درس ۱

توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

یادآوری تابع

تعریف تابع

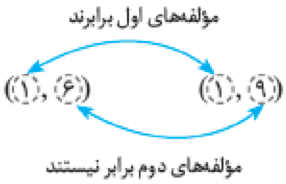
با «تابع» در سال قبل آشنا شدیم. *ابتدا مطالب سال قبل را با هم مرور می‌کنیم تا قشنگ بیایم تو باغ! بعد می‌رویم سراغ مباحث جدید.*

تابع: یک رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را تابع گوییم، هرگاه به هر عضو از مجموعهٔ A (مجموعهٔ متغیرهای مستقل) **دقیقاً** یک عضو از مجموعهٔ B نظیر شود. در واقع تابع مثل یک دستگاه است که به ازای هر ورودی‌اش **دقیقاً** یک خروجی می‌دهد.

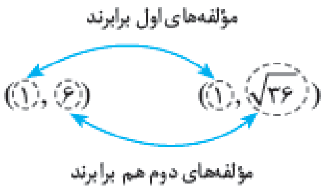
روش‌های نمایش تابع

یک رابطه بین اعضای دو مجموعه را به روش‌های مختلفی می‌توانیم نشان دهیم. سال قبل با روش‌های «نمایش زوج‌مرتبی»، «نمایش جدولی»، «نمایش پیکانی (نمودار وِن)»، «نمایش مختصاتی (نموداری)» و «نمایش توصیفی» آشنا شدید. سه روش پر کاربرد آن‌ها را با هم دوره می‌کنیم:

۱- نمایش زوج‌مرتبی: اگر رابطه‌ای را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها نشان دهیم، به شرطی می‌تواند تابع باشد که **مؤلفه‌های اول آن تکراری نباشند**؛ اگر مؤلفه‌های اول دو زوج‌مرتب با هم برابر بودند، شرط آن‌که آن رابطه تابع باشد این است که مؤلفه‌های دوم همان دو زوج‌مرتب نیز با هم برابر باشند.



برای مثال رابطهٔ $\{(۱,۱۰),(۱,۶),(۲,۵)\}$ تابع نیست، زیرا در دو زوج‌مرتب $(۱,۶)$ و $(۱,۱۰)$ مؤلفه‌های اول با هم برابرند؛ اما مؤلفه‌های دوم با هم برابر نیستند.



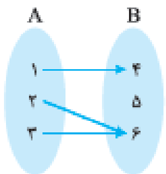
اما رابطهٔ $\{(۱,\sqrt{۳۶}),(۲,۵),(۱,۶)\}$ تابع است، زیرا در دو زوج‌مرتب $(۱,۶)$ و $(۱,\sqrt{۳۶})$ که مؤلفه‌های اولشان با هم برابر است، مؤلفه‌های دومشان نیز برابر است $(\sqrt{۳۶}=۶)$.

تست اگر رابطهٔ $\{(۲,a+۳),(۱,a-۱),(۲,۵),(۳,۲)\}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد. مقدار a کدام است؟

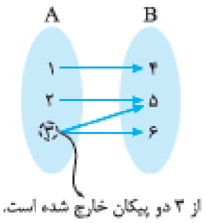
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ می‌رویم سراغ دو زوج‌مرتب $(۲,۵)$ و $(۲,a+۳)$ که مؤلفه‌های اولشان یکسان است. برای این‌که این رابطه تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم این دو زوج‌مرتب نیز با هم برابر باشند:
$$a+۳=۵ \Rightarrow a=۲$$

۲- نمایش پیکانی (نمایش با نمودار وِن): اگر رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را توسط نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که **از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.**

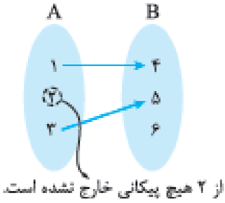


برای مثال، نمایش پیکانی روبه‌رو تابع است، زیرا از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان خارج شده است.



