فصل ۲ قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب در هندسه

به طور کلی در این فصل با نسبت و تناسب سروکار داریم. تناسب، تساوی دو کسر مثل $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$ است. ما در هندسه بیشتر با نسبت طول پاره‌خط‌ها و مساحت و این‌جور چیزها روبه‌رو هستیم. به عنوان مثالی از تناسب در هندسه بیایید مساحت یک مثلث را در نظر بگیریم. مثلاً مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۱}{۲}a.h_a$ یا $\frac{۱}{۲}b.h_b$ است، پس $a.h_a=b.h_b$ که نتیجهٔ آن تناسبِ $\frac{a}{h_b}=\frac{b}{h_a}$ است.

تناسب ویژگی‌هایی دارد که خیلی کارراه‌انداز هستند، مثل طرفین وسطین و جابه‌جایی که همهٔ شما با آن‌ها آشنا هستید. اما دو خاصیت هم هست که کم‌تر دیده‌اید و خیلی مفیدند؛ یکی این‌که شما در هر تناسب می‌توانید صورت را کنار مخرج یا مخرج را کنار صورت بنویسید؛ یعنی از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، تناسب‌های $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ و $\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$ به دست می‌آیند. یک خاصیت دیگر هم این است که $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. البته این خاصیت برای بیش از دو کسر هم کاربرد دارد؛ یعنی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ و … .

یک تعریف هم بیاوریم و آن هم میانگین یا واسطهٔ هندسی است. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$، b واسطهٔ هندسی a و c است که به صورت $b^۲=ac$ هم نوشته می‌شود.

مثال **اگر b واسطهٔ هندسی بین a و c باشد، نشان دهید $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$.**

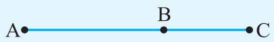
پاسخ b واسطهٔ هندسی a و c است، پس $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ و این یعنی $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a+b}{b+c}$. به همین راحتی!!

مثال **اگر $k=\frac{۳c}{۲d}=\frac{۲a}{b}$، حاصل $\frac{۴a^۲+۱۸c^۲}{b^۲+۸d^۲}$ را بیابید.**

پاسخ از تناسب داده‌شده نتیجه می‌گیریم که $\frac{۴a^۲}{b^۲}=k^۲$ و $\frac{۲\times۹c^۲}{۲\times۴d^۲}=k^۲$. پس به کمک خاصیت تناسب‌ها به این می‌رسیم که:

$$\frac{۴a^۲}{b^۲}=\frac{۱۸c^۲}{۸d^۲}=\frac{۴a^۲+۱۸c^۲}{b^۲+۸d^۲}=k^۲$$

مثال **مطابق شکل، سه نقطهٔ A ، B و C روی یک خط قرار دارند. اگر $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.**



پاسخ کسر $\frac{AB}{BC}$ برابر است با $\frac{AB}{AC-AB}$ که می‌شود $\frac{۲}{۳-۲}$ یعنی ۲.

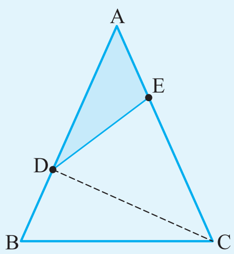
در این فصل در سه قسمت کلی با تناسب کار داریم: ۱- نسبت مساحت‌ها، ۲- تالس، ۳- تشابه

نسبت مساحت‌ها

۱ هر گاه ارتفاع دو مثلث یکسان باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌های متناظر این ارتفاع‌هاست.

۲ هر گاه دو مثلث قاعدهٔ مشترک داشته باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

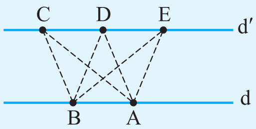
مثال **در مثلث ABC ، نقطهٔ D روی ضلع AB به گونه‌ای قرار دارد که $\frac{AD}{DB}=\frac{۲}{۱}$ و نقطهٔ E روی ضلع AC به گونه‌ای قرار دارد که $\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۲}$. مساحت مثلث ADE چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟**



پاسخ در این سؤال ما دنبال مساحت قسمت رنگی این شکل هستیم. بیایید D را به C وصل کنیم.

حالا دو مثلث ACD و ABC را می‌بینیم که دارای ارتفاع مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}$ برابر است با $\frac{AD}{AB}$ که می‌شود $\frac{۲}{۳}$، چون $\frac{AD}{DB}=\frac{۲}{۱}$ و در نتیجه $\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{DB+AD}=\frac{۲}{۱+۲}$. پس از آن به دو مثلث ADE و ADC نگاه کنید. باز هم ارتفاع مشترک است، بنابراین $\frac{S_{ADE}}{S_{ACD}}$ برابر است با $\frac{AE}{AC}$ و این نسبت هم مساوی $\frac{۱}{۳}$ است، چون $\frac{AE}{AC}=\frac{AE}{AE+EC}=\frac{۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}$. در نهایت ما دنبال $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$ بودیم که می‌شود $\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}$.

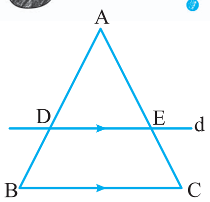
مثال **دو خط d و d' با هم موازی‌اند. نقاط A و B روی خط d و نقاط D، C و E روی خط d' هستند. نسبت مساحت سه مثلث ABC، ABD و ABE را بیابید.**



پاسخ سه مثلث گفته‌شده دارای قاعدهٔ مشترکی هستند، پس باید به دنبال نسبت ارتفاع‌ها بگردیم. اما ارتفاع هر سه مثلث برابر با فاصلهٔ دو خط d و d' است و این یعنی ارتفاع‌ها نیز برابر است. بنابراین مساحت این سه مثلث برابر خواهد بود: $S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ABE}$.

در مورد مساحت، در فصل (۳) بیشتر صحبت می‌کنیم. در واقع در این فصل مساحت برای ما ابزاری است که به کمک آن قضیهٔ تالس را اثبات می‌کنیم، اما در مورد خود مساحت، به طور مفصل در فصل بعدی حرف می‌زنیم و مسئله حل می‌کنیم.

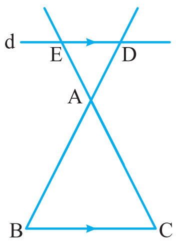
قضیهٔ تالس

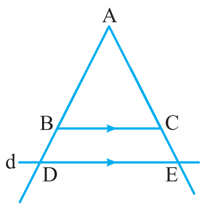


مثل شکل مقابل، در هر مثلثی که بخواهید، اگر خطی بکشید که موازی یکی از اضلاع باشد و دو ضلع دیگر را هم قطع کند، تناسب‌های زیر را داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad , \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad , \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{BC - DE}{BC}$$

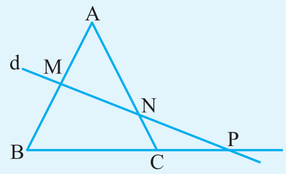
دقت کنید که این خط موازی حتی می‌تواند امتداد دو ضلع را قطع کند و ما باز هم این تناسب‌ها را داریم. یعنی دو شکل مقابل:

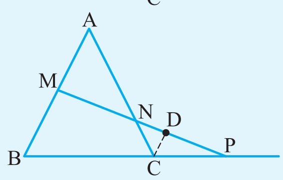




در مسائلِ کمی پیچیده، ما به راحتی نمی‌دانیم که از کدام نسبت استفاده کنیم و در واقع این هنر ماست که بفهمیم کدام تناسب برای ما کاربرد دارد و چه پاره‌خط‌هایی مورد نیاز است. یک چیز دیگر هم که کار را سخت‌تر می‌کند، این است که بعضی وقت‌ها ما را اذیت می‌کنند و آن خط موازی را نمی‌دهند. یعنی این شما هستید که باید خط موازی را پیدا کنید و بکشید.

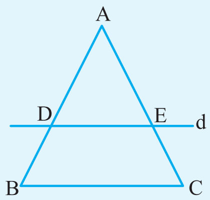
مثال **(قضیهٔ منلائوس) در شکل مقابل خط d، دو ضلع AB و AC و امتداد ضلع BC را به ترتیب در نقاط M، N و P قطع کرده است. نشان دهید: $1 = \frac{AM}{MB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CN}{NA}$.**





پاسخ این سؤال از همان‌هایی است که ما خط موازی را نمی‌بینیم. برای حل مسئله باید از رأس C خطی موازی ضلع AB بکشیم تا پاره‌خط CD دیده شود. حالا آن خط موازی را داریم. برویم سراغ اثبات.

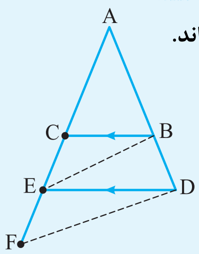
در مثلث MBP طبق قضیهٔ تالس، $\frac{BP}{PC}$ برابر است با $\frac{MB}{DC}$. در مثلث AMN، طبق تالس، $\frac{CN}{NA}$ برابر است با $\frac{DC}{AM}$. پس به جای $\frac{AM}{MB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CN}{NA}$ بیایید قرار بدهیم $\frac{AM}{MB} \times \frac{MB}{DC} \times \frac{DC}{AM}$ که برابر ۱ می‌شود.



عکس قضیهٔ تالس هم درست است. یعنی اگر در شکل زیر هر کدام از تناسب‌های گفته‌شده برقرار باشد، خط d با ضلع BC موازی است.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow d \parallel BC$$

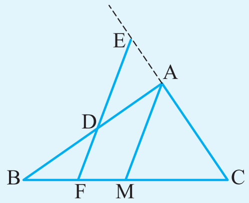
مثال **در شکل مقابل پاره‌خط AE میانگین هندسی دو پاره‌خط AC و AF است. نشان دهید خطوط BE و DF موازی‌اند.**



پاسخ با توجه به فرض $AE^2 = AC.AF$، پس: $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AE}$.

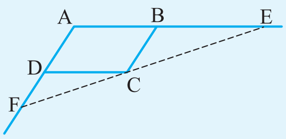
از طرفی طبق تالس $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ و این یعنی $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$. پس طبق عکس قضیهٔ تالس دو خط BE و DF موازی هستند.

مثال در مثلث ABC از نقطهٔ F واقع بر ضلع BC خطی موازی میانهٔ AM رسم می‌کنیم تا خطوط AB و امتداد AC را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند. نشان دهید $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$.



پاسخ شکل مسئله را به صورت روبه‌رو می‌کشیم.
حالا طبق قضیهٔ تالس در مثلث‌های FEC و AMB (دنبال مثلث‌های دیگری هستید؟) به رابطه‌های $\frac{AC}{AE}=\frac{CM}{MF}$ و $\frac{AD}{AB}=\frac{MF}{MB}$ می‌رسیم. حواستان باشد که در نوشتن تالس، پاره‌خط‌هایی را انتخاب کنید که در حکم مسئله دیده می‌شوند. حالا چون $CM=MB$ است، نتیجه می‌گیریم که $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و از آن‌جا $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ می‌شود.

مثال متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس C و در خارج متوازی‌الاضلاع، خطی چنان عبور می‌دهیم که امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=1$.

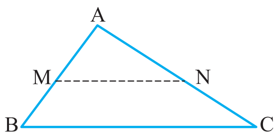


پاسخ بیایید شکل مسئله را رسم کنیم. حالا با توجه به BC و DC، دو جور تالس در مثلث AEF داریم.
یعنی $\frac{FC}{FE}=\frac{AB}{AE}$ و $\frac{CE}{FE}=\frac{AD}{AF}$. بنابراین $\frac{FC+CE}{FE}=\frac{AD}{AF}+\frac{AB}{AE}$ یعنی برابر $\frac{FE}{FE}$ است که می‌شود ۱.

مهم‌ترین کاربردهای قضیهٔ تالس

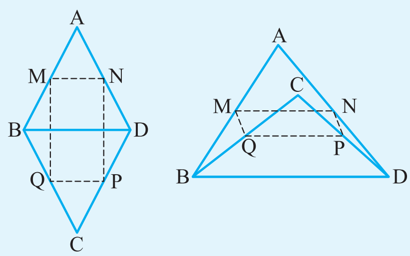
قضیهٔ میان‌خط

نشان دهید که اگر در هر مثلث وسط دو ضلع را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی به دست می‌آید که موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.



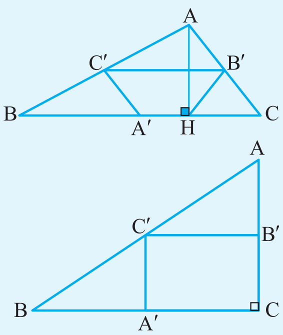
اثبات: فرض کنید در مثلث ABC، وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل کرده‌ایم. پس $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=1$ و در نتیجه به کمک عکس قضیهٔ تالس به موازی‌بودن MN و BC می‌رسیم. حالا به کمک خود قضیهٔ تالس $\frac{MN}{BC}$ برابر $\frac{AM}{AB}$ یا $\frac{AN}{AC}$ است، پس $\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2}$.

مثال مثلث‌های ABD و BCD مفروض‌اند. M، N، P و Q به ترتیب وسط اضلاع AB، AD، CD و BC از این دو مثلث هستند. نشان دهید این چهار نقطه رئوس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.



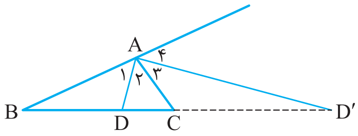
پاسخ دو مثلث گفته‌شده در سؤال در ضلع BD مشترک‌اند. پس شکل مسئله دو حالت دارد.
در هر دو شکل اگر دقت کنیم، طبق قضیهٔ میان‌خط در مثلث‌های ABD و BCD، پاره‌خط‌های MN و PQ موازی و مساوی نصف BD هستند. پس MN و PQ با هم موازی و مساوی‌اند. همهٔ شما خوب می‌دانید که اگر دو ضلع روبه‌روی یک چهارضلعی موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

مثال نشان دهید در هر مثلث اگر وسط‌های سه ضلع و پای یک ارتفاع، چهار رأس یک چهارضلعی باشند، آن چهارضلعی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین یا مستطیل است.



