و سپس اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

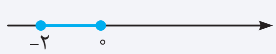


$A\cap B=(۰,۳)$

$A\cup B=[-۲,۴)$



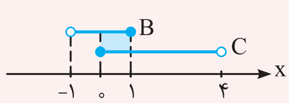
$A-B=[-۲,۰]$



تست: اگر $A=[-۲,۱)$، $B=(-۱,۱]$ و $C=[۰,۴)$ باشند، مجموعهٔ $A-(B\cap C)$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]$ ۲) $[-۲,-۱)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,۰)$

پاسخ : گزینهٔ (۴) صحیح است. $B\cap C=[۰,۱]\Rightarrow A-(B\cap C)=[-۲,۱)-[۰,۱]=[-۲,۰)\Rightarrow$



طول و نقطه میانی در بازه‌های محدود

ابتدای بازه − انتهای بازه = طول بازه ، $\dfrac{\text{انتهای بازه}+\text{ابتدای بازه}}{۲}$ = طول نقطهٔ میانی

تست: اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۲\le -x+۳\le ۵\}$ باشد، طول بازهٔ $A\cup B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: با حل نامعادلهٔ $۲\le -x+۳\le ۵$، حدود x و درنتیجه مجموعهٔ B را مشخص می‌کنیم:

$$۲\le -x+۳\le ۵ \xrightarrow{-۳} -۱\le -x\le ۲ \xrightarrow{\div(-۱)} -۲\le x\le ۱ \Rightarrow B=[-۲,۱]$$

$A\cup B=[-۱,۲]\cup[-۲,۱]=[-۲,۲]\Rightarrow$ طول بازهٔ $A\cup B$ = انتهای بازه - ابتدای بازه $=۲-(-۲)=۴\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

بازه‌های بی‌کران (نامحدود)

مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲ به صورت $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le ۲\}$ است. از نماد $(-\infty,۲]$ برای نمایش مجموعهٔ A استفاده می‌کنیم و آن را بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم. اگر حداقل در یک طرف بازه یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ به‌کار رفته باشد، آن بازه را بی‌کران (نامحدود) می‌خوانیم.

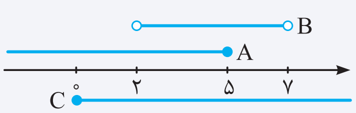
فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. انواع بازه‌های نامحدود، نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
a	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز (نیم‌بسته)
a	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x> a\}$	$(a,+\infty)$	باز
a	$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x< a\}$	$(-\infty,a)$	باز

نکته بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است، به عبارت دیگر: $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

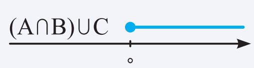
مثال: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le ۵\}$، $B=(۲,۷)$ و $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge ۰\}$ باشد، حاصل $(A\cap B)\cup C$ را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید.

پاسخ: هر یک از مجموعه‌های A، B و C را روی یک محور مشخص می‌کنیم و با توجه به آن، مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ را به‌صورت بازه می‌نویسیم:



$$A\cap B=(-\infty,۵]\cap(۲,۷)=(۲,۵]\Rightarrow (A\cap B)\cup C=(۲,۵]\cup[۰,+\infty)=[۰,+\infty)$$

نمایش هندسی مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ به‌صورت مقابل است:



تست: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲<x\le ۳\}$، $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\frac{x}{۲}>۱\}$ و $C=[-۴,+\infty)$ باشند، مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: مجموعهٔ B از حل نامعادلهٔ $-\frac{x}{۲}>۱$ به‌دست می‌آید:

$$-\frac{x}{۲}>۱\xrightarrow{\times ۲}-x>۲\xrightarrow{\div(-۱)}x<-۲\Rightarrow B=(-\infty,-۲)$$

$$B\cap C=(-\infty,-۲)\cap[-۴,+\infty)=[-۴,-۲)\ ,\ A=(-۲,۳]\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(-۲,۳]\cup[-۴,-۲)=[-۴,۳]-\{-۲\}$$

بنابراین مجموعهٔ اعداد صحیح واقع در مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ به صورت زیر است:

$\{-۴,-۳,-۱,۰,۱,۲,۳\}\Rightarrow$ تعداد اعداد صحیح $=۷\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: **اگر $A=[-1,4]$ ، $B=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{-x+a}{2}\le 3\}$ ، $C=[0,4]$ و $C=A\cap B$ باشند، مقدار a کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -3 ۴) -2

پاسخ : با حل نامعادلهٔ $\frac{-x+a}{2}\le 3$، مجموعهٔ B به‌دست می‌آید:

$$\frac{-x+a}{2}\le 3 \xrightarrow{\times 2} -x+a\le 6 \Rightarrow -x\le 6-a \xrightarrow{\times(-1)} x\ge a-6 \Rightarrow B=[a-6,+\infty)\ ,\ A=[-1,4]\Rightarrow A\cap B=[a-6,4]$$

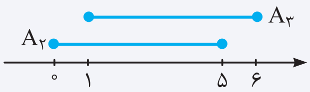
از طرفی $C=A\cap B=[0,4]$، پس $a-6=0$ و از آن‌جا $a=6$. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال: **اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=[n-2\,,\,n+3]$ بازه باشد، مجموعه‌های A_2 ، A_3 ، $A_2\cap A_3$ و A_2-A_3 را مشخص کنید.**

پاسخ : با قرار دادن اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... به جای n در رابطهٔ $A_n=[n-2\,,\,n+3]$، هر یک از بازه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و ... مشخص می‌شوند:

$A_2=[2-2\,,\,2+3]=[0,5]\quad ,\quad A_3=[3-2\,,\,3+3]=[1,6]$

بازه‌های A_2 و A_3 روی محور به‌صورت روبه‌رو می‌باشند:



$A_2\cap A_3=[0,5]\cap[1,6]=[1,5]$

$A_2-A_3=[0,5]-[1,6]=[0,1)$

تست: **اگر n یک عدد طبیعی و $A_n=[(-1)^n n\,,2n]$ بازه باشد، مجموعهٔ $(A_1\cup A_2)-A_1$، شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ :

$A_1=[(-1)^1(1),2(1)]=[-1,2]\ ,\ A_2=[(-1)^2\times 2,2(2)]=[2,4]$

$\Rightarrow A_1\cup A_2=[-1,2]\cup[2,4]=[-1,4]$

$\Rightarrow (A_1\cup A_2)-A_1=[-1,4]-[-1,2]=(2,4]$

مجموعهٔ $(2,4]=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x\le 4\}$ شامل دو عدد صحیح ۳ و ۴ است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ متناهی (باپایان) : مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ متناهی می‌نامیم.

مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان): مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که درنظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم. به‌عبارت دیگر مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعهٔ نامتناهی می‌گوییم.

مثال: **فرض کنید A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ و B مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی ۴ باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های A و B متناهی و کدام یک نامتناهی است؟**

پاسخ : نمایش اعضای هر یک از مجموعه های A و B به صورت زیر می‌باشد: $A=\{1,2,3,4,6,12\}\quad ,\quad B=\{4,8,12,16,...\}$

مجموعهٔ A، ۶ عضو دارد بنابراین یک مجموعهٔ متناهی است، اما تعداد عضوهای مجموعهٔ B را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس B یک مجموعهٔ نامتناهی است.

قرارداد: اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

نکته مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) یک مجموعهٔ متناهی است، زیرا تعداد اعضای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی می‌باشد: $n(\varnothing)=0\ ,\ 0\in\mathbb{W}$

تذکر تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد.

به عنوان مثال، مجموعهٔ درخت‌های شهر تهران، مجموعه‌ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعهٔ متناهی است.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی

ب) مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱

پ) مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های شمال

ت) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ < x \leq ۴\}$

ث) مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج

پاسخ: آ) مجموعهٔ اعداد مربع کامل دورقمی به صورت $A = \{۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱\}$ می‌باشد که یک مجموعهٔ متناهی است.

ب) بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد، بنابراین مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱، یک مجموعهٔ نامتناهی است.

پ) هر چند تعداد درخت‌های جنگل‌های شمال بسیار زیاد است ولی تعداد آن‌ها را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، پس این مجموعه یک مجموعهٔ متناهی است.

ت) مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{Z} \mid -۵ < x \leq ۴\} = \{-۴, -۳, \ldots, ۳, ۴\}$ یک مجموعهٔ متناهی ۹ عضوی است.