ولی نمایش پیکانی روبه‌رو، تابع نیست، زیرا از عضو «۳»، دو پیکان خارج شده است.

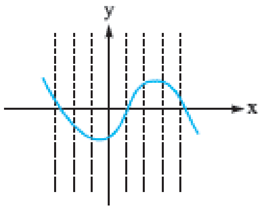
نمایش روبه‌رو هم تابع نیست، زیرا از عضو «۲»، هیچ پیکانی خارج نشده است.



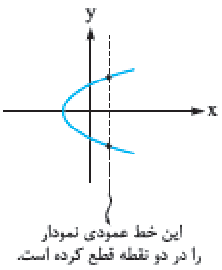
برای تشخیص تابع‌بودن در نمایش پیکانی، پیکان‌هایی که به مجموعهٔ B وارد می‌شوند مهم نیستند. یعنی اگر به عضوی از مجموعهٔ B هیچ پیکانی وارد نشود یا چندین پیکان وارد شود، مشکلی در تابع‌بودن پیش نمی‌آید. *(فقط اعضای مجموعهٔ A رو بپسب!)*

۳- نمایش مختصاتی (نمایش با نمودار): اگر نمودار یک رابطهٔ ریاضی بین x و y رسم شود، برای تشخیص این‌که، رابطهٔ مورد نظر تابع است یا نه، کافی است جملهٔ زیر را رعایت کنیم:

«اگر حتی یک خط موازی محور yها (یعنی یک خط عمودی) پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار، تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، آن نمودار، تابع است.»



برای مثال شکل مقابل نشان‌دهندهٔ یک تابع است، زیرا هر خطی موازی محور yها رسم کنیم، یا نمودار را قطع نمی‌کند یا حداکثر در یک نقطه آن را قطع می‌کند.



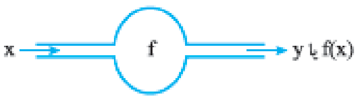
ولی شکل مقابل نشان‌دهندهٔ یک تابع نیست، زیرا خطی موازی محور yها پیدا می‌شود که نمودار را در بیش از یک نقطه (در این‌جا در دو نقطه) قطع کند.

ضابطهٔ جبری تابع

در بعضی توابع بین مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌مرتب‌ها، یک ضابطه (قانون) وجود دارد. برای مثال در تابع $f=\{(۱,۴),(۲,۵),(۴,۷),(-۱,۲),(۰/۵,۳/۵)\}$، مؤلفهٔ دوم هر زوج‌مرتب، ۳ واحد از مؤلفهٔ اول آن بیشتر است. در واقع اگر (x,y) عضو تابع f باشد، y سه واحد از x بیشتر است، یعنی $y=x+۳$. به معادلهٔ $y=x+۳$، ضابطهٔ جبری این تابع می‌گوییم و آن را به صورت $f(x)=x+۳$ هم می‌نویسیم.

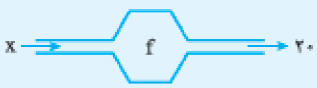
در واقع تابع مثل یک دستگاه عمل می‌کند:

- x وارد آن می‌شود.
- داخل این دستگاه یک سری بلا سر x می‌آید و نتیجه را به عنوان خروجی می‌دهد.
- به خروجی این دستگاه، y یا $f(x)$ می‌گوییم.



وقتی می‌نویسیم $y=f(x)$، یعنی y تابعی از x است. یعنی مقدار y بستگی به این دارد که مقدار x چه‌قدر باشد (y از x تبعیت می‌کند)؛ در واقع x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.