پاسخ در مثلث ABC، نقاط A′، B′ و C′ وسط سه ضلع مثلث هستند و AH ارتفاع مثلث است.
طبق قضیهٔ میان‌خط، B′C′ موازی خط BC یعنی موازی A′H است. پس A′C′B′H ذوزنقه است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، HB′ میانهٔ وارد بر وتر است، پس $HB'=\frac{AC}{2}$ و طبق قضیهٔ میان‌خط $A'C'=\frac{AC}{2}$ و این یعنی ذوزنقهٔ A′B′C′H متساوی‌الساقین است.
حالا اگر مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه باشد، ارتفاع AH بر ضلع AC منطبق شده و ذوزنقهٔ ما تبدیل به مستطیل می‌شود.

قضیهٔ نیمساز داخلی و خارجی



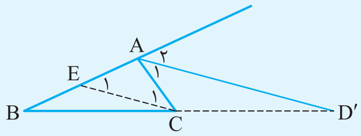
اگر در مثلث ABC، نیمساز زوایای داخلی و خارجی رأس A را بکشیم، روی ضلع BC و امتداد آن پاره‌خط‌هایی درست می‌شود که با دو ضلع AB و AC متناسب‌اند، یعنی:

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\,,\ \hat{A}_3=\hat{A}_4 \Rightarrow \frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$$

بیایید قضیهٔ مربوط به نیمساز خارجی را در مثال زیر اثبات کنیم.

مثال **در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ خارجی رأس A، امتداد ضلع BC را در D' قطع می‌کند. ثابت کنید $\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$.**

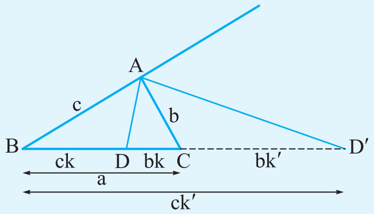
پاسخ بیایید شکل مسئله را بکشیم. یادتان باشد در مسائل مربوط به نیمساز، خطی موازی نیمساز که از یکی از رئوس مثلث عبور کند مفید است! پس این‌جا خط CE را می‌کشیم که موازی AD' است. حالا دقت کنید که $\hat{C}_1=\hat{A}_1$ و $\hat{E}_1=\hat{A}_2$ می‌شود و چون $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ است، به $\hat{C}_1=\hat{E}_1$ می‌رسیم که نتیجهٔ آن می‌شود $AE=AC$. اگر در مثلث خطی موازی ضلع سوم ببینیم،



نامردی است که یاد تالس نیفتیم! پس در مثلث ABD' تالس را می‌نویسیم؛ یعنی $\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AE}$ و چون $AE=AC$ است، به حکم مسئله می‌رسیم. یعنی $\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$.

مثال **اگر در مثلث ABC، AD و AD' به ترتیب نیمساز زوایای داخلی و خارجی A باشند، طول پاره‌خط‌های BD، CD، CD' و DD' را برحسب اضلاع مثلث بیابید.**

پاسخ با توجه به خاصیت نیمسازهای داخلی و خارجی گفته‌شده، نام‌گذاری‌های زیر را در شکل انجام می‌دهیم:

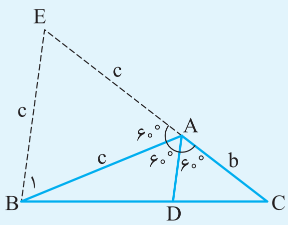


پس $k(b+c)=a$ و $k'(c-b)=a$، در نتیجه $k=\frac{a}{b+c}$ و $k'=\frac{a}{c-b}$. با به دست آمدن k و k' همهٔ قطعاتی که خواسته شده به دست می‌آیند:

$$BD=ck=\frac{ac}{b+c}\,,\ CD=bk=\frac{ab}{b+c}$$

$$CD'=\frac{ab}{c-b}\,,\ DD'=CD+CD'=\frac{ab}{c+b}+\frac{ab}{c-b}=\frac{2abc}{c^2-b^2}$$

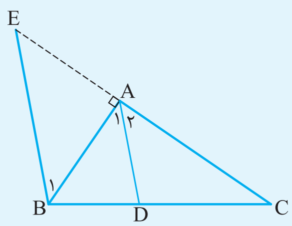
مثال **در مثلث ABC، $\hat{A}=120°$، ثابت کنید $\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (d_a نیمساز رأس A است).**



پاسخ از رأس B خطی موازی نیمساز AD می‌کشیم تا امتداد ضلع AC را در E قطع کند. بنابراین $\hat{B}_1=60°$. از طرفی $B\hat{A}E=60°$، پس مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است و این یعنی $BE=AE=c$. حالا در مثلث BCE، تالس به ما می‌گوید $\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{EC}$ و در نتیجه $\frac{d_a}{c}=\frac{b}{b+c}$. بنابراین $\frac{1}{d_a}=\frac{b+c}{bc}$ یا $\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

باز هم می‌گویم یادتان باشد که همیشه در مسائل مربوط به نیمساز، خطی که از یک رأس موازی نیمساز رسم می‌شود مشکل‌گشاست.

مثال **در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=90°)$ نیمساز AD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{AD}$.**

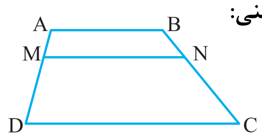


پاسخ اگر شکل سؤال را رسم کنید و از رأس B خط BE را موازی نیمساز AD نکشید، ناراحت می‌شوم. گفتم در مسئله‌های نیمساز، خطی موازی نیمساز از رأس دیگر بکشید. حالا زوایای $\hat{A}_1$، $\hat{A}_2$، $\hat{B}_1$ و $\hat{E}$ همگی $45°$اند. (چرا؟) پس $BE=\sqrt{2}AB$ و $AE=AB$. در مثلث BCE تالس می‌نویسیم که می‌شود $\frac{AC}{CE}=\frac{AD}{BE}$ و با جای‌گذاری‌های $BE=\sqrt{2}AB$ و $CE=AC+AE=AC+AB$ به رابطهٔ $\frac{AC}{AC+AB}=\frac{AD}{\sqrt{2}AB}$ می‌رسیم.

حالا دو تا کسر را معکوس کنید و سپس رابطه را بر AB تقسیم نمایید تا حکم به دست آید.

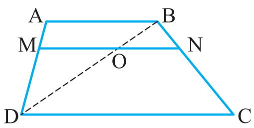
قضیهٔ تالس در ذوزنقه

اگر در یک ذوزنقه خطی موازی قاعده‌ها، ساق‌ها را قطع کند، روی ساق‌ها پاره‌خط‌های متناسب به وجود می‌آورد. یعنی:



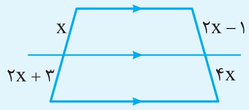
$$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

اثبات: در مسئله‌های مربوط به ذوزنقه، رسم یک قطر بسیار مفید است. بیایید قطر BD را بکشیم و نقطهٔ برخورد آن با MN را O بنامیم.



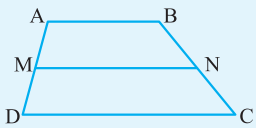
حالا در مثلث‌های ABD و BCD، $MO \parallel AB$ و $ON \parallel DC$ است. پس می‌توانیم در این مثلث‌ها از تالس استفاده کنیم؛ یعنی $\frac{BO}{OD} = \frac{AM}{MD}$ و $\frac{BO}{OD} = \frac{BN}{NC}$. با کنار هم گذاشتن دو رابطهٔ آخر به $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD}$ می‌رسیم.

مثال در شکل مقابل x را بیابید.

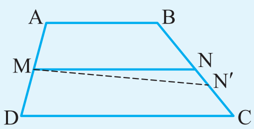


پاسخ خب به راحتی تالس در ذوزنقه را می‌نویسیم و به این می‌رسیم که $\frac{۲x-۱}{۴x} = \frac{x}{۲x+۳}$ و از آن‌جا x می‌شود $\frac{۳}{۴}$.

مثال **نشان دهید عکس قضیهٔ تالس هم در ذوزنقه برقرار است. یعنی اگر خطی ساق‌های ذوزنقه را قطع کند و روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، با قاعده‌ها موازی است.**



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow MN \parallel AB\,,\,CD$$



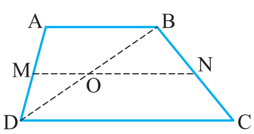
پاسخ اگر MN موازی قاعده‌ها نباشد، خطی مثل MN' را رسم می‌کنیم که موازی قاعده‌ها باشد. حالا طبق تالس در ذوزنقه رابطهٔ $\frac{BN'}{N'C} = \frac{AM}{MD}$ را داریم. از طرفی $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD}$ و این یعنی $\frac{BN}{NC} = \frac{BN'}{N'C}$. پس N و N' بر هم منطبق‌اند یا MN' همان MN است در نتیجه MN موازی قاعده‌هاست.

مثل مثلث، در ذوزنقه هم قضیهٔ میان‌خط داریم. در مثال زیر این قضیه را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه

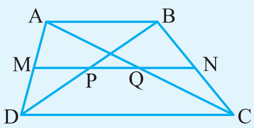
اگر وسط دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی به دست می‌آید که با قاعده‌ها موازی است و طول آن برابر میانگین طول دو قاعده است.

اثبات: فرض کنید در ذوزنقهٔ ABCD، M و N وسط دو ساقِ AD و BC باشند. پس $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = ۱$. حالا طبق عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه نتیجه می‌گیریم که MN موازی قاعده‌هاست. قطر BD را می‌کشیم تا نقطهٔ O به دست آید. حالا در دو مثلث ABD و BCD از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم، چرا که $MO \parallel AB$ و $ON \parallel CD$. بنابراین $\frac{۱}{۲} = \frac{MD}{AD} = \frac{MO}{AB}$ و $\frac{۱}{۲} = \frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$ و در نتیجه $MO = \frac{۱}{۲}AB$ و $ON = \frac{۱}{۲}CD$، پس $MN = MO + ON = \frac{۱}{۲}(AB + CD)$.

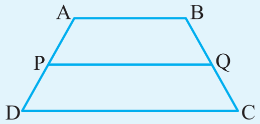


مثال **ثابت کنید دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازهٔ آن مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو قاعده است.**

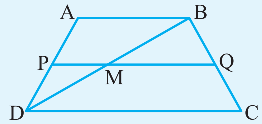
پاسخ اگر M وسط ساق AD از ذوزنقهٔ ABCD باشد و MN موازی قاعده‌ها رسم شود، طبق تالس نتیجه می‌گیریم که P وسط قطر BD، Q وسط قطر AC و N وسط ساق BC است. حالا بیایید در مثلث‌های ABD و ABC قضیهٔ میان‌خط را بنویسیم، پس MP و QN نصف AB اند. در مثلث BCD هم به $PN = \frac{DC}{۲}$ می‌رسیم، پس $PQ = PN - QN$ و این یعنی $PQ = \frac{DC - AB}{۲}$. نتایجی که در این مسئله به دست آمد مهم است: $PQ = \frac{DC - AB}{۲}$ و $MP = QN = \frac{AB}{۲}$



مثال **در ذوزنقهٔ شکل روبه‌رو، پاره‌خط PQ موازی قاعده‌هاست. اگر $\frac{AP}{PD}=\frac{m}{n}$، نشان دهید $PQ=\frac{n.AB+m.CD}{m+n}$.**



پاسخ قطر BD را بکشیم، نقطهٔ M نمایان می‌شود. حالا در دو مثلث دیده‌شده از تالس کمک می‌گیریم.

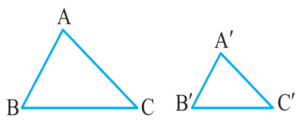


پس $\frac{n}{m+n}=\frac{PD}{AD}=\frac{PM}{AB}$ و $\frac{m}{m+n}=\frac{BQ}{BC}=\frac{MQ}{DC}$. بنابراین PQ برابر است با $PM+MQ$ که می‌شود $\frac{n.AB+m.CD}{m+n}$.

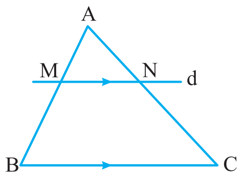
تشابه مثلث‌ها

شما خیلی خوب معنای تشابه مثلث‌ها را می‌دانید. دو مثلث متشابه دارای سه زاویهٔ دوبه‌دو برابر و اضلاعِ متناسب هستند.

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' , \hat{B}=\hat{B}' , \hat{C}=\hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



قضیهٔ اساسی تشابه به ما می‌گوید که اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلث به وجود آمده با مثلث اصلی متشابه است. $\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$



ما سه حالت داریم که در آن‌ها دو مثلث متشابه‌اند. یعنی هر کدام از سه حالت تشابه که اتفاق بیفتد ما می‌توانیم دو مثلث را در شرایط قضیهٔ اساسی تشابه قرار دهیم. این سه حالت به صورت زیر هستند:

۱. حالت دو زاویهٔ برابر
۲. حالت سه ضلع متناسب
۳. حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر

وقتی دو مثلث متشابه می‌شوند، بین آن‌ها می‌توانیم یک تناسب بنویسیم که مقدار تناسب همان نسبت تشابه است. مثلاً اگر $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$ باشد، تناسب $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=k$ را داریم که عدد k و طبیعتاً $\frac{1}{k}$ نسبت تشابه دو مثلث است.