ث) تعداد دانش‌آموزان کشور را می‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد، اگر چه مجموعهٔ دانش‌آموزان کشور، مجموعه‌ای با تعداد اعضای بسیار زیاد است ولی متناهی می‌باشد.

ج) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج $E = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا تعداد اعضای آن را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان نمود.

تست: اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۲ - x \leq ۲x - ۱ < ۷\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{۱}{x} < ۰\}$، در این‌صورت کدام مجموعهٔ زیر نامتناهی است؟

۱) A ۲) $A - B$ ۳) $A \cap B$ ۴) $B - A$

پاسخ: هریک از مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$۲ - x \leq ۲x - ۱ < ۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۱ < ۷ \Rightarrow ۲x < ۸ \Rightarrow x < ۴ \\ ۲ - x \leq ۲x - ۱ \Rightarrow ۳ \leq ۳x \Rightarrow ۱ \leq x \end{cases} \Rightarrow ۱ \leq x < ۴ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$\frac{۱}{x} < ۰ \xrightarrow{۱ > ۰} x < ۰ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{\ldots, -۳, -۲, -۱\}$$

مجموعه‌های A، $A - B = A$ و $A \cap B = \varnothing$ متناهی و مجموعهٔ $B - A = B$ یک مجموعهٔ نامتناهی است. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعه‌های $A \cap B$ و $A - B$، متناهی و مجموعه‌های $A \cup B$ و $B - A$، نامتناهی هستند.

نکته اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه:

۱) اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A حتماً متناهی است.

۲) اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۳) اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B حتماً نامتناهی است.

Mathematics
فصل ۱
قسمت دوم
متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U یا M نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۵ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مرجع را می‌توانیم مجموعهٔ اعداد صحیح درنظر بگیریم:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۵k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

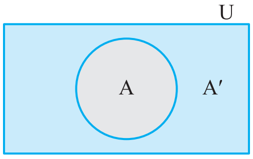
متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن گاه مجموعهٔ $U - A$ را متمم مجموعهٔ A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.

به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

A' به بیان مجموعه‌ای به صورت مقابل است:

$$\mathbf{A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A}$$

نمودار وِن مجموعهٔ A' با مجموعهٔ مرجع U به صورت مقابل است:



مثال: فرض کنیم $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۱ \le x \le ۴\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -۵ \le x < ۱\}$ باشند. متمم مجموعه‌های A و B را یک بار نسبت به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ و بار دیگر نسبت به مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ مشخص کنید.

پاسخ: متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{Z}$:

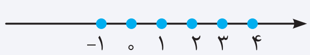
$$A = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \Rightarrow A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\} - \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} = \{\dots, -۳, -۲, ۵, ۶, ۷, \dots\}$$

$$B = [-۵, ۱) \Rightarrow B' = \mathbb{Z} - B = \{\dots, -۷, -۶, ۱, ۲, \dots\}$$

متمم مجموعه‌های A و B نسبت به $\mathbb{R}$:

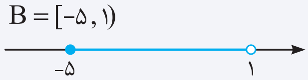
محور اعداد حقیقی را در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های A و B را روی محور مشخص می‌کنیم. در هر مورد، قسمت‌های باقی مانده از محور، متمم مجموعه‌های A و B خواهد بود.

$$A = \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$$



$$\Rightarrow A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -۱) \cup (-۱, ۰) \cup (۰, ۱) \cup (۱, ۲) \cup (۲, ۳) \cup (۳, ۴) \cup (۴, +\infty)$$

$$B = [-۵, ۱)$$



$$\Rightarrow B' = \mathbb{R} - B = \mathbb{R} - [-۵, ۱) = (-\infty, -۵) \cup [۱, +\infty)$$

مثال: فرض کنید $U = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۸, ۱۰\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{۱, ۲, ۶, ۱۰\}$ و $B = \{۱, ۳, ۶, ۸\}$ باشند. مجموعه‌های $A - B'$ ، $(A \cup B)'$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: با حذف عضوهای مجموعه‌های A و B از U مجموعه‌های A' و B' مشخص می‌شوند:

$$A' = U - A = \{\cancel{۱}, \cancel{۲}, ۳, ۵, \cancel{۶}, ۸, \cancel{۱۰}\} - \{۱, ۲, ۶, ۱۰\} = \{۳, ۵, ۸\}$$

$$B' = U - B = \{\cancel{۱}, ۲, \cancel{۳}, ۵, \cancel{۶}, \cancel{۸}, ۱۰\} - \{۱, ۳, ۶, ۸\} = \{۲, ۵, ۱۰\}$$

مجموعهٔ $A - B'$ به صورت مقابل است:

$$A - B' = \{۱, \cancel{۲}, ۶, \cancel{۱۰}\} - \{۲, ۵, ۱۰\} = \{۱, ۶\}$$

برای مشخص کردن مجموعهٔ $(A \cup B)'$، ابتدا مجموعهٔ $A \cup B$ را به‌دست می‌آوریم و سپس متمم آن را مشخص می‌کنیم:

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۶, ۸, ۱۰\} \Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{\cancel{۱}, \cancel{۲}, \cancel{۳}, ۵, \cancel{۶}, \cancel{۸}, \cancel{۱۰}\} - \{۱, ۲, ۳, ۶, ۸, ۱۰\} = \{۵\}$$

با توجه به مجموعه‌های A' و B' داریم:

$$A' \cup B' = \{۳, ۵, ۸\} \cup \{۲, ۵, ۱۰\} = \{۲, ۳, ۵, ۸, ۱۰\}$$

تست: اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی و $A \supseteq B = \{3k-1 | k \in A\}$ با مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشند، مجموعهٔ $B' - A'$ شامل چند عدد اول است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: مجموعه‌های A و B با اعضا به‌صورت زیر می‌باشند:

$$A = \{1,2,3,\dots,9\} \ , \ B = \{3k-1 | k \in A\} = \{3k-1 | k \in \{1,2,\dots,9\}\} \subseteq A \Rightarrow B = \{2,5,8\}$$

$$\Rightarrow B' - A' = \{\dots,-1,0,1,3,4,6,7,9,10,\dots\} - \{\dots,-1,0,10,11,\dots\} = \{1,3,4,6,7,9\}$$

پس مجموعهٔ $B' - A'$، شامل دو عدد اول می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته (قوانین جبر مجموعه‌ها): اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، آن‌گاه روابط زیر همواره برقرار است:

آ) $(A')' = A$ ب) $\varnothing' = U$ پ) $U' = \varnothing$

ت) $A \cap A' = \varnothing$ ث) $A \cup A' = U$ ج) $A - B = A \cap B'$

چ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ح) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ خ) $A - B = A - (A \cap B)$

تذکر روابط (چ) و (ح) به قوانین دمورگان معروف هستند.

مثال: اگر $U = \{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{1,4,5\}$ و $B = \{1,2,3\}$ باشند، درستی تساوی‌های $A - B = A \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$ را بررسی کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A' و B' را با اعضا می‌نویسیم:

$$A' = U - A = \{\cancel{1},2,3,\cancel{4},\cancel{5}\} - \{1,4,5\} = \{2,3\}$$
$$B' = U - B = \{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5\} - \{1,2,3\} = \{4,5\}$$

$$\begin{cases} A - B = \{\cancel{1},4,5\} - \{1,2,3\} = \{4,5\} \\ A \cap B' = \{1,4,5\} \cap \{4,5\} = \{4,5\} \end{cases} \Rightarrow A - B = A \cap B'$$

$$\begin{cases} A \cap B = \{1\} \Rightarrow (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{2,3,4,5\} \\ A' \cup B' = \{2,3\} \cup \{4,5\} = \{2,3,4,5\} \end{cases} \Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$$

تست: اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد صحیح، $A' = \{1,2,3\}$ و $B' = \{2,3,4,5\}$ باشند، آن‌گاه $(A \cup B)'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{2,3\}$ ۲) $\{2,4,5\}$ ۳) $\{3,4,5\}$ ۴) $\{4,5\}$

پاسخ: $(A \cup B)' \overset{\text{دمورگان}}{=\!=} A' \cap B' = \{1,2,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,3\} \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، حاصل $(B \cup \varnothing') \cap (U - A')'$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) A' ۴) U

پاسخ: مجموعهٔ $\varnothing'$ با U برابر است و در نتیجه داریم:

$$B \cup \varnothing' = B \cup U = U \quad (1)$$

مجموعهٔ $U - A'$ با مجموعهٔ A برابر است و در نتیجه داریم:

$$U - A' = A \Rightarrow (U - A')' = A' \quad (2)$$

$(1),(2) \Rightarrow$ حاصل $= U \cap A' = A' \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