تست **دستگاه روبه‌رو، ورودی را ابتدا در ۳ ضرب کرده و سپس ۱ واحد از آن کم می‌کند و به خروجی می‌دهد. اگر عدد ۲۰ از دستگاه خارج شده باشد، مقدار ورودی کدام است؟**



۱) ۷   ۲) ۸   ۳) ۵۹   ۴) ۵۷

پاسخ **گزینهٔ ۱** ابتدا باید ضابطهٔ تابع را به دست آوریم. این تابع ورودی (x) را ابتدا در ۳ ضرب می‌کند $(۳x)$ و سپس یک واحد از آن کم می‌کند $(۳x-۱)$ و به خروجی می‌دهد؛ یعنی ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=۳x-۱$ است. حالا اگر خروجی ۲۰ باشد، یعنی $۳x-۱=۲۰$ است، پس:

$$۳x-۱=۲۰ \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۳}=۷$$

پس ورودی $x=۷$ بوده است.

مقدار تابع در یک نقطه

در تابع $y=f(x)$، برای آن‌که مقدار تابع f را به ازای $x=a$ به دست آوریم، کافی است در ضابطهٔ تابع جای تمام xها، عدد a را قرار دهیم. مقدار تابع f در نقطهٔ $x=a$ را با $f(a)$ نشان می‌دهیم.

تست **اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۷}$ باشد، حاصل $f(۴)-f(۲\sqrt{۲})$ کدام است؟** (خارج ۹۵)

۱) ۱   ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ ۳** اول $f(۴)$ را حساب می‌کنیم. باید جای x عدد ۴ را قرار دهیم.

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۷} \Rightarrow f(۴)=\sqrt{۴^۲-۷}=\sqrt{۱۶-۷}=\sqrt{۹}=۳$$

حالا $f(۲\sqrt{۲})$ را حساب می‌کنیم. این بار باید جای x عدد $۲\sqrt{۲}$ را قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۷} \Rightarrow f(۲\sqrt{۲})=\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲-۷}=\sqrt{(۴\times ۲)-۷}=\sqrt{۸-۷}=\sqrt{۱}=۱$$

حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$f(۴)-f(۲\sqrt{۲})=۳-۱=۲$$

دامنه و برد یک تابع

گفتیم تابع مثل یک دستگاه است که ورودی می‌گیرد و خروجی می‌دهد.

دامنه: در تابع f، مجموعهٔ همهٔ مقدارهایی که متغیر مستقل (x) می‌تواند بگیرد را دامنهٔ f می‌گوییم. در واقع دامنهٔ f، مجموعهٔ همهٔ ورودی‌های تابع f است که با D_f نشان می‌دهیم.

بُرد: در تابع f، مجموعهٔ همهٔ مقدارهایی که متغیر وابسته (y) می‌تواند بگیرد را بُرد f می‌گوییم. در واقع بُرد f، مجموعهٔ همهٔ خروجی‌های تابع f است که با R_f نشان می‌دهیم.

تعیین دامنه و برد در نمایش‌های مختلف یک تابع

۱- نمایش زوج‌مرتبی: در نمایش زوج‌مرتبی، مجموعهٔ همهٔ **مؤلفه‌های اول برابر دامنه** و مجموعهٔ همهٔ **مؤلفه‌های دوم برابر برد** تابع است.

به عنوان مثال در تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۴,۳)\}$، دامنه و برد برابر است با:

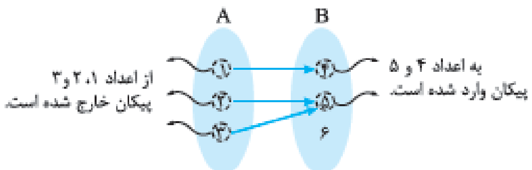
$D_f=\{\text{همهٔ مؤلفه‌های اول } f\}=\{۱,۲,۴\}$, $R_f=\{\text{همهٔ مؤلفه‌های دوم } f\}=\{۳,۵,۳\}=\{۳,۵\}$

۲- نمایش پیکانی (نمودار وِن): در نمایش پیکانی، مجموعهٔ همهٔ اعضایی که **پیکان از آن‌ها خارج شده است، برابر دامنه** و مجموعهٔ همهٔ اعضایی که **پیکان به آن‌ها وارد شده برابر بُرد** است.