چند نکته

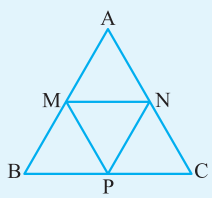
۱. اضلاع یک کسر در نسبت تشابه باید روبه‌روی زاویه‌های برابر باشند.
۲. در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو جزء فرعی برابر k است. فقط باید دقت کنید که دو جزء فرعی باید متناظر هم باشند. مثلاً ارتفاع‌های AH و $A'H'$، نیمسازهای AD و $A'D'$، میانه‌های AM و $A'M'$ که معنایش تناسب $k=\cdots=\frac{AM}{A'M'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AH}{A'H'}$ است.
۳. نسبت محیط دو مثلث متشابه k و نسبت مساحت آن‌ها برابر k^2 است.

مثال **در مثلث ABC، نقاط M، N و P نقاط وسط سه ضلع مثلث هستند:**

الف) نشان دهید $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{MNP}$.

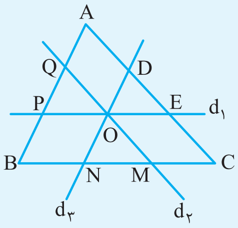
ب) نشان دهید محیط مثلث MNP، نصف محیط مثلث ABC و مساحت مثلث MNP، یک چهارم مساحت مثلث ABC است.

پاسخ الف) طبق قضیهٔ میان‌خط، پاره‌خط‌های MN، NP و MP نصف اضلاع BC، AB و AC هستند، پس $\frac{1}{2}=\frac{MN}{BC}=\frac{NP}{AB}=\frac{MP}{AC}$ و این یعنی دو مثلث MNP و ABC طبق حالت سه ضلع متشابه‌اند.



ب) نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{2}$ است، پس نسبت محیط‌ها $\frac{1}{2}$ و نسبت مساحت‌ها $\frac{1}{4}$ می‌شود.

مثال **یک نقطهٔ دلخواه داخل مثلثی با مساحت S در نظر بگیرید. از این نقطه خطوطی موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم تا مثلث به شش ناحیه تقسیم شود. مساحت سه مثلث ایجادشده را S_1، S_2 و S_3 می‌نامیم. نشان دهید: $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.**



پاسخ بیایید شکل این سؤال را بکشیم که این‌جوری می‌شود:

فقط حواستان باشد که $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S$، $S_{\overset{\Delta}{ODE}}=S_1$، $S_{\overset{\Delta}{OMN}}=S_2$ و $S_{\overset{\Delta}{OPQ}}=S_3$.

حالا اگر به موازی‌بودنِ خطوط d_1، d_2 و d_3 با اضلاع مثلث دقت کنید، متوجه می‌شوید که مثلث‌های ODE، OMN و OPQ با مثلث ABC متشابه هستند (چرا؟) پس بیایید نسبت تشابه‌ها را بنویسیم و رابطهٔ بین مساحت‌ها را پیدا کنیم:

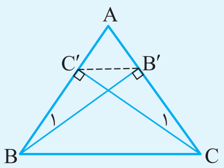
$$\frac{S_1}{S}=(\frac{OD}{AB})^2,\ \frac{S_2}{S}=(\frac{ON}{AB})^2,\ \frac{S_3}{S}=(\frac{PQ}{AB})^2$$

چهارضلعی‌های ADOQ و PONB متوازی‌الاضلاع‌اند، پس $OD=AQ$ و $ON=BP$. حالا با جای‌گذاری در رابطهٔ بین مساحت‌ها می‌رسیم به رابطهٔ مقابل:

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{AQ}{AB}+\frac{BP}{AB}+\frac{PQ}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{AQ+BP+PQ}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

از رابطهٔ آخر به تساویِ $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$ می‌رسیم که همان حکم مسئله است.

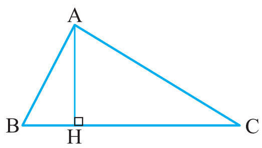
مثال **در مثلث ABC، ارتفاع‌های AA'، BB' و CC' را کشیده‌ایم. نشان دهید مثلث‌های $AB'C'$ و $A'BC'$ و $A'B'C$ با مثلث ABC متشابه‌اند. (همهٔ زاویه‌های مثلث ABC حاده‌اند.)**



پاسخ در مثلث ABC، ارتفاع‌های BB' و CC' را کشیده‌ایم. دو مثلث ACC' و ABB' متشابه‌اند، چون $\hat{B}_1+\hat{A}=\hat{A}+\hat{C}_1=90^\circ$ در نتیجه $\hat{B}_1=\hat{C}_1$. از طرفی دو زاویهٔ 90° هم که دارند و این یعنی طبق حالت دو زاویه متشابه‌اند. حالا نسبت تشابه را برایشان می‌نویسیم که می‌شود $\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}$. از این نسبت تشابه، تناسب $\frac{AC'}{AC}=\frac{AB'}{AB}$ را بیرون می‌کشیم که نتیجه‌اش تشابه دو مثلث $AB'C'$ و ABC طبق حالت (ض‌زض) است. بقیهٔ تشابه‌ها هم مثل همین راه اثبات می‌شوند.

یک نتیجهٔ مهم از تشابه برای مثلث‌های قائم‌الزاویه

اگر ارتفاع AH را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ بکشیم، دو مثلث به وجود می‌آید که با مثلث ABC متشابه‌اند (چرا؟) و از نوشتن نسبت تشابه‌ها نتایج زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{matrix}\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\\ \overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}AH^2=BH.HC\\ AB^2=BH.BC\\ AC^2=HC.BC\end{cases}$$

جالب است که با جمع‌کردن رابطهٔ دوم و سوم به رابطهٔ فیثاغورس می‌رسیم.

مثال **در مثلث ABC، $AB=3$، $AC=4$ و $BC=5$، اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، طول پاره‌خط‌های BH و HC را پیدا کنید.**

پاسخ از اضلاع مثلث ABC، معلوم می‌شود که قائم‌الزاویه است و $\hat{A}=90^\circ$، چون اضلاع آن فیثاغورسی‌اند! $(3^2+4^2=5^2)$، پس ارتفاع AH وارد بر وتر است و در نتیجه روابط $AB^2=BH.BC$ و $AC^2=CH.BC$ را برای این مثلث داریم. با محاسبات ساده مقدار BH و HC به ترتیب $\frac{9}{5}$ و $\frac{16}{5}$ به دست می‌آیند.

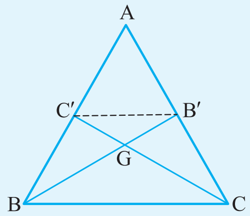
مثال **حکم کلی زیر را در صورت درستی اثبات کنید و اگر نادرست است برای آن مثال نقض بیاورید:**

«اگر سه زاویه و دو ضلع از مثلثی با سه زاویه و دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشد، این دو مثلث همنهشت‌اند.»

پاسخ این حکم نادرست است. دو مثلث با اضلاع (۸، ۱۲ و ۱۸) و (۱۲، ۱۸ و ۲۷) را در نظر بگیرید. این دو مثلث متشابه‌اند (چرا؟) پس هر سه زاویه در دو مثلث برابرند. دو ضلع ۱۲ و ۱۸ هم در این دو مثلث یکسان هستند، اما مشخص است که همنهشت نیستند.

مثال **الف) نشان دهید در هر مثلث، هر دو میانه از مثلث، همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.**

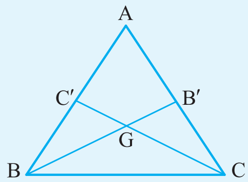
ب) نشان دهید میانه‌های هر مثلث همرس‌اند.



پاسخ الف) فرض کنیم در مثلث ABC، میانه‌های BB' و CC' را کشیده‌ایم. طبق قضیهٔ میان‌خط $B'C'$ موازی BC و مساوی نصف آن است. پس مثلث‌های BGC و $B'GC'$ متشابه‌اند (چرا؟)، حالا اگر نسبت تشابه را بنویسیم به $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CG}{C'G}=\frac{BG}{B'G}$ می‌رسیم که $BC=2B'C'$ و این یعنی $CG=2C'G$ و $BG=2B'G$، پس میانه‌های BB' و CC' همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع کرده‌اند.

ب) در قسمت الف دیدیم که هر دو میانه همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. پس اگر در مثلث ABC، به جای میانهٔ CC'، میانهٔ AA' را هم بکشیم، باید AA' در نقطهٔ G، BB' را قطع کند تا داشته باشیم $BG=2B'G$. این یعنی هر سه میانه از نقطهٔ G عبور کرده و همرس‌اند. به نقطه‌ی G، مرکز ثقل مثلث گفته می‌شود.

مثال **از مثلث ABC، طول ضلع BC و میانه‌های BB' و CC' داده شده است. توضیح دهید که چگونه می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم.**

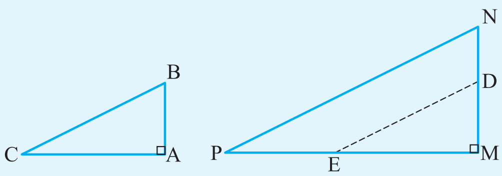


پاسخ فرض کنیم این مثلث را کشیده‌ایم. به شکل روبه‌رو نگاه کنید:

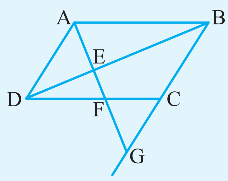
مثلث BGC را با داشتن سه ضلع می‌توانیم رسم کنیم. دقت کنید که $BG=\frac{2}{3}BB'$ و $CG=\frac{2}{3}CC'$. پس از رسم مثلث BGC، اضلاع BG و CG را به اندازهٔ $\frac{1}{3}BB'$ و $\frac{1}{3}CC'$ ادامه می‌دهیم تا به B' و C' برسیم. حالا CB' و BC' را رسم کرده و ادامه می‌دهیم تا همدیگر را در A قطع کنند.

مثال **ثابت کنید اگر وتر و یک ضلع دیگر از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.**

پاسخ فرض کنیم برای دو مثلث ABC و MNP داشته باشیم $\hat{M}=\hat{A}=90^\circ$ و $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}$، روی ضلع MN، نقطهٔ D را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $MD=AB$. همچنین روی ضلع MP نقطهٔ E را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $ME=AC$. پس مثلث MDE با مثلث ABC همنهشت است. حالا با توجه به فرض، رابطهٔ $\frac{MD}{MN}=\frac{DE}{NP}$ را داریم که طبق عکس قضیهٔ تالس، DE با NP موازی می‌شود. پس مثلث‌های MDE و MNP متشابه‌اند که نتیجهٔ آن تشابه MNP و ABC است.



مثال **متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر بگیرید. از A خطی رسم می‌کنیم تا قطر BD، ضلع CD و امتداد ضلع BC را به ترتیب در E، F و G قطع کند. نشان دهید $AE^2=EF.EG$.**

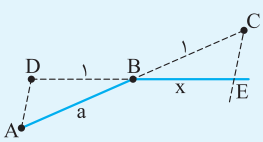


پاسخ بیایید قبل از هر چیز شکل درست مسئله را رسم کنیم:

حالا از تشابه مثلث‌های ABE و DEF به $\frac{BE}{ED}=\frac{AE}{EF}$ و از تشابه مثلث‌های ADE و BEG به $\frac{BE}{ED}=\frac{EG}{AE}$ می‌رسیم. پس $\frac{EG}{AE}=\frac{AE}{EF}$ و این یعنی $AE^2=EF.EG$.

مثال **توضیح دهید چگونه می‌توانیم با داشتن پاره‌خطی به طول a، پاره‌خطی به طول $\frac{1}{a}$ رسم کنیم.**

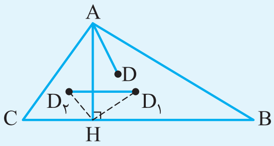
پاسخ فرض کنید پاره‌خط AB را به طول a داریم و می‌خواهیم پاره‌خطی به طول $\frac{1}{a}$ بکشیم. AB را تا نقطهٔ C ادامه می‌دهیم که $BC=1$ باشد. پاره‌خط دلخواه BD را به طول ۱ رسم می‌کنیم. حالا BD را از طرف B امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ C خطی موازی AD می‌کشیم تا خط DB را در E قطع کند. طول BE برابر $\frac{1}{a}$ است، چون دو مثلث ABD و BCE متشابه‌اند و با توجه به نسبت تشابه، رابطهٔ $\frac{DB}{BE}=\frac{AB}{BC}$ را داریم. پس $\frac{1}{x}=\frac{a}{1}$ و در نتیجه $x=\frac{1}{a}$.



مثال **در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر D ، D_1 و D_2 به ترتیب محل همرسی نیمسازهای داخلی مثلث‌های ABC ، ABH و ACH باشند، نشان دهید $AD=D_1D_2$.**

پاسخ دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند، پس نسبت تمام قطعات فرعی متناظرشان برابر نسبت تشابه است.

در نتیجه $\frac{AB}{BC}=\frac{HD_1}{AD}$. دقیقاً به همین شکل برای دو مثلث ACH و ABC می‌توانیم بگوییم $\frac{AC}{BC}=\frac{HD_2}{AD}$.



به دو نکته دقت کنید:

۱ مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس $BC^2=AB^2+AC^2$.

۲ $D_1\hat{H}D_2=90^\circ$ (چرا؟)، پس $D_1D_2^2=HD_1^2+HD_2^2$.