مثال: اگر $U = \{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2\}$ باشد:

آ) آیا $B \subseteq A$ است؟ چرا؟

ب) با به دست آوردن A' و B'، چه رابطه‌ای بین A' و B' وجود دارد؟

پاسخ: آ) هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A است، بنابراین $B \subseteq A$

ب) $A' = U - A = \{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},4,5\} - \{1,2,3\} = \{4,5\} \ , \ B' = U - B = \{3,4,5\}$

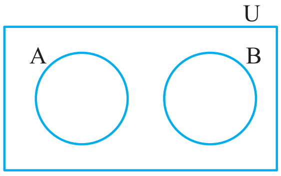
هر عضو A'، عضوی از B' است و در نتیجه $A' \subseteq B'$

نکته اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $B' \subseteq A'$

مجموعه‌های جدا از هم

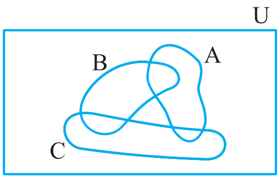
دو مجموعهٔ جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

نمودار وِن برای دو مجموعهٔ جدا از هم به صورت مقابل است:

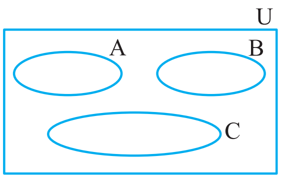


به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۶\}$، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند، زیرا: $A\cap B=\{۱,۲,۵\}\cap\{۳,۴,۶\}=\varnothing$

نکته اگر A، B و C سه مجموعه و $A\cap B\cap C=\varnothing$ باشد، آن گاه لزوماً سه مجموعهٔ A، B و C دو به دو جدا از هم نمی‌باشند. به شکل مقابل توجه کنید:



در واقع سه مجموعهٔ A، B و C دو به دو مجزا هستند هرگاه $A\cap B=\varnothing, A\cap C=\varnothing, B\cap C=\varnothing$



نکته اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه $A\subseteq B'$ و $B\subseteq A'$

مثال: سه مجموعهٔ دو به دو مجزا و نامتناهی A، B و C از اعداد صحیح ارائه دهید که اجتماع آن‌ها برابر $\mathbb{Z}$ شود.

پاسخ: اگر $A=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰\}$، $B=\{۱,۳,۵,\dots\}$ و $C=\{۲,۴,۶,\dots\}$ باشند، آن‌گاه A، B و C سه مجموعهٔ نامتناهی دو به دو جدا از هم‌اند و داریم: $A\cup B\cup C=\mathbb{Z}$

نکته با توجه به این که باقی‌ماندهٔ عدد صحیح و دلخواه a بر عدد طبیعی n برابر عددی حسابی r است که در آن $۰\le r<n$، بنابراین عدد صحیح a را می‌توان به‌صورت $a=nk+r$ نمایش داد که در آن $k\in\mathbb{Z}$ و $۰\le r<n$. بر این اساس مجموعهٔ اعداد صحیح را می‌توان به‌صورت اجتماع n مجموعهٔ دوبه‌دو جدا از هم و نامتناهی نمایش داد.

مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح را به صورت اجتماع چهار مجموعهٔ نامتناهی دو به دو جدا از هم بنویسید.

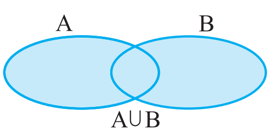
پاسخ: با استفاده از نکتهٔ قبل می‌توان نوشت:

$$A=\{۴k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\dots\}\ ,\ B=\{۴k+۱\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۷,-۳,۱,۵,۹,\dots\}$$
$$C=\{۴k+۲\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۶,-۲,۲,۶,۱۰,\dots\}\ ,\ D=\{۴k+۳\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۵,-۱,۳,۷,\dots\}$$

A، B، C و D چهار مجموعهٔ دو به دو مجزا هستند و $A\cup B\cup C\cup D=\mathbb{Z}$ می‌باشد.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی

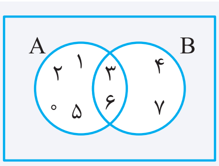
فرض کنید A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، می‌دانیم نمودار ون اجتماع دو مجموعهٔ A و B به صورت مقابل است:



عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B، یعنی $A\cap B$، در هر یک از مجموعه‌های A و B قرار دارند. بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد عضوهایی که در هر دو مجموعه (A یا B یا هر دو) قرار دارند، باید تعداد عضوهای مشترک A و B که دو بار به حساب می‌آیند، یعنی $n(A\cap B)$ را از $n(A)+n(B)$، کم کنیم. پس:

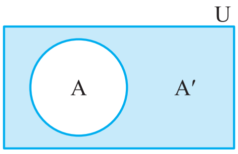
$$\mathbf{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

مثال: با توجه به نمودار وِن مقابل، $n(A\cup B)$ را به‌دست آورید.



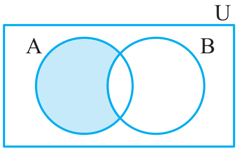
پاسخ: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶+۴-۲=۸$

نکته اگر A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع و متناهی U باشند، آن‌گاه:



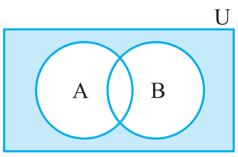
۱) تعداد اعضایی که به مجموعهٔ A تعلق ندارند برابر است با:

$$n(A')=n(U)-n(A)$$



۲) تعداد اعضایی که به مجموعهٔ A تعلق دارند و به مجموعهٔ B تعلق ندارند (فقط به مجموعهٔ A تعلق دارند)، برابر است با:

$$n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)$$



۳) تعداد اعضایی که نه به مجموعهٔ A تعلق داشته باشند و نه به مجموعهٔ B، برابر است با:

$$n(A'\cap B')\xlongequal{\text{قانون دمورگان}}n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

تذکر اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه:

۱) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ۲) $n(A-B)=n(A)$

مثال: **تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد هستند و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی، مرد باشند، در این‌صورت چند نفر از ۶۳ بیمار:**

آ) یا مرد هستند و یا برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟ **ب) مرد هستند ولی برای عمل جراحی بستری نشده‌اند؟**

پ) نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند؟

پاسخ: مجموعهٔ تمام بیماران بیمارستان را با U، مجموعهٔ بیماران مرد را با A و مجموعهٔ افرادی که برای عمل جراحی بستری شده‌اند را با B نشان می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$n(U)=۶۳\ ,\ n(A)=۳۷\ ,\ n(B)=۲۰\ ,\ n(A\cap B)=۱۲$$

آ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cup B$ مطلوب است، پس:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۷+۲۰-۱۲=۴۵$$

ب) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A-B$ مدنظر است، پس:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۳۷-۱۲=۲۵$$

پ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $A'\cap B'=(A\cup B)'$ مدنظر است. پس:

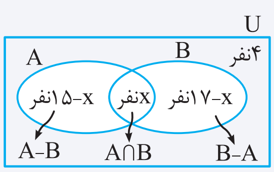
$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۶۳-۴۵=۱۸$$

مثال: **در یک کلاس ۲۷ نفری، تعداد ۱۵ نفر از دانش آموزان عضو گروه نقاشی و ۱۷ نفر آن‌ها عضو گروه طراحی هستند. اگر ۴ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو گروه نباشند، مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:**

آ) عضو هر دو گروه باشند. **ب) عضو گروه نقاشی باشند ولی عضو گروه طراحی نباشند.**

پاسخ: مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان عضو گروه نقاشی را با A، مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان عضو گروه طراحی را با B و مجموعهٔ مرجع را با U نمایش می‌دهیم.

روش اول: در نمودار ون زیر، دو مجموعهٔ A و B سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که ۴ نفر طبق فرض در خارج مجموعهٔ $A\cup B$ قرار دارند. فرض کنیم x نفر در اشتراک دو مجموعهٔ A و B باشند، در این صورت $۱۵-x$ نفر در مجموعهٔ $A-B$ و $۱۷-x$ نفر در مجموعهٔ $B-A$ هستند. بنابراین:



$$n(U)=۲۷\Rightarrow(۱۵-x)+x+(۱۷-x)+۴=۲۷\Rightarrow ۳۶-x=۲۷\Rightarrow x=۹$$

آ) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هر دو گروه هستند، برابر $x=۹$ نفر می‌باشد.