به عنوان مثال دامنه و برد تابع نمایش پیکانی روبه‌رو را می‌نویسیم:

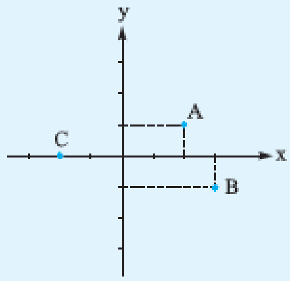
$D_f=\{\text{همهٔ اعدادی که پیکان از آن‌ها خارج شده}\}=\{۱,۲,۳\}$

$R_f=\{\text{همهٔ اعدادی که پیکان به آن‌ها وارد شده}\}=\{۴,۵\}$



۳- نمایش مختصاتی: در نمایش مختصاتی، مجموعهٔ **طول (x) همهٔ نقاط برابر دامنه** و مجموعهٔ **عرض (y) نقاط برابر برد** است.

مثال **دامنه و برد تابع روبه‌رو را بنویسید.**



پاسخ مختصات نقاط تشکیل‌دهندهٔ تابع را می‌نویسیم:

$A=(۲,۱), B=(۳,-۱), C=(-۲,۰)$

مجموعهٔ شامل xهای نقاط بالا، دامنهٔ تابع است:

$D_f=\{۲,۳,-۲\}$

مجموعهٔ شامل yهای نقاط بالا، برد تابع است:

$R_f=\{۱,-۱,۰\}$

مثال اگر $f(x)=x^2-1$ و $D_f=\{-1,1,2\}$ باشد، برد f را تعیین کنید.

پاسخ برد f خروجی‌هایی است که تابع f به ازای ورودی‌هایش (یعنی اعضای دامنه که شامل ۱، ۱- و ۲ هستند) تولید می‌کند؛ پس باید تک‌تک اعضای دامنه را جای x در ضابطهٔ $f(x)=x^2-1$ قرار دهیم و خروجی‌هایشان را پیدا کنیم. مجموعهٔ این خروجی‌ها برابر برد است.

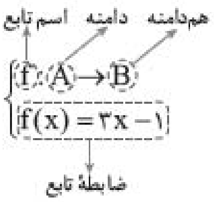
$f(1)=1^2-1=1-1=0 \Rightarrow$ خروجی برابر ۰ است.

$f(-1)=(-1)^2-1=1-1=0 \Rightarrow$ خروجی برابر ۰ است.

$f(2)=2^2-1=4-1=3 \Rightarrow$ خروجی برابر ۳ است.

خروجی‌های این تابع فقط اعداد ۰ و ۳ هستند؛ پس برد این تابع مجموعهٔ $R_f=\{0,3\}$ است.

نمایش تابع با ضابطه به صورت کامل!



در نمایش تابع f با ضابطه که به صورت کامل به شکل روبه‌رو است، باید بدانیم:

- اسم تابع f است.
- دامنهٔ آن مجموعهٔ A است.
- به B هم‌دامنهٔ تابع می‌گوییم نه برد آن. بدانید که برد همواره زیرمجموعهٔ هم‌دامنه است.
- در خط دوم هم ضابطهٔ تابع نوشته می‌شود که در این‌جا برای مثال $f(x)=3x-1$ آمده است؛ یعنی می‌گوید هر کدام از اعضای دامنه (A) که وارد تابع می‌شوند، «سه برابر آن منهای یک» از آن خارج می‌شوند.

تست تابع $\begin{cases} f:\{-1,4\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2+1 \end{cases}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\{(-1,4)\}$ ۲) $\{(-1,2),(4,17)\}$ ۳) $\{(-1,4),(4,-1)\}$ ۴) $\{(-1,0),(4,17)\}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** در این‌جا دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $\{-1,4\}$ است، پس اعداد ۱- و ۴ حق ورود به تابع f را دارند. این دو عدد را جای x در ضابطهٔ $f(x)=x^2+1$ قرار می‌دهیم تا ببینیم چه اعدادی از آن خارج می‌شوند:

$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2 \xrightarrow{\text{به ازای } x=-1 \text{ عدد ۲ خارج می‌شود.}}$ پس زوج‌مرتب $(-1,2)$ عضو f است.