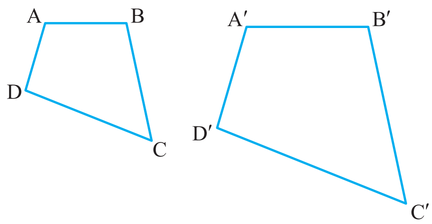
با توجه به این نکته‌ها می‌توانیم رابطهٔ زیر را بنویسیم:

$$(\frac{HD_1}{AD})^2+(\frac{HD_2}{AD})^2=(\frac{AB}{BC})^2+(\frac{AC}{BC})^2 \Rightarrow \frac{HD_1^2+HD_2^2}{AD^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1 \Rightarrow \underbrace{HD_1^2+HD_2^2}_{D_1D_2^2}=AD^2 \Rightarrow D_1D_2^2=AD^2$$

چندضلعی‌های متشابه

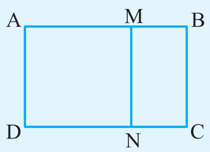
اگر دو چندضلعی متشابه باشند، همهٔ زاویه‌های آن‌ها دو به دو با هم برابرند و اضلاع متناسب هستند. مثلاً اگر چهارضلعی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ متشابه باشند، $\hat{A}=\hat{A}'$ ، $\hat{B}=\hat{B}'$ ، $\hat{C}=\hat{C}'$ و $\hat{D}=\hat{D}'$ است و می‌توانیم بنویسیم $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$.

نسبت محیط‌ها مثل مثلث‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.



مثال **در مستطیل $ABCD$ ، نقاط M و N را روی اضلاع AB و DC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $BMNC$ مستطیل و با مستطیل $ABCD$ متشابه باشد. اگر $\frac{AB}{AD}=k$ باشد، حاصل $\frac{AM}{MB}$ را بیابید.**

پاسخ وقتی دو مستطیل $ABCD$ و $BMNC$ متشابه‌اند، پس $\frac{AD}{MB}=\frac{AB}{MN}$.



از آن‌جایی که $AD=MN$ است، به این می‌رسیم که $\frac{AD}{MB}=k$ ، پس $\frac{AB}{MB}$ برابر است با k^2 ، چون AB ، k برابر AD و AD ، k برابرِ MB است. بنابراین $\frac{AM}{MB}=\frac{AB-MB}{MB}=\frac{k^2-1}{k^2}$. حواستان باشد که گفتیم $\frac{AB}{MB}=\frac{k^2}{1}$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=\cdots=\frac{a_n}{n}$، آن‌گاه حاصل $a_1+a_2+\cdots+a_n$ چند برابر a_1 است؟

۱) n ۲) $n(n+1)$ ۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ ۴) $2n$

۲- اگر b واسطهٔ هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$ ۳) $\frac{b-c}{a-b}=\frac{b}{c}$ ۴) $\frac{b+c}{a+b}=\frac{c}{b}$

۳- اگر $\frac{2c}{3d}=\frac{a}{b}=k$، آن‌گاه حاصل $\frac{\sqrt{a^4+8a^2c^2+16c^2}}{b^2+9d^2}$ کدام است؟

۱) k ۲) $2k$ ۳) k^2 ۴) $4k^2$

۴- اگر $\frac{a}{2b}=\frac{3c}{d}=\frac{3e}{2f}=k>0$، حاصل $\frac{\sqrt{a^2+9c^2+9e^2}}{\sqrt{4b^2+d^2+4f^2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{k}$ ۲) k ۳) $2\sqrt{k}$ ۴) $4k$

۵- اگر $AB=a$ و $\frac{MA}{MB}=k$ $(k>1)$، طول پاره‌خط MB کدام است؟ (M بین A و B)

۱) $\frac{ka}{k+1}$ ۲) $\frac{a}{k+1}$ ۳) $\frac{a}{k-1}$ ۴) $\frac{ka}{k-1}$

۶- اگر $AB=a$ و $\frac{NA}{NB}=k$ $(k>1)$، طول NA کدام است؟ (N روی امتداد AB)

۱) $\frac{ka}{k+1}$ ۲) $\frac{a}{k+1}$ ۳) $\frac{a}{k-1}$ ۴) $\frac{ka}{k-1}$

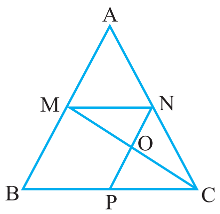
۷- اگر $AB=a$ و N نقطه‌ای روی امتداد AB باشد به گونه‌ای که $\frac{NA}{NB}=k$ $(k<1)$، طول NB کدام است؟

۱) $\frac{ka}{1+k}$ ۲) $\frac{a}{1+k}$ ۳) $\frac{a}{1-k}$ ۴) $\frac{ka}{1-k}$

۸- اگر MN و AB دو پاره‌خط باشند که روی یک خط قرار دارند، $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=k$ و طول پاره‌خط $AB=a$، آن‌گاه طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) $\frac{ak}{k^2-1}$ ۲) $\frac{2ak}{k^2-1}$ ۳) $\frac{ak}{1-k^2}$ ۴) $\frac{2ak}{|1-k^2|}$

۹- در شکل مقابل، MNPB متوازی‌الاضلاع است. اگر مساحت مثلث OMN، ۶۰ درصد مساحت مثلث AMN باشد، نسبت PC به MN کدام است؟

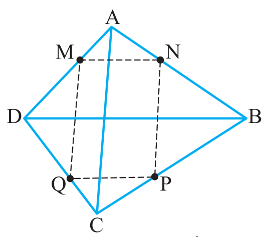


۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۰- وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی الزاماً رئوس کدام چهارضلعی هستند؟

۱) لوزی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) مستطیل ۴) مربع

۱۱- در شکل مقابل، MNPQ یک لوزی است که اضلاع آن موازی قطرهای ABCD است. اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{3}{5}$، نسبت قطرِ AC به BD کدام است؟



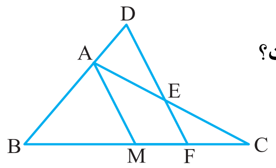
۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، مربعی چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و یک رأس آن روی رأس A قرار دارد. اگر ضلع مربع x باشد، آن گاه حاصل $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $2x$ ۴) $\frac{2}{x}$

۱۳- در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط ضلع BC، خطی به موازات نیمساز داخلی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. اگر $AC=9$ و $BE=8$، طول CF کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

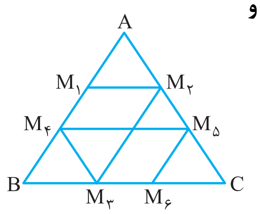


۱۴- در شکل مقابل، AM میانهٔ مثلث ABC است. اگر $AM \parallel DF$، $\frac{AD}{AE}=\frac{2}{3}$ و $AB=9$، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

۱۵- در مثلث ABC، نقطهٔ M را روی AB به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MB}=k$. از M خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند و از N موازی AB رسم می‌کنیم تا BC را در P قطع کند، از P نیز موازی AC رسم می‌کنیم تا نقطهٔ Q روی AB به دست آید. نسبت $\frac{AM}{BQ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{k+1}{k-1}$ ۳) $\frac{k-1}{k+1}$ ۴) $\frac{1}{k+1}$



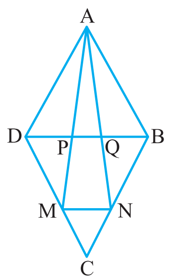
۱۶- در شکل مقابل، پاره‌خط‌های M_1M_2 و M_4M_5 با ضلع BC، پاره‌خط‌های M_2M_3 و M_5M_6 با ضلع AB و پاره‌خط M_3M_4 با ضلع AC موازی هستند. اگر $AC=5$ و $M_3M_4=2$، فاصلهٔ M_6 از M_1 کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

۱۷- در مثلث ABC، نقطه‌ای مانند D_1 را بر ضلع BC انتخاب می‌کنیم و از آن خطی موازی ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D_2 قطع کند. از D_2 خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D_3 قطع کند و این عمل را تکرار می‌کنیم. پس از چند مرحله به نقطهٔ D_1 برمی‌گردیم؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) حداکثر ۶ ۴) ممکن است به D_1 نرسیم.

۱۸- در لوزی شکل مقابل، $MN \parallel BD$ است. اگر $\frac{PQ}{BD}=x$ باشد، $\frac{CM}{MD}$ کدام است؟



۱) $\frac{1-x}{x}$
۲) $\frac{1-x}{2x}$
۳) $\frac{x}{1-x}$
۴) $\frac{2x}{1-x}$

۱۹- در مثلث ABC، D نقطهٔ وسط ضلع AB و E نقطه‌ای روی BC است به طوری که $BE=2EC$. اگر $A\hat{D}C=B\hat{A}E$، آن‌گاه زاویهٔ BAC کدام است؟

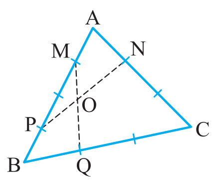
۱) 60° ۲) 75° ۳) 90° ۴) 120° (المپیاد ۸۰)

۲۰- در مثلث ABC، M وسط ضلع AB است. ضلع BC را به اندازهٔ خودش از طرف C امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ N به دست آید. پاره‌خط MN ضلع AC را در E قطع می‌کند. AE چند برابر CE است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۱- بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت ۱ محاط شود، چه مساحتی دارد؟ (المپیاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$



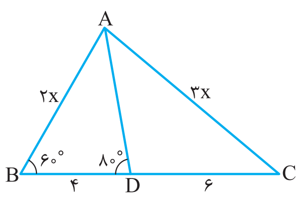
۲۲- در شکل مقابل، اضلاع AC و BC به سه قسمت مساوی و ضلع AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. نسبت مساحت چهارضلعی $AMON$ به $BPOQ$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۱ ۴) به نوع مثلث وابسته است.

۲۳- در مثلثی به اضلاع a، b و c که $c>b>a$، طول قطعهٔ کوچک‌تری که نیمساز زاویهٔ متناظر به بزرگ‌ترین ضلع روی آن ایجاد می‌کند کدام است؟

۱) $\frac{ab}{a+c}$ ۲) $\frac{ac}{a+b}$ ۳) $\frac{bc}{a+b}$ ۴) $\frac{ab}{b+c}$

۲۴- در شکل مقابل، اندازهٔ AD کدام است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

۲۵- در مثلث به اضلاع $a > b > c$، طول قطعه‌ای که نیمساز کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی روی امتداد ضلع روبه‌روی آن به وجود می‌آورد، کدام است؟

۱) $\frac{ac}{b-c}$ ۲) $\frac{bc}{a-b}$ ۳) $\frac{ab}{a-c}$ ۴) $\frac{ac}{a-b}$

۲۶- در مثلث ABC، میانهٔ AM و نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMD را رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کنند. اگر $AM = ۴$ و $BC = ۶$، حاصل $\frac{DE}{BC}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۲۷- در مثلث ABC، I محل برخورد نیمسازهاست. اگر $AI = \frac{۲}{۳}d_a$ باشد، محیط مثلث برحسب ضلع a کدام است؟ (d_a نیمساز مربوط به رأس A است.)

۱) $۲/۵a$ ۲) $۳a$ ۳) $۳/۵a$ ۴) $۴a$

۲۸- در یک مثلث قائم‌الزاویه، نیمساز وارد بر وتر روی آن قطعاتی به اندازهٔ a و b به وجود می‌آورد. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{(a+b)^۲}{۲(a^۲+b^۲)}$ ۲) $\frac{(a+b)^۲ab}{۲(a^۲+b^۲)}$ ۳) $\frac{(a+b)ab}{a^۲+b^۲}$ ۴) $\frac{(a+b)ab}{۲(a^۲+b^۲)}$

۲۹- در مثلث ABC داریم $AB > AC$. پای نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی A را به ترتیب D و D' می‌نامیم. مقدار $\frac{DD'}{BD} - \frac{DD'}{CD}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{AB}{AC}$ ۴) $\frac{AC}{AB}$

۳۰- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۲\hat{B}$. کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟

۱) $a^۲ = bc$ ۲) $b^۲ = ac$ ۳) $a^۲ - b^۲ = bc$ ۴) $a^۲ - c^۲ = bc$

۳۱- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۹۰^\circ$، $c = ۳$ و $b = ۴$ است. ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازهٔ DH کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

۳۲- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$. اگر $AC = ۶$ و $AB = ۳$، طول نیمساز AD کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

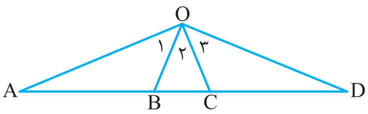
۳۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، اگر اضلاع قائم ۳ و ۶ باشند، طول نیمساز AD کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۴- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۲\hat{C}$ و $BC = ۲ + AB$ و $AC = ۵$. محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

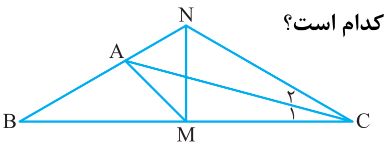
۳۵- در شکل مقابل، $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \hat{O}_۳ = ۴۵^\circ$ و $OA = OD$. اگر $AB = ۴$، BC کدام است؟



۱) ۱ ۲) $۲(\sqrt{۲}-۱)$

۳) ۲ ۴) $۴(\sqrt{۲}-۱)$

۳۶- در شکل مقابل، $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = ۱۵^\circ$ و $\hat{B} = ۳۰^\circ$. اگر AM میانهٔ مثلث ABC باشد، اندازهٔ زاویهٔ AMB کدام است؟



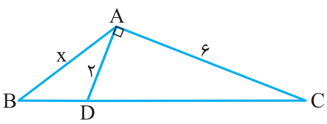
۱) ۳۰° ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

۳۷- در مثلث ABC، به اضلاع $AB = ۵$، $AC = ۱۲$ و $BC = ۱۳$، نقطهٔ M را روی ضلع AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که از رأس A و ضلع BC به یک فاصله باشد. مساحت مثلث AMB چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۵}{۲۶}$ ۴) $\frac{۱۰}{۲۶}$

۳۸- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۱۳۵^\circ$ و $AC = ۶$ و $AB < AC$. اگر طول AD برابر ۲ باشد، طول ضلع AB کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۳

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۳۹- در مثلث ABC، $AB = ۴$، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ است. اگر AD نیمساز داخلی زاویهٔ A باشد، اندازهٔ AD کدام است؟

۱) $۲/۲$ ۲) $۲/۴$ ۳) $۲/۶$ ۴) $۲/۸$

۴۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نیمساز زاویهٔ C مثلث را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ *(المپیاد ۸۳)*

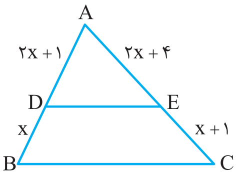
سؤالات تشریحی

۱- a، b، c، d، e و f اعدادی حقیقی‌اند، به طوری که $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. هم‌چنین p، q و r اعداد حقیقی‌اند که هم‌زمان صفر نیستند و n عدد طبیعی است. نشان دهید $\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}=(\frac{a}{b})^n$.