ب) تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ مطلوب است، پس

$$n(A-B)=۱۵-x=۱۵-۹=۶$$

روش دوم:

طبق فرض $n(A)=۱۵$، $n(B)=۱۷$ و $n(A\cup B)=۲۷-۴=۲۳$ می‌باشد.

آ) $n(A\cap B)$ جواب مسئله است: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۲۳=۱۵+۷-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۲-۲۳=۹$

ب) $n(A-B)$ جواب مسئله است: $n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۱۵-۹=۶$

تست: اگر $n(A)=۱۷$، $n(A\cap B)=۴$ و $n(A\cup B)=۳۰$ باشند، $n(B)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ:
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۰=۱۷+n(B)-۴$$
$$\Rightarrow n(B)+۱۳=۳۰\Rightarrow n(B)=۳۰-۱۳=۱۷\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست: در یک آموزشگاه هنری، تعداد افرادی که در کلاس نقاشی شرکت کرده‌اند، ۲ برابر تعداد افرادی است که در کلاس تئاتر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد افرادی که در کلاس نقاشی شرکت کرده‌اند ولی در کلاس تئاتر شرکت نکرده‌اند، ۸ نفر و تعداد افرادی که در کلاس تئاتر شرکت کرده‌اند ولی در کلاس نقاشی شرکت نکرده‌اند ۱ نفر باشد، چند نفر حداقل در یکی از این دو کلاس شرکت کرده‌اند؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

پاسخ: مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A: مجموعهٔ افرادی که در کلاس نقاشی شرکت کرده‌اند. ، B: مجموعهٔ افرادی که در کلاس تئاتر شرکت کرده‌اند.

باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cup B$ را به‌دست بیاوریم. طبق فرض داریم:

$$n(A)=۲n(B)\ ,\ n(A-B)=۸\ ,\ n(B-A)=۱$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۸\xrightarrow{n(A)=۲n(B)}۲n(B)-n(A\cap B)=۸\quad(۱)$$
$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱\quad(۲)$$
$$(۱),(۲)\Rightarrow\begin{cases}۲n(B)-\cancel{n(A\cap B)}=۸\\-n(B)+\cancel{n(A\cap B)}=-۱\end{cases}\Rightarrow n(B)=۷\ ,\ n(A\cap B)=۶$$
$$\Rightarrow n(A)=۲n(B)=۱۴\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۴+۷-۶=۱۵\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تعداد عضوهای اجتماع سه مجموعه متناهی — ویژهٔ علاقمندان

اگر A، B و C سه مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

تست: اگر $n(A\cap B)=۴$، $n(A\cap C)=n(B\cap C)=۰$، $n(A)=۱۰$، $n(B)=۴$ و $n(C)=۷$ باشد، مقدار $n(A\cup B\cup C)$ کدام است؟

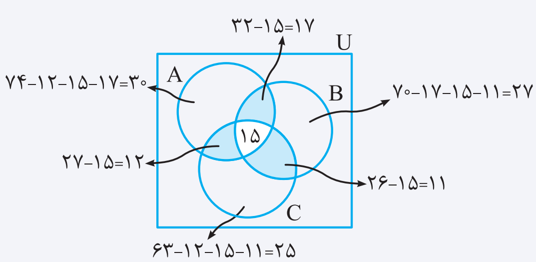
۱) ۲۱ ۲) ۱۷ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

پاسخ: A و C و نیز B و C مجموعه‌های جدا از هم می‌باشند، بنابراین:
$$A\cap B\cap C=\varnothing\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۰$$
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=۱۰+۴+۷-۴-۰-۰+۰=۱۷\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال: در یک نظرسنجی از ۱۵۰ نفر، مشخص شده است که:
۷۴ نفر مجلهٔ A، ۷۰ نفر مجلهٔ B و ۶۳ نفر مجلهٔ C را می‌خوانند. همچنین ۳۲ نفر مجله‌های A و B، ۲۶ نفر مجله‌های B و C، ۲۷ نفر مجله‌های A و C و ۱۵ نفر هر سه مجلهٔ A، B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعیین تعداد افرادی از این مجموعه که:

آ) دقیقاً یکی از سه مجلهٔ A یا B یا C را می‌خوانند.
ب) دقیقاً دو مجله می‌خوانند.
پ) مجلهٔ A را می‌خوانند ولی مجلهٔ B را نمی‌خوانند.
ت) هیچ‌یک از این سه مجله را نمی‌خوانند.

پاسخ: مجموعه‌های A، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
A: افرادی که مجلهٔ A را می‌خوانند. B: افرادی که مجلهٔ B را می‌خوانند. و C: افرادی که مجلهٔ C را می‌خوانند. نمودار وِن سه مجموعهٔ A، B و C به‌صورت زیر است که با توجه به اطلاعات مسئله، تعداد عضوهای هر قسمت را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا تعداد اعضای اشتراک سه مجموعه، سپس اشتراک دوبه‌دوی مجموعه‌ها و درنهایت باقی‌ماندهٔ مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:



با توجه به نمودار داریم:

آ) $۳۰+۲۷+۲۵=۸۲$

ب) $۱۲+۱۷+۱۱=۴۰$

پ) $۳۰+۱۲=۴۲$

ت) $۱۵۰-(۳۰+۲۷+۲۵+۱۲+۱۷+۱۱+۱۵)=۱۵۰-۱۳۷=۱۳$

Mathematics Questions

فصل ۱
[مجموعه، الگو و دنباله]

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ ب) $\mathbb{N}\not\subseteq\mathbb{Q}'$ پ) $-\sqrt{۴}\notin\mathbb{Q}$

ت) $\pi-۳/۱۴\in\mathbb{Q}$ ث) $-۴\in\{-۵,۱\}$ ج) $۰\in\{۰,۱\}$

چ) $-۱\in(-۱,۲]$ ح) $\frac{۲}{۳}\in(۰,۱)$ خ) $\sqrt{۳}\in(۲,۳)$

د) $(n\in\mathbb{N})\ \frac{n}{n+۱}\in(۰,۱)$ ذ) $(۰,۱]=[۰,۱)$ ر) $\varnothing\subseteq(-\infty,۰]$

ز) $[-۱,۱]\subseteq[-۱,۲)$ ژ) $\{۰,۱,۲\}\subseteq[-۱,۴)$ س) $(-۱,۱)\subseteq\mathbb{Q}$

ش) $۶/۰۲۳\times۱۰^{۲۳}\in(۱۰۰,+\infty)$ ص) $-۶\times۱۰^{-۴}\in(-۱,۰)$ ض) $\{x\in\mathbb{Q}\mid -۱<x<۰\}=(-۱,۰)$

۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.

$$-\frac{۷}{۲}\ ,\ \sqrt{۵}\ ,\ \frac{\sqrt{۱۶}}{۲}\ ,\ -\frac{\pi}{۲}\ ,\ \sqrt{۲}-۱/۴\ ,\ ۱/۰۵۱۲۱۲۱۲...\ ,\ -۱/۰۲\times۱۰^{۴}$$

۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.

آ) $[-۱,۴)$ ب) $(۰,۲]$ پ) $(۰,۲)$ ت) $[-۲,-۱]$

ث) $[-۲,+\infty)$ ج) $(-\infty,۱]$ چ) $(۱,+\infty)$ ح) $(-\infty,۲)$

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.

آ) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x<۲\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>-۲\}$ پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid -۱\le x<۲\}$ ت) $\{x\in\mathbb{Q}'\mid x<۱\}$

۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.

آ) $(-۲,۵]\cap(-۱,۷)$ ب) $[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)$ پ) $[-۲,۴)\cup(۰,۵]$ ت) $(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)$

ث) $(-\infty,۲)-(۰,۳)$ ج) $(۰,۵]-[۲,+\infty)$ چ) $(-۱,۰]\cap[۰,۲)$ ح) $(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)$

۶. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x<۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۰\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۷. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le-۱\}$، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x\le۳\}$ و $C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-x+۳}{۲}\le۱\right\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

آ) C ب) $A\cup B$ پ) $B\cap C$

ت) $A-B$ ث) $B-(A\cup C)$ ج) $(A\cap B)\cup C$

۸. مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ ، $[۲,۵]-\{۳,۴\}$ و $[۰,۱)-[-۱,۴]$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۹. اگر $\frac{۲x+۱}{۳}\in[-۲,۱)$ باشد، حدود x را مشخص کنید.