$f(4)=4^2+1=16+1=17 \xrightarrow{\text{به ازای } x=4 \text{ عدد ۱۷ خارج می‌شود.}}$ پس زوج‌مرتب $(4,17)$ عضو f است.

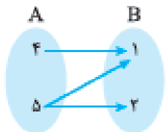
در نتیجه تابع f دارای دو زوج‌مرتب $(-1,2)$ و $(4,17)$ است و آن را به صورت $f=\{(-1,2),(4,17)\}$ می‌توانیم بنویسیم.

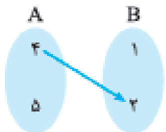
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

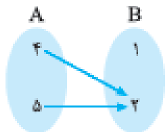
۱- اگر رابطهٔ $f=\{(1,5),(2,1-a),(-3,a),(2,6),(1,2b-1)\}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد، حاصل $2a-b$ کدام است؟

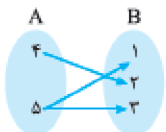
۱) ۱۳- ۲) ۱۳ ۳) ۱- ۴) ۱

۲- کدام‌یک از نمودارهای پیکانی زیر نشان‌دهندهٔ یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B است؟

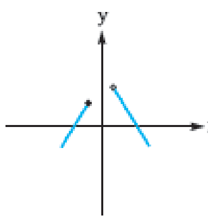
۱) 

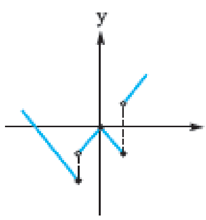
۲) 

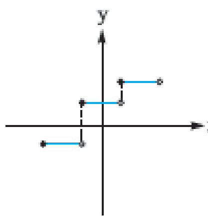
۳) 

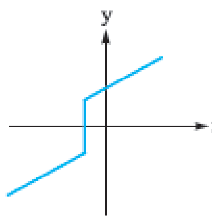
۴) 

۳- کدام‌یک از نمودارهای زیر نشان‌دهندهٔ یک تابع نیست؟

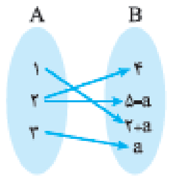
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴- اگر نمودار پیکانی روبه‌رو نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟



۱) -1 ‏ ۲) 1 ‏ ۳) 3 ‏ ۴) -3

۵- تابع f به هر عدد حقیقی، ۳ برابر مجذور همان عدد به علاوهٔ ۱ را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ f کدام است؟

۱) $f(x)=3x^2+1$ ‏ ۲) $f(x)=3(x+1)^2$ ‏ ۳) $f(x)=3\sqrt{x}+1$ ‏ ۴) $f(x)=3\sqrt{x+1}$

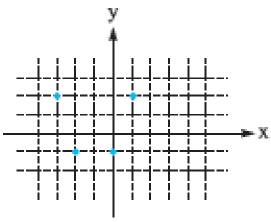
۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x+3$ حاصل $f(1+\sqrt{2})-f(2)$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) 1 ‏ ۲) 2 ‏ ۳) 3 ‏ ۴) 4

۷- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$ باشد، مقدار $f(3+2\sqrt{6})$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) 4 ‏ ۲) 5 ‏ ۳) $2+\sqrt{6}$ ‏ ۴) 6

۸- برد تابع مقابل کدام مجموعه است؟



۱) $\{-3,-2,0,1\}$

۲) $\{0,2\}$

۳) $\{-3,-2,1\}$

۴) $\{-1,2\}$

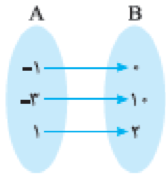
۹- در تابع $\begin{cases} f:\{-2,3\} \to \mathbb{R} \\ f(x)=-2x+3 \end{cases}$، برد تابع کدام است؟

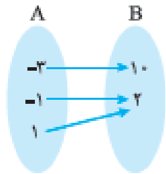
۱) $\{-2,3\}$ ‏ ۲) $\{-3,7\}$ ‏ ۳) $\{-1,-3\}$ ‏ ۴) $\{7,9\}$