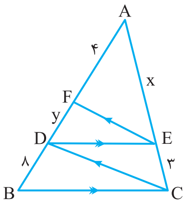
۲- نشان دهید بر هر پاره‌خط AB و بر امتداد آن دو نقطهٔ منحصر به فرد M و N وجود دارند به طوری که $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=k$ (k عددی مثبت و مخالف ۱)

۳- اگر $AB=a$ و $\frac{NA}{NB}=\frac{MA}{MB}=k$، طول پاره‌خط‌های MA، MB، NA، NB و MN و نسبت‌های $\frac{MA}{NA}$ و $\frac{MB}{NB}$ را برحسب a و k محاسبه کنید.

۴- در شکل مقابل، پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. مقدار x را بیابید.



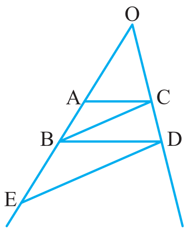
۵- در شکل مقابل، مقدار x و y را بیابید.



۶- توضیح دهید که چگونه یک پاره‌خط را می‌توانیم به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم (دقت داشته باشید که امکانات اندازه‌گیری نداریم).

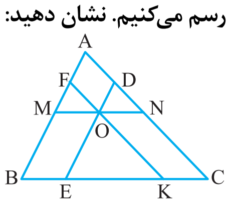
۷- در مثلث ABC نقطه‌ای مانند D_1 را بر ضلع BC انتخاب می‌کنیم و از آن خطی موازی ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D_2 قطع کند. از D_2 خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D_3 قطع کند و این عمل را مرتباً تکرار می‌کنیم. ثابت کنید پس از چند مرحله به نقطهٔ D_1 برمی‌گردیم.

۸- در شکل مقابل $AC \parallel BD$ و $BC \parallel ED$ است. نشان دهید: $OB^2=OA.OE$.



۹- در مثلث ABC از نقطهٔ M وسط ضلع BC، خطی موازی نیمساز درونی زاویهٔ A رسم می‌کنیم. این خط ضلع AC را در نقطهٔ P و امتداد ضلع AB را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. ثابت کنید $BQ=CP$.

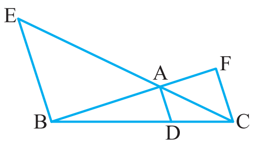
۱۰- از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC مطابق شکل خطوط DE، FK و MN را به ترتیب موازی اضلاع AB، CA و BC رسم می‌کنیم. نشان دهید:



الف) $\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{CA}=1$

ب) $\frac{BF}{AB}+\frac{CE}{BC}+\frac{AN}{CA}=2$

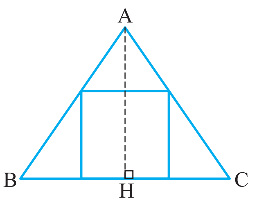
۱۱- در شکل مقابل AD، BE و CF موازی هستند. نشان دهید:



الف) $BE.DC=CF.BD$

ب) $\frac{1}{AD}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}$

۱۲- در شکل زیر اندازهٔ ضلع مربع را برحسب a و h_a محاسبه کنید (a ضلع BC و h_a ارتفاع وارد بر آن است).



پاسخ‌نامهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینه۳ به کمک خاصیت تناسب‌ها به رابطهٔ $\frac{a_1}{1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+2+\cdots+n}$ می‌رسیم. پس جواب مسئله $1+2+\cdots+n$ است که می‌شود $\frac{n(n+1)}{2}$.

اگر نمی‌دانید مجموع اعداد ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود، به روابط مقابل دقت کنید:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=A$$
$$n+(n-1)+\cdots+3+2+1=A$$

حالا همهٔ اعداد را با هم جمع می‌کنیم و اعداد سمت چپ دوبه‌دو $n+1$ می‌سازند. پس سمت چپ n تا $n+1$ داریم که نتیجهٔ آن می‌شود $n(n+1)=2A$.

۲- گزینه۳ وقتی b واسطهٔ هندسی a و c است، یعنی $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$، در نتیجه $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{b\pm c}$. این تناسب درستی گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ را نشان می‌دهد. اما برای گزینهٔ ۳، یک مثال نقض بزنیم که خیال شما هم راحت باشد. فرض کنید $a=1$، $b=2$ و $c=4$ باشد، پس $\frac{b-c}{a-b}=\frac{-2}{-1}=2$ و $\frac{b}{c}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

۳- گزینه۳ مقدار $a^4+8a^2c^2+16c^4$ برابر است با $(a^2+4c^2)^2$ و در نتیجه صورت کسر a^2+4c^2 می‌شود. حالا در تناسبی که سؤال داده اگر همه چیز را به توان ۲ برسانیم به $\frac{a^2}{b^2}=\frac{4c^2}{9d^2}=k^2$ می‌رسیم. از خاصیت تناسب‌ها استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $\frac{a^2}{b^2}=\frac{4c^2}{9d^2}=\frac{a^2+4c^2}{b^2+9d^2}$ و در نتیجه کسر داده‌شده برابر k^2 است.

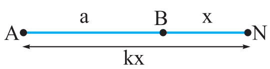
۴- گزینه۲ کافی است همهٔ کسرها را در تناسب داده‌شده به توان ۲ برسانید که به رابطهٔ $\frac{a^2}{4b^2}=\frac{9c^2}{d^2}=\frac{9e^2}{4f^2}=k^2$ می‌رسید. حالا با استفاده از خاصیت تناسب‌ها می‌توانیم بگوییم $\frac{a^2+9c^2+9e^2}{4b^2+d^2+4f^2}=k^2$.

کسر داده‌شده در صورت سؤال جذر کسری است که این‌جا پیدا کرده‌ایم، پس جواب k است.

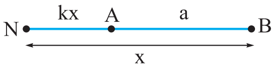
۵- گزینه۲ پاره‌خط AB را به شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

پس $kx+x=a$ یعنی $x=\frac{a}{k+1}$، بنابراین $MB=x=\frac{a}{k+1}$.

۶- گزینه۴ روی شکل نام‌گذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم. پس $kx-x=a$ و این یعنی $x=\frac{a}{k-1}$، بنابراین $NA=kx=\frac{ka}{k-1}$. دقت کنید که چون $k>1$ است، N باید از A دورتر باشد.

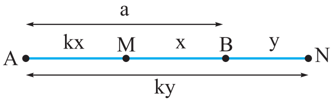


۷- گزینه۳ این بار N نزدیک A است، چون $k<1$. پس شکل ما به صورت روبه‌رو است:



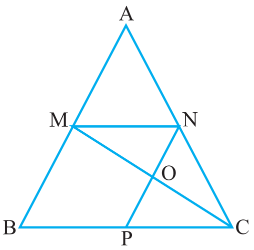
از شکل مشخص می‌شود که $x-kx=a$ و این یعنی $x=\frac{a}{1-k}$.

۸- گزینه۴ دیدیم که یک نقطه باید داخل پاره‌خط AB و یک نقطه بیرون آن قرار بگیرد. حالا یک بار فرض می‌کنیم $k>1$ و یک بار $k<1$. اگر



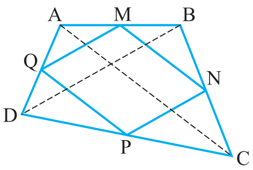
$k>1$ باشد، شکل بالا را داریم که $x=\frac{a}{k+1}$ و $y=\frac{a}{k-1}$ و در نتیجه $MN=x+y=\frac{2ak}{k^2-1}$. اگر $k<1$ باشد، N سمت A قرار دارد و به رابطهٔ $MN=\frac{2ak}{1-k^2}$ می‌رسیم، پس $MN=\frac{2ak}{|1-k^2|}$.

۹- گزینه۳ این مسئله خیلی راحت‌تر از شکل پیچیده‌اش است. فقط باید یک چیزی را خوب دقت کنید و آن هم این است که در نسبت مساحت‌ها چگونه به نسبت پاره‌خط‌های مناسب برسید.

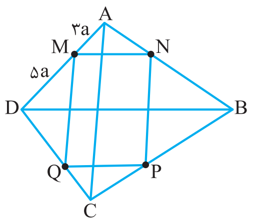


در این‌جا مساحت OMN، ۶۰ درصد مساحت AMN است، پس $\frac{ON}{AM}=\frac{3}{5}$، چون ارتفاع‌ها مشترک‌اند (فاصلهٔ دو خط موازی). خب مسئله تمام است، چون $\frac{NC}{AC}=\frac{PC}{BC}$ و $\frac{NC}{AC}=\frac{ON}{AM}$، پس $\frac{PC}{BC}=\frac{3}{5}$ و در نتیجه $\frac{PC}{BP}=\frac{3}{2}$ که $BP=MN$.

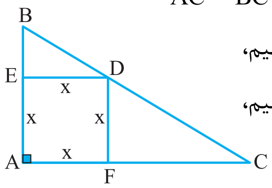
۱۰- گزینه۲ در شکل زیر اگر قطرهای ABCD را بکشیم، در هر مثلث طبق قضیهٔ میان‌خط به این نتیجه می‌رسیم که MN و QP موازی AC و MQ و PN موازی BD اند، بنابراین MNPQ متوازی‌الاضلاع است.



۱۱- گزینه۱ در هر مثلثی که دلتان بخواهد می‌توانید تالس بنویسید. در مثلث ABD رابطهٔ $\frac{3}{8}=\frac{AM}{AD}=\frac{MN}{DB}$ و در مثلث ACD رابطهٔ $\frac{5}{8}=\frac{MD}{AD}=\frac{MQ}{AC}$ را داریم. پس با توجه به این که $MN=MQ$، $\frac{AC}{BD}$ می‌شود $\frac{3}{5}$.

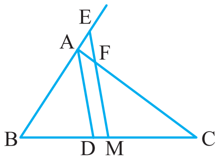


۱۲- گزینه۲ بیایید شکل را بکشیم. با نوشتن رابطهٔ تالس به دو روش، تناسب‌های $\frac{DC}{BC}=\frac{x}{AB}$ و $\frac{BD}{BC}=\frac{x}{AC}$ به دست می‌آیند.

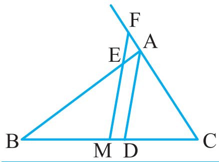


حالا اگر این دو تناسب را جمع کنیم، $1=\frac{BD+DC}{BC}=\frac{x}{AB}+\frac{x}{AC}$ را می‌بینیم، پس $\frac{1}{x}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$.

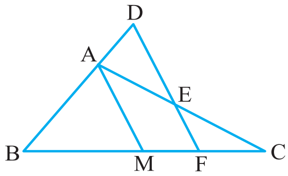
۱۳- گزینه۴ شکل مسئله به صورت زیر می‌شود. دو مثلث آمادهٔ نوشتن رابطهٔ تالس هستند، مثلث‌های BME و ADC. پس آن‌ها را معطل نگذاریم و رابطه‌های $\frac{BD}{BM}=\frac{AB}{BE}$ و $\frac{MC}{DC}=\frac{CF}{AC}$ را بنویسیم. از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که $BE=\frac{AB}{BD}\times BM$ و $CF=\frac{AC}{DC}\times MC$.



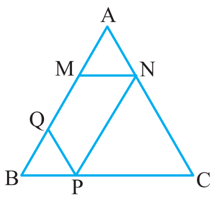
می‌دانید که $BM=MC$ و طبق خاصیت نیمساز $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$، در نتیجه $CF=BE=8$. حواستان باشد که می‌شد شکل را به صورت مقابل هم کشید که در این حالت به $9>8$ می‌رسیدیم!!



۱۴- گزینه۳ دو مثلث در شکل دیده می‌شود که در آن‌ها می‌توانیم تالس بنویسیم. مثلث‌های AMC و BDF. نتایجی که به دست می‌آید روابط $\frac{BM}{MF}=\frac{AB}{AD}$ و $\frac{AC}{AE}=\frac{CM}{MF}$ هستند. از آن‌جایی که $BM=CM$ می‌توانیم بگوییم $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ و در نتیجه $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$. بنابراین با توجه به این‌که $\frac{AD}{AE}=\frac{2}{3}$ و $AB=9$، مقدار AC برابر ۱۳/۵ می‌شود (حواستان باشد که در هر مثلثی که تالس می‌نویسید، پاره‌خط‌های مناسبی انتخاب کنید).



۱۵- گزینه۱ شکل مسئله به صورت روبه‌رو می‌شود که به راحتی می‌توانیم با نام‌گذاری مناسب جواب مسئله را پیدا کنیم.



$AM=kx$، $MB=x$، $AN=ky$، $NC=y$، $CP=z$، $BP=kz$، حالا طبق تالس $\frac{BQ}{QA}=k$ به دست می‌آید، پس $BQ=x$ و $AQ=x$. این یعنی $BQ=AM$، پس $\frac{AM}{BQ}$ برابر ۱ می‌شود.