۱۰. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲ ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی پنج رقمی

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ ت) مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

ث) مجموعهٔ ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{۵}$ ج) مجموعهٔ روستاهای ایران

چ) مجموعهٔ اعداد اول
ح) بازهٔ $(-۱,۲)$
خ) مجموعهٔ کسرها با مخرج ۲
د) مجموعهٔ اعداد اول زوج و دو رقمی
ذ) مجموعهٔ مولکول‌های آب در یک مول آب
ر) $\{۱+(-۱)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۱۱. فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی ۶ باشد.

آ) مجموعهٔ U را با اعضای آن نمایش دهید.
ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی و یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از U بنویسید.
ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند A و B بنویسید که $A \subseteq B$ باشد.
ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند C و D بنویسید که $U = C \bigcup D$ و $C \bigcap D = \varnothing$

۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

آ) مجموعهٔ $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ متناهی است یا نامتناهی؟
ب) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.
پ) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ متناهی باشد.
ت) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ نامتناهی باشد.
ث) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟
ج) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟
چ) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟
ح) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۱۳. اگر $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۱,۲,۴,۵\}$ ، $B = \{۲,۳,۶\}$ و $C = \{۱,۵,۶\}$، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

آ) $A \bigcap B'$
ب) $A' \bigcup C'$
پ) $B \bigcap (A \bigcup C)'$
ت) $A' - B'$

۱۴. مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۵ را به‌ترتیب A و B بنامید. اگر $U = \{۱,۲,\cdots,۲۵\}$ باشد، ابتدا هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هریک را به‌دست آورید.

آ) A'
ب) $A \bigcup B$
پ) $B \bigcap A'$
ت) $A' \bigcup B'$
ث) $A' \bigcap B'$

۱۵. اگر A زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد، ساده شدهٔ عبارت $(A' \bigcap \varnothing')' \bigcup (A' - (A \bigcap A'))$ را بنویسید.

۱۶. $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ) $(-۱,۰]$
ب) $\mathbb{W}$
پ) $(-\infty,۲)$
ت) $(-۱,+\infty)$
ث) $[۰,۴] - [۱,۲)$
ج) $(-۱,۳) \bigcup (۵,+\infty)$

۱۷. $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید.

آ) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A ارائه کنید که A' هم نامتناهی باشد.
ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B ارائه کنید که B' متناهی باشد.
پ) اگر C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، C' متناهی است یا نامتناهی؟
ت) اگر D مجموعه‌ای متناهی باشد، D' متناهی است یا نامتناهی؟

۱۸. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشد به‌طوری‌که $n(U) = ۸۰$ ، $n(A) = ۲۱$ ، $n(B) = ۳۵$ و $n(A \bigcap B) = ۱۲$. مطلوب است:

آ) $n(B')$
ب) $n(A \bigcup B)$
پ) $n(A - B)$
ت) $n(B \bigcap A')$
ث) $n(A' \bigcup B')$
ج) $n(A' \bigcap B')$
چ) $n((A-B) \bigcup (B-A))$

۱۹. اگر $3n(A) = 2n(B) = 6n(A\cap B)$ باشد، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ ب) $\dfrac{n(A\cup B)-n(A\cap B)}{n(A-B)}$

۲۰. به‌وسیلهٔ نمودار وِن نشان دهید:

آ) اگر $A\subseteq B\subseteq U$، آن‌گاه $B'\subseteq A'\subseteq U$ ب) $A'-B'=B-A$

۲۱. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سریال‌های طنز و ۶۰ نفر به سریال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر به حداقل یکی از این دو نوع سریال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

آ) به هر دو نوع سریال علاقمند باشند.

ب) به سریال‌های طنز علاقمندند ولی به سریال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

پ) نه به سریال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سریال‌های خانوادگی.

۲۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند. ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

پ) چند نفر فوتبال بازی می‌کنند ولی والیبال بازی نمی‌کنند. ت) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی

۲۳. به تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:

شکل(۳) شکل(۲) شکل(۱)

اگر a_n تعداد چوب کبریت‌های شکل n اُم باشد، آن‌گاه:

آ) a_1، a_2، a_3 و a_4 را بنویسید.

ب) تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در مرحلهٔ n اُم را بر حسب n بنویسید.

پ) در شکل سی‌اُم چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۲۴. در یک الگوی خطی، جملات پنجم ویازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می باشند.

آ) جملهٔ عمومی الگو را بنویسید. ب) جملهٔ سی‌اُم را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد؟

۲۵. پنج دنباله و پنج جملهٔ عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جملهٔ عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

• $t_n=\dfrac{2+(-1)^n n^2}{n^2+1}$ • $d_n=2-n$ • $c_n=n^2+2n$ • $b_n=\dfrac{(-1)^n}{n+2}$ • $a_n=\dfrac{4n}{2n-1}$

$4, \dfrac{8}{3}, \dfrac{12}{5}, \dots$ $3, 8, 15, \dots$ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{6}{5}, -\dfrac{7}{10}, \dots$ $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \dots$ $1, 0, -1, \dots$

۲۶. در هر قسمت، سه جملهٔ بعدی دنباله را بنویسید. هم‌چنین در سه قسمت اول، جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

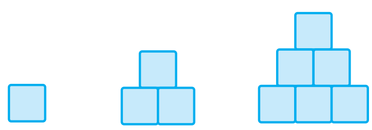
آ) $-1, 3, 7, \dots$ ب) $1, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dots$ پ) $3, 1, \dfrac{1}{3}, \dots$ ت) $1, 2, 4, 7, \dots$

۲۷. جملهٔ عمومی‌یک دنباله به صورت $a_n=\dfrac{3n+2}{n+4}$ است.

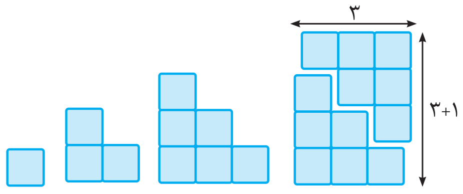
آ) چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید. ب) چند جملهٔ این دنباله کوچک‌تر از ۲ می‌باشند؟

پ) جملهٔ چندم دنباله، برابر $\dfrac{5}{2}$ است؟

۲۸. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:



شکل(۳) شکل(۲) شکل(۱)



a_1 a_2 a_3 a_3

آ) شکل بعدی را رسم و سپس تعـداد مربع‌های هـر شـکل را بـه صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل کنید. با توجه بـه تصویر حاصل، a_n را برحسب n به‌دست آورید.

ت) بـه کمک قسـمت (پ)، حاصـل عبـارت $1+2+3+\dots+n$ را به‌دست آورید.

۲۹. جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هریک از آن‌هایک الگوی هندسی نظیر کنید.

آ) $a_n = 3n$ ب) $b_n = 4n + 2$ پ) $c_n = n^2 + 1$ ت) $d_n = n^2 + 2n$

۳۰. برای دنباله‌های درجه دوم زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهٔ عمومی هر دنباله را بیابید.

آ) $3, 9, 19, \dots$ ب) $2, 6, 12, \dots$

۳۱. از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هریک از آن‌ها قدرنسبت را تعیین کنید.

آ) $3, 8, 13, \dots$ ب) $2, 4, 7, 11, \dots$ پ) $8, 4, 0, -4, \dots$ ت) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

ث) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots$ ج) $-1, -1, -1, -1, \dots$ چ) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

۳۲. یک دنبالهٔ حسابی مثال بزنید که:

آ) قدرنسبت آن مثبت و جملهٔ سوم آن ۵ باشد. ب) قدرنسبت آن منفی و جملهٔ پنجم آن ۳- باشد.

پ) فقط سه جملهٔ مثبت داشته باشد. ت) فقط چهار جملهٔ منفی داشته باشد.

۳۳. در یک دنبالهٔ حسابی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲ و ۴۴ می‌باشند. جملهٔ سی ویکم دنباله را مشخص کنید.

۳۴. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ یازدهم، ۱۲ واحد کم‌تر از جملهٔ هفتم آن است. اگر جملهٔ پنجم آن ۱۷- باشد، دنباله را مشخص کنید.

۳۵. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع چهار جملهٔ اول ۲۶ و جملهٔ هفتم دنباله برابر ۲۹ می‌باشد. جملهٔ نوزدهم دنباله را مشخص کنید.