۱۶- گزینه۱ با نوشتن تالس‌های پی‌درپی به رابطهٔ زیر می‌رسیم که اگر دقت کنید اول و آخر آن نشان می‌دهد که M_1M_6 موازی AC است.

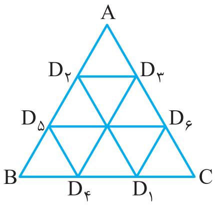
$$\frac{AM_1}{M_1B}=\frac{AM_2}{M_2C}=\frac{BM_3}{M_3C}=\frac{BM_4}{AM_4}=\frac{M_5C}{AM_5}=\frac{M_6C}{BM_6}$$

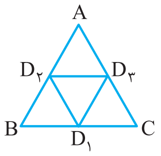
حالا با توجه به اندازهٔ AC و M_3M_4:

$$\frac{M_3M_4}{AC}=\frac{BM_3}{BC}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{M_6C}{BC}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{M_3M_6}{BC}=\frac{1}{5}$$

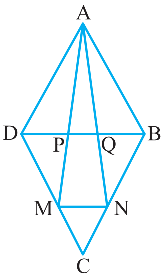
در نتیجه $\frac{BM_3}{BM_6}=\frac{2}{3}$، بنابراین $\frac{M_3M_4}{M_1M_6}=\frac{2}{3}$، پس $M_1M_6=3$.

۱۷- گزینه۳ در سؤال‌های تشریحی ثابت کردیم که اگر D_1 وسط BC نباشد، بعد از شش مرحله و اگر وسط BC باشد بعد از سه مرحله به D_1 برمی‌گردیم. پس حداکثر پس از ۶ مرحله به نقطهٔ شروع می‌رسیم.



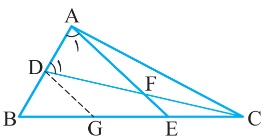


۱۸- گزینه۴ در مثلث AMN می‌رسیم به $\frac{PQ}{MN}=\frac{CD}{CD+DM}$ (چرا؟)؛ در مثلث BCD می‌رسیم به $\frac{MN}{BD}=\frac{CM}{CD}$.

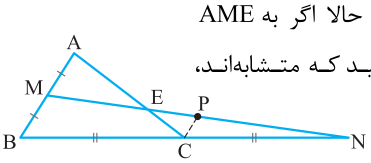


با ضرب این دو رابطه، رابطهٔ $x=\frac{CM}{CD+DM}$ به دست می‌آید. اگر به جای CD بنویسیم $CM+DM$، می‌بینیم که $\frac{CM}{CM+2MD}=x$ و در نتیجه $\frac{x}{1-x}=\frac{CM}{2MD}$ که گزینهٔ ۴ به دست می‌آید.

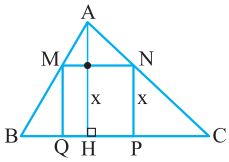
۱۹- گزینه۳ از نقطهٔ D خطی به موازات AE می‌کشیم تا ضلع BC را در نقطهٔ G قطع کند. بنابراین G وسط BE است، زیرا D وسط AB است. از طرفی چون $BE=2EC$ می‌فهمیم که $BG=GE=EC$. بنابراین در مثلث CDG به این می‌رسیم که $DF=FC$. مثلث AFD را اگر ببینید از برابری زاویه‌های A_1 و D_1 به $AF=DF$ می‌رسیم، بنابراین $AF=DF=FC$. این یعنی در مثلث ADC، AF که میانه است برابر نصف DC است. در نتیجه مثلث ADC قائم‌الزاویه و $B\hat{A}C=90^\circ$ می‌شود.



۲۰- گزینه۱ شکل این سؤال به صورت زیر است. از نقطهٔ C خطی موازی AB می‌کشیم تا پاره‌خط CP را ببینیم. در مثلث BMN نتیجه می‌گیریم که PC نصف MB است و این یعنی PC نصف AM است. حالا اگر به AME و PCE نگاه کنید می‌بینید که متشابه‌اند، پس $\frac{AE}{CE}=\frac{AM}{PC}=2$.

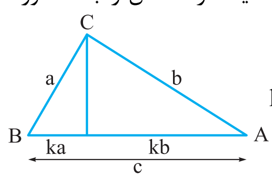


۲۱- گزینه۳ فرض کنیم مثلث و مربع درون آن به صورت مقابل باشد. پس در این شکل تالس‌های $\frac{NP}{AH}=\frac{CN}{AC}$ و $\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ را می‌بینیم. اگر دو طرف رابطهٔ فوق را در هم ضرب کنیم به رابطهٔ جدید $MN\times NP=BC\times AH\times\frac{AN}{AC}\times\frac{CN}{AC}$ می‌رسیم. $MN\times NP$ مساحت مربع، $BC\times AH$ دو برابر مساحت مثلث و $\frac{CN}{AC}\times\frac{AN}{AC}$ حاصل‌ضرب دو عبارت است که جمعشان ۱ می‌شود. پس رابطه را به این صورت می‌نویسیم: $S=۲\times ab$ که در آن $a+b=۱$. حالا ما می‌خواهیم بیشترین مقدار ممکن برای S را پیدا کنیم که برای آن باید $a\times b$ بیشترین مقدار را داشته باشد. اگر مجموع دو عدد، ثابت باشد، زمانی ضربشان بیشترین مقدار را دارد که با هم برابر باشند، پس $a=b=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $S=\frac{۱}{۲}$. اگر علاقه‌مند هستید به اثبات این جمله دقت کنید: شما می‌دانید $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲$ یک مربع کامل است. پس $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰$ و حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b$ باشد. حالا بیایید این عبارت را باز کنیم که نتیجه‌اش می‌شود $a+b-۲\sqrt{ab}\geq ۰$ و از آن‌جا به رابطهٔ $۲\sqrt{ab}\leq a+b$ می‌رسیم. اگر به جای $a+b$ قرار بدهیم ۱ و دو طرف را به توان ۲ برسانیم، رابطهٔ $ab\leq\frac{۱}{۴}$ را به دست می‌آوریم. پس بیشترین مقدار ab برابر $\frac{۱}{۴}$ است و آن هم زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b=\frac{۱}{۲}$ باشد.



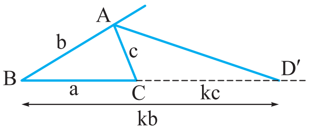
۲۲- گزینه۳ طبق عکس تالس NQ با AB موازی است (چرا؟)؛ پس مساحت مثلث‌های ANP و BMQ برابر است، چرا که ارتفاع آن‌ها فاصلهٔ دو خط موازی و قاعدهٔ هر کدام (BM و AP) برابر $\frac{۳}{۴}$ ضلع AB است، بنابراین $S_{\overset{\triangle}{ANP}}=S_{\overset{\triangle}{BMQ}}$. اگر از دو طرف رابطه، مساحت مثلث OMP را کم کنیم به برابری مساحت دو چهارضلعی AMON و BPOQ می‌رسیم.

۲۳- گزینه۲ طبق خاصیت نیمساز، شکل را به صورت مقابل می‌کشیم. پس $k(a+b)=c$ و این یعنی $k=\frac{c}{a+b}$. پس $ka=\frac{ac}{a+b}$ که طول قطعهٔ کوچک‌تر است.

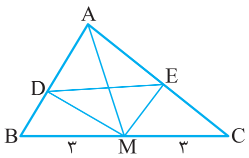


۲۴- گزینه۲ با توجه به اعداد نوشته‌شده $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ و این یعنی AD نیمساز است، پس $B\hat{A}D=D\hat{A}C=۴۰^\circ$. در نتیجه $B\hat{A}C=۸۰^\circ$ و $\hat{C}=۴۰^\circ$. بنابراین مثلث ACD متساوی‌الساقین است و $AD=DC=۶$.

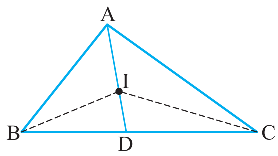
۲۵- گزینه۱ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مجاور به بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی است. بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی هم روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع است. یعنی شکل مسئله مثل شکلی است که ما کشیده‌ایم و به دنبال طول پاره‌خط CD' هستیم. طبق خاصیت نیمساز خارجی $CD'=kc$ و $BD'=kb$، پس $kb-kc=a$ و در نتیجه $k=\frac{a}{b-c}$، بنابراین $CD'=\frac{ac}{b-c}$.



۲۶- گزینه٤ با توجه به قضیهٔ نیمساز در دو مثلث AMC و AMB رابطه‌های $\frac{AE}{EC}=\frac{AM}{MC}=\frac{۴}{۳}$ و $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{BM}=\frac{۴}{۳}$ را داریم که نتیجه‌اش می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۴}{۳}$. پس DE با BC موازی است که با توجه به قضیهٔ تالس $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{۴}{۷}$ می‌شود.

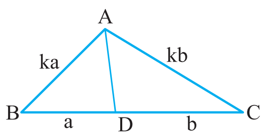


۲۷- گزینه۲ در شکل زیر AI، BI و CI نیمسازند (چرا؟)؛ پس $\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}$ و $\frac{AI}{ID}=\frac{AC}{CD}$. چون $\frac{AI}{AD}=\frac{۲}{۳}$ است، پس $\frac{AI}{ID}=۲$ و این یعنی $AB=۲BD$ و $AC=۲CD$.

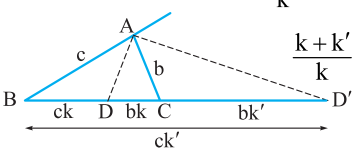


در نتیجه مجموع دو ضلع AB و AC، دو برابر ضلع BC است. بنابراین محیط مثلث برابر است با $a+۲a=۳a$.

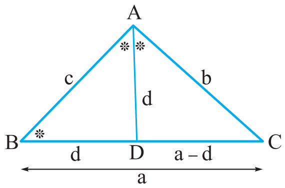
۲۸- گزینه۲ در شکل زیر $BD=a$ و $DC=b$، پس طبق خاصیت نیمساز $AB=ka$ و $AC=kb$. مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{k^۲ab}{۲}$، پس باید به دنبال k باشیم. چه رابطه‌ای مانده که استفاده نکرده‌ایم؟ بله، چارهٔ کار کمک‌گرفتن از فیثاغورس عزیز است!! پس $k^۲a^۲+k^۲b^۲=(a+b)^۲$ و از این‌جا $k^۲$ برابر $\frac{(a+b)^۲}{a^۲+b^۲}$ می‌شود، پس گزینهٔ ۲ درست است.



۲۹- گزینه۱ شکل مسئله را می‌کشیم و برای راحتی در محاسبات نام‌گذاری‌های زیر را در آن انجام می‌دهیم. بنابراین برای $\frac{DD'}{CD}$ می‌نویسیم $\frac{bk+bk'}{bk}$ که می‌شود $\frac{k+k'}{k}$ و برای $\frac{DD'}{BD}$ می‌نویسیم $\frac{ck'-ck}{ck}$ که می‌شود $\frac{k'-k}{k}$. در نتیجه تفاضل این دو کسر برابر $\frac{k+k'}{k}-\frac{k'-k}{k}=\frac{۲k}{k}$ یعنی ۲ است.

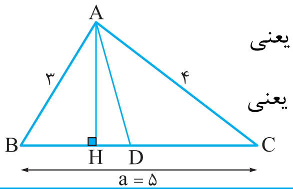


۳۰- گزینه۳ در شکل زاویه‌های ستاره‌دار با هم برابرند.

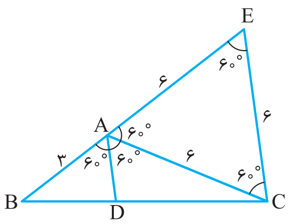


دو مثلث ADC و ABC با هم متشابه‌اند، پس $\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{BC}$ و در نتیجه $\frac{BD}{AB}=\frac{AC}{BC}$. بنابراین $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ و این یعنی $ad=bc$. از طرفی طبق قضیهٔ نیمساز $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$، پس $\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$ یا $\frac{a-d}{b}=\frac{b}{a}$ که نتیجه‌اش می‌شود $a^۲-ad=b^۲$. حالا اگر به جای ad مقدار bc را قرار دهیم، به رابطهٔ $a^۲-bc=b^۲$ یا $a^۲=b^۲+bc$ یا $a^۲-b^۲=bc$ می‌رسیم.

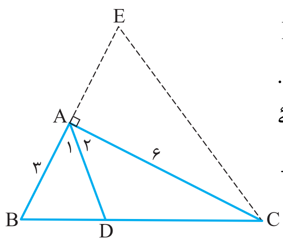
۳۱- گزینه۴ در مثلث ABC، $AB^۲=BH\times BC$ است، پس $BH=\frac{۹}{۵}$. از طرفی $BD=\frac{۳}{۷}BC$ یعنی $BD=\frac{۱۵}{۷}$. بنابراین $DH=BD-BH$ یعنی $DH=\frac{۱۵}{۷}-\frac{۹}{۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$.



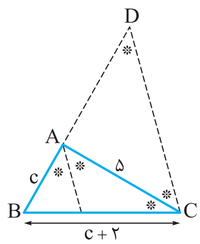
۳۲- گزینه۲ اگر از رأس C خط CE را موازی AD بکشیم، مثلث ACE پیدا می‌شود که متساوی‌الاضلاع است، چون همهٔ زاویه‌های آن ۶۰° هستند ($A\hat{C}E=C\hat{A}D$ و $A\hat{E}C=B\hat{A}D$)، بنابراین $AE=EC=۶$. حالا در مثلث BCE تالس را می‌نویسیم و AD را پیدا می‌کنیم. پس $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{EC}$ و در نتیجه $\frac{۳}{۹}=\frac{AD}{۶}$ که از آن $AD=۲$ می‌شود.



۳۳- گزینه۲ مثلث ABC را به همراه خط CE موازی نیمساز می‌کشیم. دیگر با خط CE کاملاً آشناییم. خب دقت کنید که $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۴۵°$، پس $\hat{E}=A\hat{C}E=۴۵°$ و این یعنی $AE=۶$ و $CE=۶\sqrt{۲}$. بنابراین با نوشتن تالس به رابطهٔ $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{EC}$ یا همان $\frac{۳}{۹}=\frac{AD}{۶\sqrt{۲}}$ می‌رسیم، در نتیجه $AD=۲\sqrt{۲}$.

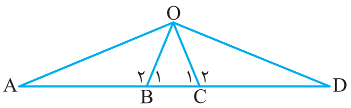


۳۴- گزینه۲ از آن‌جایی که $\hat{A}=۲\hat{C}$، نیمساز زاویهٔ A به ما زوایایی می‌دهد که با زاویهٔ C برابرند. پس نیمساز این زاویه را می‌کشیم و وقتی در مسئله نیمساز دیده شد، خطی از رأس C موازی نیمساز می‌کشیم. پس شکل مسئله این‌جوری می‌شود که می‌بینید.

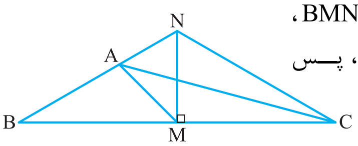


زاویه‌های ستاره‌دار با هم برابرند (چرا؟)؛ دو مثلث ABC و BCD متشابه‌اند، چون $B\hat{D}C=A\hat{C}B$ و $B\hat{C}D=B\hat{A}C$، پس $\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$ در نتیجه $\frac{۵+c}{c+۲}=\frac{c+۲}{c}$. با طرفین وسطین کردن و حل معادله، C برابر ۴ به دست می‌آید. بنابراین محیط مثلث می‌شود ۱۵.

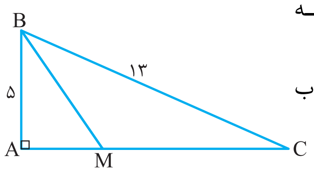
۳۵- گزینه۴ اول از همه دقت کنید که مثلث‌های OAB و OCD همنهشت‌اند، چون $OA=OD$ پس $\hat{A}=\hat{D}$ و در نتیجه $AB=CD$. اگر مثلث OAC را نگاه کنید، OB نیمساز زاویهٔ داخلی O و OD نیمساز زاویهٔ خارجی O است (چرا؟)؛ پس می‌توانیم بنویسیم $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{BC}$ و $\frac{OA}{OC}=\frac{AD}{CD}$، در نتیجه $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$. دقت کنید که اگر $BC=x$ باشد، AD می‌شود $۸+x$. پس $\frac{۴}{x}=\frac{۸+x}{۴}$ و از این‌جا $x^۲+۸x-۱۶=۰$ که مقدار x برابر $-۴+\sqrt{۳۲}$ به دست می‌آید، پس $x=۴\sqrt{۲}-۴$.



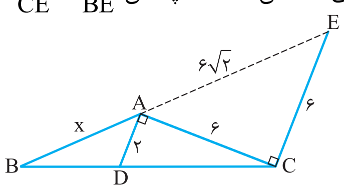
۳۶- گزینه۲ در مثلث NBC، CA نیمساز است، پس $\frac{CB}{CN}=\frac{BA}{AN}$. NM بر BC عمود است، چون مثلث BNC متساوی‌الساقین است ($N\hat{B}C=N\hat{C}B$). پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MNC، MN نصف CN است (چرا؟)؛ از طرفی MB هم نصف CB است، بنابراین $\frac{CB}{CN}=\frac{MB}{MN}$. این‌ها یعنی $\frac{MB}{MN}=\frac{BA}{AN}$ و در نتیجه در مثلث BMN، خط MA نیمساز است، پس $A\hat{M}B=\frac{۹۰°}{۲}$.



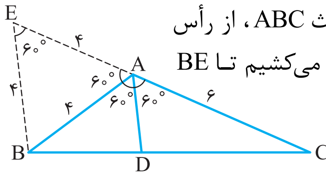
۳۷- گزینه۱ این مثلث قائم‌الزاویه است، چون اضلاع آن به قول خودمان فیثاغورسی‌اند، پس $A=۹۰°$. وقتی می‌گوییم M از رأس A و ضلع BC به یک فاصله است، یعنی M روی نیمساز زاویهٔ B است (چرا؟)؛ بنابراین $\frac{AM}{MC}=\frac{۵}{۱۳}$ و به جای MC می‌گذاریم $۱۲-AM$، پس $\frac{۵}{۱۳}=\frac{AM}{۱۲-AM}$. از این‌جا AM برابر $\frac{۱۰}{۳}$ به دست می‌آید. در نتیجه $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}}=\frac{AM}{AC}=\frac{\frac{۱۰}{۳}}{۱۲}$، پس جواب $\frac{۱۰}{۳۶}$ یا $\frac{۵}{۱۸}$ است.



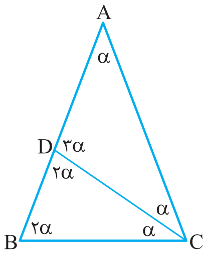
۳۸- گزینه۱ بیایید از رأس C خطی به موازات AD بکشیم تا امتداد AB را در E قطع کند. اگر می‌پرسید چرا، باید بگوییم که در این فصل کار ما کشیدن خطوطی است که از رأس می‌گذرد و موازی پاره‌خطی است که درون مثلث داده شده است. چون با این کار شرایط نوشتن برای تالس دوست‌داشتنی فراهم می‌شود. حالا دقت کنید که $B\hat{A}D=۴۵°$، پس $C\hat{A}E=۴۵°$ و از آن‌جا $\hat{E}=۴۵°$. در نتیجه در مثلث ACE طول اضلاع CE و AE به ترتیب ۶ و $۶\sqrt{۲}$ می‌شود. حالا وقت نوشتن رابطهٔ زیبای تالس است، پس $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{CE}$ و در نتیجه $\frac{x}{x+۶\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۶}$. از این معادله، مقدار x برابر $۳\sqrt{۲}$ می‌شود.



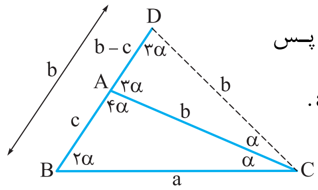
۳۹- گزینه۲ در مثلث ABC، از رأس B خطی به موازات نیمساز AD می‌کشیم تا BE به وجود آید. دیگر با این کار آشنایی کامل دارید. پس مثلث ABE متساوی‌الاضلاع می‌شود (چرا؟)؛ حالا در مثلث BCE تالس می‌نویسیم که می‌شود $\frac{AD}{۴}=\frac{۶}{۶+۴}$ و این یعنی $AD=۲/۴$.



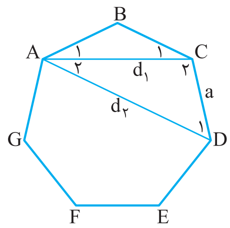
۴۰- گزینه۴ با توجه به توضیحات سؤال، اندازهٔ زاویه‌های درون مثلث باید مثل شکل روبه‌رو باشد (چرا؟)؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم $AB=AC=b$ ، $AD=DC=BC=a$ و $BD=b-a$. حالا از قضیهٔ نیمساز داخلی رابطهٔ $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$ را داریم که نتیجهٔ آن می‌شود $\frac{a}{b}=\frac{b-a}{a}$. اگر به خواستهٔ سؤال دقت کنید، ما به دنبال $\frac{a}{b}$ هستیم، پس می‌توانیم $\frac{a}{b}$ را برابر x قرار دهیم که نتیجهٔ آن معادلهٔ $x=\frac{۱}{x}-۱$ است. بنابراین $x^۲+x-۱=۰$ است که مقدار x می‌شود $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$.



۴۱- گزینه۱ در شکل زیر ضلع BA را تا نقطهٔ D ادامه می‌دهیم به طوری که $C\hat{D}A=۳\alpha$، پس $C\hat{A}D=۳\alpha$ و $A\hat{C}D=\alpha$. چون $۷\alpha=۱۸۰^\circ$، در نتیجه $BD=DC$ (چون $D\hat{B}C=D\hat{C}B$) و $AC=DC$. حالا در مثلث BCD، CA نیمساز زاویهٔ C است و این یعنی $\frac{DC}{BC}=\frac{AD}{AB}$، پس $\frac{b}{a}=\frac{b-c}{c}$ و در نتیجه $a=\frac{bc}{b-c}$.



۴۲- گزینه۳ در شکل روبه‌رو مثلث ACD را جداگانه نگاه کنید. اضلاع این مثلث همان سه پارامتری است که در سؤال درگیر هستند. حالا به زوایای زیر توجه کنید:



$$\hat{B}=\frac{(۷-۲)\times۱۸۰}{۷}=\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۷}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{C}_1=\frac{۱۸۰^\circ}{۷}\Rightarrow\hat{C}_2=\frac{۴\times۱۸۰^\circ}{۷}$$

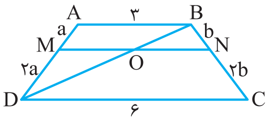
$$ABCD\ \text{ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین}\Rightarrow\hat{A}_2=\hat{C}_1=\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$$

پس $\hat{D}_1=\frac{۲\times۱۸۰^\circ}{۷}$ می‌شود. این‌ها یعنی زوایای مثلث ACD با اعداد ۴، ۲ و ۱ متناسب‌اند، بنابراین این سؤال مثل سؤال قبلی می‌شود. در آن‌جا به این رسیدیم که:

$$\frac{d_1-a}{a}=\frac{d_1}{d_2}\Rightarrow\frac{d_1}{a}-۱=\frac{d_1}{d_2}\Rightarrow\frac{۱}{a}=\frac{۱}{d_1}+\frac{۱}{d_2}$$

در نتیجه $a=\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}$.

۴۳- گزینه۳ اگر قطر BD را رسم کنیم، دو مثلث می‌بینیم که می‌توانیم در آن‌ها تالس بنویسیم. در مثلث ABD، رابطهٔ $\frac{۲a}{۳a}=\frac{MO}{AB}$ و در مثلث BCD، رابطهٔ $\frac{b}{۳b}=\frac{ON}{DC}$ را داریم. پس $MO=\frac{۲}{۳}\times۳=۲$ و $ON=\frac{۱}{۳}\times۶=۲$ و در نتیجه $MN=۴$.

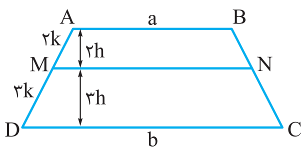


◄ در حالت کلی طول پاره‌خط MN برابر است با $\frac{n.AB+m.DC}{m+n}$ که در آن $\frac{m}{n}=\frac{AM}{MD}$. این رابطه را در سؤال‌های تشریحی ثابت کردیم.

۴۴- گزینه۳ نسبت مساحت دو مثلث گفته‌شده برابر است با نسبت پاره‌خط‌های QP به MN، زیرا ارتفاع دو مثلث یکسان است. از طرفی $QP=\frac{۲DC+AB}{۳}$ و $MN=\frac{۲AB+DC}{۳}$، پس $\frac{QP}{MN}$ برابر است با $\frac{۲DC+AB}{۲AB+DC}$. DC هم دو برابر AB است و در نتیجه حاصل کسر $\frac{۵}{۴}$ می‌شود.

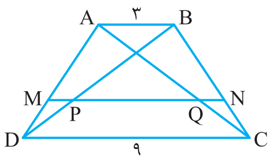
۴۵- گزینه۴ اگر قاعدهٔ کوچک را a و قاعدهٔ بزرگ را b بنامیم، طبق آن چیزی که ثابت کردیم $MN=\frac{۳a+۲b}{۵}$. حالا باید نسبت مساحت‌ها را به کار بگیریم. مساحت ذوزنقهٔ ABNM با توجه به شکل برابر $\frac{۱}{۲}\times۲h(a+\frac{۳a+۲b}{۵})$ و مساحت ذوزنقهٔ MNDC برابر $\frac{۱}{۲}\times۳h(b+\frac{۳a+۲b}{۵})$ است. پس

$$۲(a+\frac{۳a+۲b}{۵})=\frac{۳}{۲}(b+\frac{۳a+۲b}{۵})$$



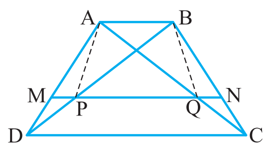
و با ساده‌کردن این رابطه می‌رسیم به $۲۳a=۱۳b$.

۴۶- گزینه۲ در مثلث ABD به رابطهٔ $\frac{۱}{۳}=\frac{MD}{AD}=\frac{MP}{AB}$ و در مثلث ADC به $\frac{۲}{۳}=\frac{AM}{AD}=\frac{MQ}{DC}$ می‌رسیم.



در نتیجه $MP=۱$ و $MQ=۶$ که مقدار PQ برابر $۶-۱=۵$ می‌شود.

۴۷- گزینه۳ ارتفاع ذوزنقه‌های ABQP و PQCD برابرند (چرا؟) پس باید به دنبال نسبت مجموع قاعده‌های آن‌ها باشیم. دیدیم که $PQ=\frac{DC-AB}{۲}$. اگر بگیریم $AB=a$، $DC=۳a$ می‌شود و از آن‌جا $PQ=a$. در نتیجه $AB+PQ=۲a$ و $PQ+DC=۴a$؛ بنابراین مساحت ABQP نصف مساحت PQCD است.