۳۶. در یک دنبالهٔ حسابی مجموع چهار جملهٔ اول ۱۰- و مجموع پنج جملهٔ بعدی ۵۵ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

۳۷. در دنبالهٔ حسابی $201, 198, 195, \dots$:

آ) جملهٔ هفدهم دنباله را مشخص کنید. ب) دنباله چند جملهٔ مثبت دارد؟

پ) چند جملهٔ دنباله، عددی سه رقمی می‌باشد؟

۳۸. در دنبالهٔ حسابی $-107, -100, -93, \dots$:

آ) جملهٔ سی و یکم دنباله را مشخص کنید. ب) کدام جملهٔ دنباله برابر ۱۴۵ است؟

پ) دنباله چند جملهٔ منفی دارد؟

۳۹. بین دو عدد ۳- و ۳۳، پنج واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را مشخص کنید.

۴۰. در دنبالهٔ حسابی $\dots, -10, x+3, 4x$، واسطهٔ حسابی جملات بیست و پنجم و چهل و دوم را به‌دست آورید.

۴۱. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی t_n، حاصل $\frac{-t_7 + 2t_5 - t_{10}}{t_6 - t_{11}}$ را به‌دست آورید.

۴۲. پنج عدد که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند را طوری مشخص کنید که مجموع آن‌ها برابر ۸۰ و بزرگ‌ترین عدد، دو برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر باشد.

۴۳. زوایای یک شش‌ضلعی محدب که اندازهٔ کوچک‌ترین آن‌ها 80° می‌باشد، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اندازهٔ زوایای شش‌ضلعی را به‌دست آورید.

قسمت چهارم: دنبالهٔ هندسی

۴۴. کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنبالهٔ هندسی است؟ جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را مشخص کنید.

آ) $2, -6, 18, -54, \dots$ ب) $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{3}, \dots$ پ) $4, 4, 4, 4, \dots$

۴۵. در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ دوم و پنجم به ترتیب ۳۶ و $\frac{9}{16}$ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

۴۶. جملات دوم و هشتم دنبالهٔ حسابی $5, 12, \dots$ به ترتیب جملات اول و دوم یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند. جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را مشخص کنید.

۴۷. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و دوم برابر ۱۶ و تفاضل جملهٔ دوم از جملهٔ چهارم برابر ۹۶ می باشد. دنباله را مشخص کنید.

۴۸. در یک دنباله با جملهٔ عمومی t_n، $t_{n+1} = \frac{1}{3}t_n$ و $t_2 = 9$ می باشند. جملهٔ هفتم دنباله را مشخص کنید.

۴۹. واسطهٔ هندسی بین دو عدد $\sqrt{5} - 3$ و $\sqrt{5} + 3$ را به‌دست آورید.

۵۰. در دنبالهٔ هندسی $x - 3, 3 - x, x + 6, \dots$، جملهٔ پانزدهم چند برابر جملهٔ هفتم آن است؟

۵۱. در دنبالهٔ هندسی $1, x, 2x + 3, y^2 + 2, 81, \dots$ اگر همهٔ جملات مثبت باشند، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

۵۲. جملات چهارم، دهم و هجدهم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

۵۳. اگر جمله‌های اول، دوم و ششم از یک دنبالهٔ حسابی با سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی برابر باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

۵۴. در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل ضرب سه جملهٔ اول ۸ و جملهٔ چهارم آن ۳۲ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

۵۵. بین دو عدد $\frac{۱}{۶}$ و ۲۱۶ سه عدد چنان درج کنید که پنج عدد حاصل، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی شوند.

۵۶. شخصی ده میلیون تومان پول را در یک بانک با نرخ سود مشارکت ۲۰ درصد سرمایه گذاری کرده است.

آ) پول این شخص بعد از ۵ سال چقدر می‌شود؟

ب) سرمایهٔ این شخص بعد از n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

۵۷. جمعیت شهری ۱۰۰۰۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر هر سال ۴ درصد به جمعیت این شهر اضافه شود، جمعیت شهر بعد از n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

۵۸. اگر جملات دو دنبالهٔ هندسی را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ هندسی خواهد بود؟ چرا؟

پاسخ فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۱

آ) درست است، زیرا اجتماع دو مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ برابر $\mathbb{R}$ است و هیچ عضو مشترکی ندارند.

ب) درست است، زیرا هیچ عدد طبیعی، گنگ نیست. بنابراین هیچ عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ در $\mathbb{Q}'$ قرار ندارد، پس $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}'$

پ) نادرست است، زیرا $-\sqrt{۴} = -۲ \in \mathbb{Q}$

ت) نادرست است، زیرا π یک عدد گنگ است و ارقام اعشاری آن بی‌پایان است و داریم: $\pi = ۳/۱۴۱۵... \Rightarrow \pi - ۳/۱۴ = ۰/۰۰۱۵... \in \mathbb{Q}'$

توجه کنید که ارقام اعشاری در عدد $۰/۰۰۱۵...$ نه متناوب است و نه مختوم.

ث) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $\{-۵, ۱\}$ فقط شامل دو عضو ۵- و ۱ است، پس $-۴ \notin \{-۵, ۱\}$

ج) درست است.

چ) نادرست است، زیرا بازهٔ نیم‌باز $(-۱, ۲]$ شامل عدد ۱- نمی‌باشد، پس $-۱ \notin (-۱, ۲]$

ح) درست است، زیرا $۰ < \frac{۲}{۳} < ۱$ ، پس $\frac{۲}{۳} \in (۰, ۱)$

خ) نادرست است، زیرا $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ و درنتیجه $\sqrt{۳} \notin (۲, ۳)$

د) درست است، زیرا به‌ازای هر عدد طبیعی n، $۰ < n < n+۱$ و در نتیجه $۰ < \frac{n}{n+۱} < ۱$ ، پس $\frac{n}{n+۱} \in (۰, ۱)$

ذ) نادرست است، زیرا به‌طور مثال $۱ \in (۰, ۱]$ ولی $۱ \notin [۰, ۱)$

ر) درست است، زیرا $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

ز) درست است، زیرا هر عضوی که در مجموعهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد، به مجموعهٔ $(-۱, ۲)$ نیز تعلق دارد.

ژ) درست است، زیرا مجموعهٔ $[-۱, ۴)$ شامل اعداد صحیح ۰ ، ۱ و ۲ می‌باشد.

س) نادرست است، زیرا مجموعهٔ $(-۱, ۱)$ شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۱- و ۱ می‌باشد و اعداد گنگ واقع در این بازه متعلق به $\mathbb{Q}$ نیستند. به عنوان مثال $\frac{\sqrt{۲}}{۲} \in (-۱, ۱)$ ولی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یک عدد گویا نمی‌باشد.

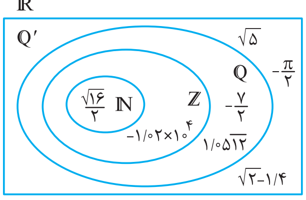
ش) درست است، زیرا $۱۰۰ > ۱۰^{۲۳} \times ۶/۰۲۳$

ص) درست است، زیرا $۰ > -۰/۰۰۰۶ = -۶ \times ۱۰^{-۴} > -۱$ می‌باشد.

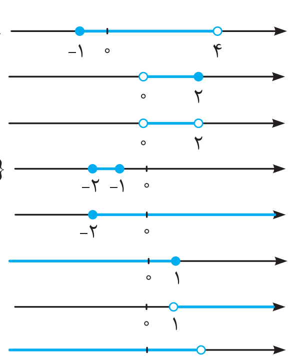
ض) نادرست است، زیرا بازهٔ $(-۱, ۰)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۱- و ۰ است، نه فقط شامل اعداد گویای بین ۱- و ۰

۲

عدد $۲ = \frac{۴}{۲} = \frac{\sqrt{۱۶}}{۲}$ یک عدد طبیعی، عدد $-۱۰۲۰۰ = -۱/۰۲ \times ۱۰^۴$ یک عدد صحیح منفی، اعداد $-\frac{۷}{۲}$ و $۱/۰۵۱۲$ گویا و اعداد $\sqrt{۵}$، $-\frac{\pi}{۲}$ و $\sqrt{۲} - ۱/۱۴$ گنگ هستند. بنابراین:



۳



آ) $[-۱, ۴) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x < ۴\}$

ب) $(۰, ۲] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x \le ۲\}$

پ) $(۰, ۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۲\}$

ت) $[-۲, -۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x \le -۱\}$

ث) $[-۲, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -۲\}$

ج) $(-\infty, ۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le ۱\}$

چ) $(۱, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۱\}$

ح) $(-\infty, ۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < ۲\}$

۱۱۲۷. صفحهٔ هریک از دو عقربهٔ A و B را به ترتیب به ۴ و ۵ قطاع مساوی با شماره‌های {۱,۲,۳,۴} و {۱,۲,۳,۴,۵} تقسیم می‌کنیم. عقربه‌های هر دو صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این‌که هر دو عقربه، روی ناحیهٔ اعداد مساوی هم قرار نگیرند، چقدر است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

۱۱۲۸. حروف کلمهٔ «ABADN» را بریده به‌طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، دو حرف A کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۱۲۹. ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند، با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۱۱۳۰. از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲۶ ۴) ۰/۲۸

۱۱۳۱. دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۱۳۲. یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، جمع عدد دو تاس بیش‌تر از ۴ یا سکه «رو» ظاهر شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

۱۱۳۳. احتمال آن‌که چهار نفر همگی در یک ماه از سال متولد شده باشند، کدام است؟

۱) $(\frac{۱۱}{۱۲})^۳$ ۲) $\frac{۹۹۰}{۱۲^۳}$ ۳) $(\frac{۱}{۱۲})^۳$ ۴) $(\frac{۱}{۱۲})^۴$

۱۱۳۴. چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۱۱۳۵. احتمال قبولی شخصی در کنکور ۰/۴ بیش‌تر از احتمال قبول نشدن وی در کنکور است. احتمال قبولی این شخص در کنکور چقدر است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۴۵

۱۱۳۶. اگر $P(B')=۲P(A)=۰/۴$ و $P(A\cap B)=۰/۱$ باشد، مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۱۱۳۷. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A-B)=۲P(B-A)=P(A\cap B)$، حاصل $\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۱۳۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری که $P(A)=۰/۶$، $P(B)=۰/۷$ و $P(A\cap B')=۰/۲$، آن‌گاه $P(A'\cap B)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۱۱۳۹. تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۱۴۰. از ساکنین شهری، ۳۰ درصد روزنامهٔ الف، ۲۵ درصد روزنامهٔ ب و ۹ درصد روزنامهٔ الف و ب را می‌خوانند. اگر فردی از بین آن‌ها به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال، هیچ یک از این دو روزنامه را نمی‌خواند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۵۴ ۴) ۰/۵۶

۱۱۴۱. اگر $P(A-B)=\frac{۲}{۱۷}$، $P(B-A)=\frac{۱۰}{۱۷}$ و $P(B)=۳P(A)$، آن‌گاه $P(A\cup B)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۷}$ ۲) $\frac{۱۶}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۷}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۷}$

۱۱۴۲. اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B-A)=\frac{۲}{۷}$ باشد، حداکثر مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۸}{۷}$

قسمت چهارم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه، نمونه، متغیر و انواع آن

علم آمار، جامعه و نمونه

۱۱۴۳. به مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات .... می‌گوییم.

۱) نمونه ۲) علم آمار ۳) آمار ۴) متغیر

۱۱۴۴. اولین قدم در استفاده از علم آمار، کدام است؟

۱) سازماندهی ۲) پیش‌بینی ۳) تحلیل داده‌ها ۴) جمع‌آوری اعداد و ارقام

۱۱۴۵. در کدام بررسی، اندازهٔ نمونه برابر اندازهٔ جامعه است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) نمونهٔ تصادفی ۲) دسته‌بندی ۳) سرشماری ۴) با متغیر کیفی

۱۱۴۶. در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟

۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد. ۲) نمونه، برابر جامعهٔ آماری

۳) اندازهٔ نمونه، برابر اندازهٔ جامعه ۴) نمونه، زیرمجموعهٔ جامعهٔ آماری

۱۱۴۷. کدام یک از موارد زیر، جزء مشکلات سرشماری نمی‌باشد؟

۱) مشخص نبودن موضوع مورد مطالعه ۲) وقت‌گیر بودن دسترسی به تمام اعضاء

۳) گران تمام شدن بررسی تمام اعضاء ۴) در دسترس نبودن تمام اعضاء

۱۱۴۸. کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟

۱) تعداد اعضای جامعه، اندازهٔ جامعه نام دارد. ۲) جامعهٔ آماری، زیرمجموعه‌ای از نمونه است.

۳) سرشماری، یعنی مورد مطالعه قرار دادن تمام افراد جامعه ۴) تعداد اعضای نمونه، اندازهٔ نمونه نام دارد.

متغیر

۱۱۴۹. کدام متغیر، کیفی ترتیبی نمی‌باشد؟

۱) مراحل کشت گیاه ۲) ماه تولد ۳) رشتهٔ تحصیلی دانشجویان ۴) میزان تحصیلات

۱۱۵۰. کدام متغیر، کیفی ترتیبی است؟

۱) گروه خونی ۲) جمعیت ۳) وزن ۴) مراحل زندگی

۱۱۵۱. نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) کمّی گسسته ۲) کمّی پیوسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

۱۱۵۲. گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) کیفی اسمی ۲) کیفی ترتیبی ۳) کمّی پیوسته ۴) کمّی گسسته

۱۱۵۳. مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) کمّی گسسته ۲) کمّی پیوسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

۱۱۵۴. از چه نوع متغیری برای شماره‌گذاری صندلی‌های شرکت‌کنندگان در امتحانات، استفاده می‌شود؟

۱) پیوسته ۲) اسمی ۳) ترتیبی ۴) گسسته

۱۱۵۵. «شمارهٔ صندلی» متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

۱) کمّی پیوسته ۲) کمّی گسسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

۱۱۵۶. شاخص تودهٔ بدن چه نوع متغیری است؟

۱) کمّی پیوسته ۲) کمّی گسسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

۱۱۵۷. شاخص تودهٔ بدن شخصی با وزن ۶۰ کیلوگرم و قد ۱۶۰ سانتی‌متر با تقریب دو رقم اعشار کدام است؟

۱) ۲۲/۸۲ ۲) ۲۲/۸۶ ۳) ۲۳/۴۴ ۴) ۲۳/۶۸

۱۱۵۸. شاخص تودهٔ بدن و قد شخصی به‌ترتیب ۲۰ و ۱۷۰ سانتی‌متر می‌باشد. وزن این شخص برحسب کیلوگرم کدام است؟

۱) ۵۶/۲ ۲) ۵۷/۸ ۳) ۵۸/۴ ۴) ۵۸/۷

Mathematics Questions

فصل ۱
[مجموعه، الگو و دنباله]

قسمت اول: مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ ب) $\mathbb{N}\not\subseteq\mathbb{Q}'$ پ) $-\sqrt{۴}\notin\mathbb{Q}$

ت) $\pi-۳/۱۴\in\mathbb{Q}$ ث) $-۴\in\{-۵,۱\}$ ج) $۰\in\{۰,۱\}$

چ) $-۱\in(-۱,۲]$ ح) $\frac{۲}{۳}\in(۰,۱)$ خ) $\sqrt{۳}\in(۲,۳)$

د) $(n\in\mathbb{N})\ \frac{n}{n+۱}\in(۰,۱)$ ذ) $(۰,۱]=[۰,۱)$ ر) $\varnothing\subseteq(-\infty,۰]$

ز) $[-۱,۱]\subseteq[-۱,۲)$ ژ) $\{۰,۱,۲\}\subseteq[-۱,۴)$ س) $(-۱,۱)\subseteq\mathbb{Q}$

ش) $۶/۰۲۳\times۱۰^{۲۳}\in(۱۰۰,+\infty)$ ص) $-۶\times۱۰^{-۴}\in(-۱,۰)$ ض) $\{x\in\mathbb{Q}\mid -۱<x<۰\}=(-۱,۰)$

۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.

$$-\frac{۷}{۲}\ ,\ \sqrt{۵}\ ,\ \frac{\sqrt{۱۶}}{۲}\ ,\ -\frac{\pi}{۲}\ ,\ \sqrt{۲}-۱/۴\ ,\ ۱/۰۵۱۲۱۲۱۲...\ ,\ -۱/۰۲\times۱۰^{۴}$$

۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.

آ) $[-۱,۴)$ ب) $(۰,۲]$ پ) $(۰,۲)$ ت) $[-۲,-۱]$

ث) $[-۲,+\infty)$ ج) $(-\infty,۱]$ چ) $(۱,+\infty)$ ح) $(-\infty,۲)$

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.

آ) $\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x<۲\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>-۲\}$ پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid -۱\le x<۲\}$ ت) $\{x\in\mathbb{Q}'\mid x<۱\}$

۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید.