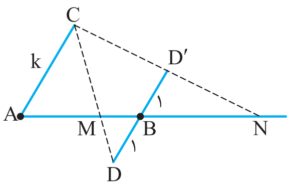
پاسخ‌نامهٔ سؤالات تشریحی

۱- کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}$ را به توان n می‌رسانیم، پس تناسب برقرار است، یعنی $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}=\frac{e^n}{f^n}$. حالا صورت و مخرج کسر $\frac{a^n}{b^n}$ را در p، کسر $\frac{c^n}{d^n}$ را در q و کسر $\frac{e^n}{f^n}$ را در r ضرب می‌کنیم. قبول دارید که کسرها تکان نمی‌خورند؟ پس باید بنویسیم $(\frac{a}{b})^n=\frac{pa^n}{pb^n}=\frac{qc^n}{qd^n}=\frac{re^n}{rf^n}$ و در نتیجه با توجه به خاصیت تناسب، همهٔ صورت‌ها را با هم و همهٔ مخرج‌ها را با هم جمع می‌کنیم و به حکم می‌رسیم.

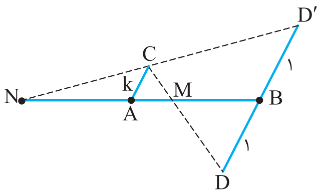
حواستان باشد که هر کدام از اعداد p، q و r که صفر باشد، کسر مربوط به آن را از بازی خارج می‌کنیم.

۲- برای دو حالت $k>1$ و $k<1$ مسئله را حل می‌کنیم.

حالت اول $k>1$: مانند شکل روبه‌رو پاره‌خط AC را به اندازهٔ k واحد رسم می‌کنیم. سپس خط DD′ را موازی AC می‌کشیم و روی آن دو پاره‌خط BD و BD′ را به اندازهٔ ۱ واحد جدا می‌کنیم. حالا C را به D و D′ وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا خط AB را در M و N قطع کند. دقت کنید که مثلث‌های AMC و BMD متشابه‌اند (چرا؟)؛ پس $\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{BD}=k$ و طبق تالس در مثلث ACN، $\frac{NB}{NA}=\frac{BD'}{AC}=\frac{1}{k}$ است که این یعنی $\frac{NA}{NB}=k$.

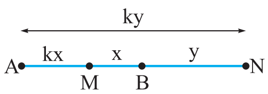


حالت دوم $k<1$: روش کار کاملاً مشابه است و فقط شکل مسئله کمی فرق دارد!



۳- در دو حالت $k>1$ و $k<1$ مسئله را حل می‌کنیم.

اگر $k>1$ باشد، شکل پاره‌خط AB و M و N به صورت روبه‌رو است:



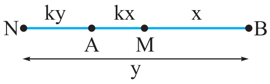
حالا $\frac{MA}{MB}=k$ است. پس بیایید MA را برابر kx و MB را برابر x بگیریم. از این‌جا AB برابر $(k+1)x$ به دست می‌آید. یعنی $(k+1)x=a$ و این یعنی $x=\frac{a}{k+1}$. پس $MA=kx=\frac{ka}{k+1}$ و $MB=x=\frac{a}{k+1}$. دقیقاً با همین روش NA و NB به دست می‌آید.

$NA=ky\ ,\ NB=y$

$\Rightarrow AB=NA-NB=(k-1)y\Rightarrow a=(k-1)y$

پس $y=\frac{a}{k-1}$ و در نتیجه $NA=\frac{ka}{k-1}$ و $NB=\frac{a}{k-1}$، هم‌چنین $MN=x+y$ یعنی $MN=\frac{2ak}{k^2-1}$.

اگر $k<1$ باشد، شکل مسئله این‌جوری است:



$(k+1)x=a \Rightarrow x=\frac{a}{k+1}\Rightarrow MA=\frac{ka}{k+1}, MB=\frac{a}{k+1}$

$(1-k)y=a\Rightarrow y=\frac{a}{1-k}\Rightarrow NA=\frac{ka}{1-k}, NB=\frac{a}{1-k}$

هم‌چنین $MN=y-x$.

در حالت اول $MN=\frac{2ak}{k^2-1}$ و در حالت دوم $MN=\frac{2ak}{1-k^2}$ به دست می‌آید.

برای نسبت‌های $\frac{MA}{NA}$ و $\frac{MB}{NB}$ باید بنویسیم:

حالت اول $\frac{MA}{NA}=\frac{MB}{NB}=\frac{x}{y}=\frac{k-1}{k+1}$

حالت دوم $\frac{MA}{NA}=\frac{MB}{NB}=\frac{x}{y}=\frac{1-k}{1+k}$

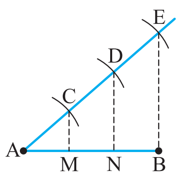
۴- طبق رابطهٔ تالس در مثلث می‌رسیم به $\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2x+1}{x}$، پس $2x^2+4x=2x^2+3x+1$؛ در نتیجه $x=1$.

۵- در دو مثلث ABC و ADC با نوشتن تالس به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

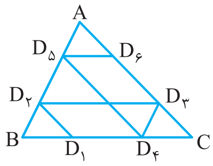
$\frac{4}{y}=\frac{x}{3}$ و $\frac{4+y}{8}=\frac{x}{3}$

در نتیجه $\frac{4+y}{8}=\frac{4}{y}$ و با طرفین‌وسطین کردن، معادلهٔ $y^2+4y-32=0$ به دست می‌آید. با تجزیهٔ این معادله به $(y-4)(y+8)=0$ می‌رسیم که حاصل آن $y=4$ است. پس x هم برابر ۳ به دست می‌آید.

۶- فرض کنید می‌خواهیم پاره‌خط AB را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم. خطی دلخواه رسم می‌کنیم که از نقطهٔ A عبور کند. حالا کمان دلخواهی به مرکز A می‌کشیم تا نقطهٔ C پیدا شود. بعد از آن کمانی با همان شعاع و مرکز C می‌زنیم تا به نقطهٔ D برسیم و به همین شکل نقطهٔ E را کشف می‌کنیم! پس $AC=CD=DE$. حالا از E به B وصل کرده و از D و C موازی EB می‌کشیم تا نقاط M و N به دست آیند. به شما قول می‌دهم که $AM=MN=NB$ چون طبق تالس $\frac{AM}{AB}=\frac{AC}{AE}=\frac{1}{3}$ و $\frac{AN}{AB}=\frac{AD}{AE}=\frac{2}{3}$.



۷- در مثلث ABC، نقطهٔ D_1 را که وسط BC است، انتخاب می‌کنیم و کار گفته‌شده در مسئله را انجام می‌دهیم تا به D_6 برسیم. D_6 یک جوری است که انگار یک مرحلهٔ دیگر، کار را ادامه بدهیم، به D_1 برمی‌گردیم. بیایید این را ثابت کنیم. با کمک‌گرفتن از قضیهٔ تالس و نوشتن یک سری تناسب به رابطهٔ $\frac{BD_1}{D_1C}=\frac{AD_6}{D_6C}$ می‌رسیم که با توجه به عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم D_1D_6 موازی AB است. پس بعد از شش مرحله به D_1 می‌رسیم.

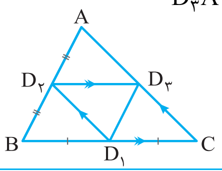


$$D_1D_2 \parallel AC \Rightarrow \frac{BD_1}{D_1C}=\frac{BD_2}{D_2A} \quad , \quad D_5D_6 \parallel BC \Rightarrow \frac{AD_5}{D_5B}=\frac{AD_6}{D_6C}$$

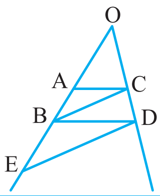
$$D_2D_3 \parallel BC \Rightarrow \frac{BD_2}{D_2A}=\frac{CD_3}{D_3A} \, , \, D_4D_5 \parallel AC \Rightarrow \frac{CD_4}{D_4B}=\frac{AD_5}{D_5B}$$

$$D_3D_4 \parallel AB \Rightarrow \frac{CD_3}{D_3A}=\frac{CD_4}{D_4B}$$

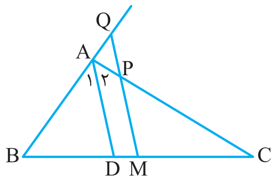
حالا اگر D_1 وسط BC باشد، پس از سه مرحله به جای اولمان می‌رسیم.



۸- در مثلث‌های OBD و ODE تالس را بنویسید. رابطه‌های $\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OD}$ و $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$ نتیجهٔ کار شماست، پس $\frac{OB}{OE}=\frac{OA}{OB}$ و در نتیجه $OB^2=OA.OE$.



۹- شکل این سؤال به صورت روبه‌رو است. مثلث‌های BMQ و ACD برای نوشتن تالس داد می‌زنند! پس منتظرشان نمی‌گذاریم، فقط باید حواسمان به انتخاب پاره‌خط‌ها باشد.

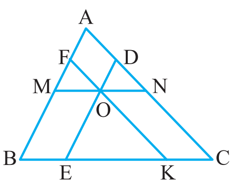


$$\frac{AB}{BQ}=\frac{BD}{BM} \Rightarrow BQ=\frac{BM\times AB}{BD}$$

$$\frac{CP}{AC}=\frac{MC}{DC} \Rightarrow CP=\frac{MC\times AC}{DC}$$

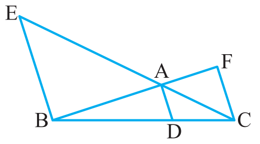
M وسط ضلع BC است، پس BM = MC و AD نیمساز است، پس $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ یا بهتر بگوییم $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$، در نتیجه BQ = CP.

۱۰- الف) FK موازی AC است، پس طبق تالس $\frac{AF}{AB}=\frac{KC}{BC}$. OKCN متوازی‌الاضلاع است، پس NC = OK. مثلث OEK با ABC متشابه است (چرا؟)؛ پس $\frac{OK}{AC}=\frac{EK}{BC}$. پس به جای $\frac{AF}{AB}$ می‌گذاریم $\frac{KC}{BC}$ و به جای $\frac{CN}{CA}$ قرار می‌دهیم $\frac{OK}{AC}$ که می‌شود $\frac{EK}{BC}$. پس حاصل جمع این سه کسر برابرِ ۱ می‌شود.



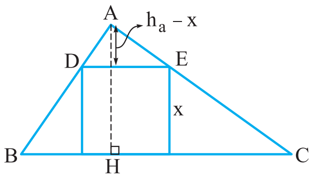
ب) $\frac{BF}{AB}$ می‌شود $1-\frac{AF}{AB}$، $\frac{CE}{BC}$ می‌شود $1-\frac{BE}{BC}$ و $\frac{AN}{AC}$ می‌شود $1-\frac{CN}{CA}$؛ بنابراین جمع این سه کسر می‌شود ۲ = ۱ − ۳.

۱۱- الف) دو مثلث برای تالس‌نوشتن دیده می‌شود. پس سریع برویم سراغ رابطهٔ شیرین تالس! $\frac{AD}{BE}=\frac{DC}{BC}$ و $\frac{AD}{CF}=\frac{BD}{BC}$. حالا با توجه به این دو رابطه و طرفین وسطین در آن‌ها، رابطهٔ BE.DC = CF.BD به دست می‌آید.

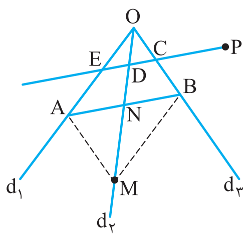


ب) این‌جا دو رابطهٔ به دست آمده از تالس‌ها را با هم جمع می‌کنیم که می‌شود $\frac{AD}{BE}+\frac{AD}{CF}=\frac{BD+DC}{BC}$، پس $\frac{AD}{BE}+\frac{AD}{CF}=1$ و اگر این را بر AD تقسیم کنیم همان رابطهٔ خواسته‌شده دیده می‌شود.

۱۲- در این شکلی که ما کشیده‌ایم، x را ضلع مربع می‌نامیم. پس طبق تشابه مثلث‌های ADE و ABC و نوشتن نسبت تشابه به $\frac{x}{a}=\frac{h_a-x}{h_a}$ می‌رسیم و این یعنی $\frac{x}{a}=1-\frac{x}{h_a}$. پس $\frac{1}{a}=\frac{1}{h_a}=\frac{1}{x}$. این رابطه را بد نیست به خاطر داشته باید که از آن x می‌شود $\frac{a.h_a}{a+h_a}$.



۱۳- فرض کنید سه خط d_1، d_2 و d_3 در نقطهٔ O همرس باشند. نقطهٔ دلخواهی روی d_2 انتخاب کنید و اسم آن را M بگذارید. حالا از M موازی d_1 و d_3 خطوطی رسم کنید تا نقاط A و B به دست آیند: چهارضلعی OAMB متوازی‌الاضلاع است، پس AN = NB. حالا از P خطی موازی AB بکشید. این خط همان جواب مسئله است، چون طبق تالس $\frac{OD}{ON}=\frac{CD}{NB}$ و $\frac{OD}{ON}=\frac{ED}{AN}$ که با توجه به AN = NB به ED = DC می‌رسیم.



۱۴- در چهارضلعی ABCD، بیایید ثابت کنیم MN از وسط EF می‌گذرد. M و N وسط دو ضلع AB و CD و E و F وسط دو قطر AC و BD هستند. به مثلث‌های ABD و ACD نگاه کنید. قضیهٔ میان‌خط به ما می‌گوید که MF و EN موازی و مساوی نصف AD هستند، پس MF و EN با هم موازی و مساوی‌اند. این یعنی چهارضلعی MFNE متوازی‌الاضلاع است. حالا یادتان هست که قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند؛ در نتیجه MN از وسط FE عبور می‌کند. دقیقاً به روش مشابه می‌توانید بگویید پاره‌خطی که وسط اضلاع AD و BC را به هم وصل می‌کند نیز از وسط EF می‌گذرد.