آ) $(-۲,۵]\cap(-۱,۷)$ ب) $[-۴,۰]\cap[-۱,+\infty)$ پ) $[-۲,۴)\cup(۰,۵]$ ت) $(-\infty,-۱)\cup[-۱,+\infty)$

ث) $(-\infty,۲)-(۰,۳)$ ج) $(۰,۵]-[۲,+\infty)$ چ) $(-۱,۰]\cap[۰,۲)$ ح) $(-\infty,-۱)\cup(-\infty,۳)$

۶. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x<۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>۰\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۷. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le-۱\}$ ، $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x\le۳\}$ و $C=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{-x+۳}{۲}\le۱\right\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

آ) C ب) $A\cup B$ پ) $B\cap C$

ت) $A-B$ ث) $B-(A\cup C)$ ج) $(A\cap B)\cup C$

۸. مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ ، $[۲,۵]-\{۳,۴\}$ و $[-۱,۴]-[۰,۱)$ را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به‌صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۹. اگر $\frac{۲x+۱}{۳}\in[-۲,۱)$ باشد، حدود x را مشخص کنید.

۱۰. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام‌یک نامتناهی است؟

آ) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲ ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی پنج رقمی

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ ت) مجموعهٔ اعداد گنگ بین ۰ و ۱

ث) مجموعهٔ ارقام بعد از ممیز عدد $\sqrt{۵}$ ج) مجموعهٔ روستاهای ایران

چ) مجموعهٔ اعداد اول
ح) بازهٔ $(-۱,۲)$
خ) مجموعهٔ کسرها با مخرج ۲
د) مجموعهٔ اعداد اول زوج و دو رقمی
ذ) مجموعهٔ مولکول‌های آب در یک مول آب
ر) $\{۱+(-۱)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۱۱. فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی ۶ باشد.

آ) مجموعهٔ U را با اعضای آن نمایش دهید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی و یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند A و B بنویسید که $A \subseteq B$ باشد.

ث) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از U مانند C و D بنویسید که $U = C \bigcup D$ و $C \bigcap D = \varnothing$

۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

آ) مجموعهٔ $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ متناهی است یا نامتناهی؟

ب) دو مجموعهٔ نامتناهی متمایز مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

پ) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ متناهی باشد.

ت) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B - A$ نامتناهی باشد.

ث) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟

ج) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است یا نامتناهی؟

چ) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

ح) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است یا نامتناهی؟

قسمت دوم: متمم یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۱۳. اگر $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۱,۲,۴,۵\}$ ، $B = \{۲,۳,۶\}$ و $C = \{۱,۵,۶\}$، هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

آ) $A \bigcap B'$ ب) $A' \bigcup C'$ پ) $B \bigcap (A \bigcup C)'$ ت) $A' - B'$

۱۴. مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۵ را به‌ترتیب A و B بنامید. اگر $U = \{۱,۲,\cdots,۲۵\}$ باشد، ابتدا هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هریک را به‌دست آورید.

آ) A' ب) $A \bigcup B$ پ) $B \bigcap A'$

ت) $A' \bigcup B'$ ث) $A' \bigcap B'$

۱۵. اگر A زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد، سادهٔ شدهٔ عبارت $((A' \bigcap \varnothing')' \bigcup (A' - (A \bigcap A'))$ را بنویسید.

۱۶. $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید و متمم هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

آ) $(-۱,۰]$ ب) $\mathbb{W}$ پ) $(-\infty,۲)$

ت) $(-۱,+\infty)$ ث) $[۰,۴]-[۱,۲)$ ج) $(-۱,۳) \bigcup (۵,+\infty)$

۱۷. $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید.

آ) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A ارائه کنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B ارائه کنید که B' متناهی باشد.

پ) اگر C مجموعه‌ای نامتناهی باشد، C' متناهی است یا نامتناهی؟

ت) اگر D مجموعه‌ای متناهی باشد، D' متناهی است یا نامتناهی؟

۱۸. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشد به‌طوری‌که $n(U) = ۸۰$ ، $n(A) = ۲۱$ ، $n(B) = ۳۵$ و $n(A \bigcap B) = ۱۲$. مطلوب است:

آ) $n(B')$ ب) $n(A \bigcup B)$ پ) $n(A - B)$ ت) $n(B \bigcap A')$

ث) $n(A' \bigcup B')$ ج) $n(A' \bigcap B')$ چ) $n((A-B) \bigcup (B-A))$

۱۹. اگر $۳n(A)=۲n(B)=۶n(A\cap B)$ باشد، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ ب) $\dfrac{n(A\cup B)-n(A\cap B)}{n(A-B)}$

۲۰. به‌وسیلهٔ نمودار وِن نشان دهید:

آ) اگر $A\subseteq B\subseteq U$، آن‌گاه $B'\subseteq A'\subseteq U$ ب) $A'-B'=B-A$

۲۱. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سریال‌های طنز و ۶۰ نفر به سریال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر به حداقل یکی از این دو نوع سریال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

آ) به هر دو نوع سریال علاقمند باشند.

ب) به سریال‌های طنز علاقمندند ولی به سریال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

پ) نه به سریال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سریال‌های خانوادگی.

۲۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

آ) چند نفر در هر دو رشتهٔ فوتبال و والیبال فعالیت می‌کنند. ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

پ) چند نفر فوتبال بازی می‌کنند ولی والیبال بازی نمی‌کنند. ت) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

قسمت سوم: الگو، دنباله و دنبالهٔ حسابی

۲۳. به تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:


شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳)

اگر a_n تعداد چوب کبریت‌های شکل nاُم باشد، آن‌گاه:

آ) $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ را بنویسید.

ب) تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در مرحلهٔ nاُم را بر حسب n بنویسید.

پ) در شکل سی‌اُم چند چوب کبریت به کار رفته است؟

۲۴. دریک الگوی خطی، جملات پنجم ویازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می باشند.

آ) جملهٔ عمومی الگو را بنویسید. ب) جملهٔ سی‌اُم را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم الگو برابر ۴۱۵ می‌باشد؟

۲۵. پنج دنباله و پنج جملهٔ عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جملهٔ عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

- $t_n=\dfrac{۲+(-۱)^n n^۲}{n^۲+۱}$
- $d_n=۲-n$
- $c_n=n^۲+۲n$
- $b_n=\dfrac{(-۱)^n}{n+۲}$
- $a_n=\dfrac{۴n}{۲n-۱}$

$۴,\dfrac{۸}{۳},\dfrac{۱۲}{۵},\dots$ $۳,۸,۱۵,\dots$ $\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۶}{۵},-\dfrac{۷}{۱۰},\dots$ $-\dfrac{۱}{۳},\dfrac{۱}{۴},-\dfrac{۱}{۵},\dots$ $۱,۰,-۱,\dots$

۲۶. در هر قسمت، سه جملهٔ بعدی دنباله را بنویسید. هم‌چنین در سه قسمت اول، جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

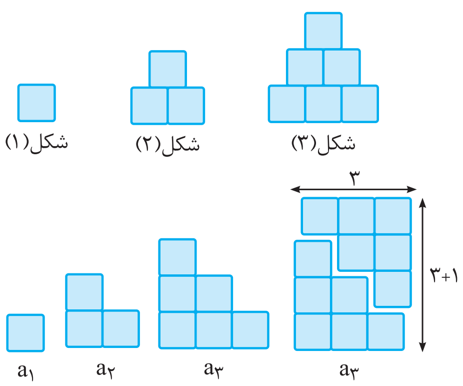
آ) $-۱,۳,۷,\dots$ ب) $۱,-\dfrac{۱}{۴},\dfrac{۱}{۹},\dots$ پ) $۳,۱,\dfrac{۱}{۳},\dots$ ت) $۱,۲,۴,۷,\dots$

۲۷. جملهٔ عمومی‌یک دنباله به صورت $a_n=\dfrac{۳n+۲}{n+۴}$ است.

آ) چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید. ب) چند جملهٔ این دنباله کوچک‌تر از ۲ می‌باشند؟

پ) جملهٔ چندم دنباله، برابر $\dfrac{۵}{۲}$ است؟

۲۸. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:



آ) شکل بعدی را رسم و سپس تعداد مربع‌های هر شکل را به صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل کنید. با توجه به تصویر حاصل، a_n را برحسب n به‌دست آورید.

ت) به کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت $۱+۲+۳+\dots+n$ را به‌دست آورید.