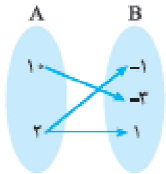
۱۰- در تابع $\begin{cases} f:A \to B \\ f(x)=4x+1 \end{cases}$، اگر برد تابع، مجموعهٔ $\{-7,13\}$ باشد، مجموعهٔ A کدام است؟

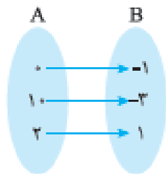
۱) $\{-2,3\}$ ‏ ۲) $\{2,3\}$ ‏ ۳) $\{-2,-3\}$ ‏ ۴) $\{2,-3\}$

۱۱- تابع $\begin{cases} f:\{-1,-3,1\} \to \mathbb{R} \\ f(x)=x^2+1 \end{cases}$ با کدام تابع زیر برابر است؟

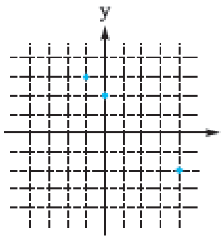
۱) 

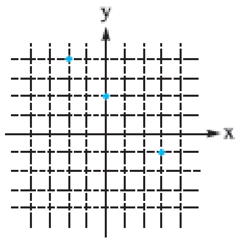
۲) 

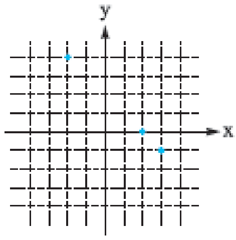
۳) 

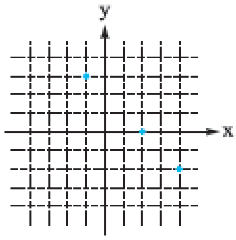
۴) 

۱۲- نمودار تابع $\begin{cases} f:\{-2,2,3\} \to \mathbb{R} \\ f(x)=2-x \end{cases}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

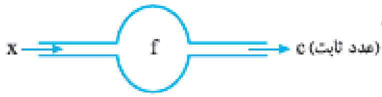
۳) 

۴) 

تابع ثابت

به تابعی که ضابطه‌اش به صورت $f(x)=c$ (که c عددی ثابت است) باشد، **تابع ثابت** می‌گوییم. برای مثال توابع $f(x)=1$ ، $f(x)=-2/5$ و $f(x)=\sqrt{3}$ همگی توابعی ثابت هستند.

در واقع تابع ثابت، دستگاهی است که به ازای همهٔ ورودی‌ها (x هر عددی که باشد)، فقط و فقط یک عدد را به عنوان خروجی به ما می‌دهد.



برد تابع ثابت $f(x)=c$ فقط یک عضو دارد و آن هم c است. $R_f=\{c\}$

تست **اگر برد تابع ثابت f برابر با مجموعهٔ $R_f=\{۶,a+۲\}$ و زوج‌مرتب $(۳,۳b-۹)$ عضو f باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟**

۱) -۱ ۲) ۱   ۳) -۹ ۴) ۹

پاسخ گزینهٔ ۱ چون تابع f ثابت است، برد آن فقط یک عضو دارد. سؤال گفته برد f، مجموعهٔ $\{۶,a+۲\}$ است، برای این‌که این مجموعه تک‌عضوی باشد، باید $a+۲$ و ۶ برابر باشند: $a+۲=۶ \Rightarrow a=۴$

پس تابع f فقط عدد ۶ را به عنوان خروجی به ما می‌دهد. زوج‌مرتب $(۳,۳b-۹)$ عضو تابع است؛ یعنی به ازای ورودی ۳، خروجی $۳b-۹$ است که این خروجی باید برابر با ۶ باشد: $۳b-۹=۶ \Rightarrow ۳b=۱۵ \Rightarrow b=۵$

پس $a-b$ برابر است با: $a-b=۴-۵=-۱$

نمایش‌های مختلف یک تابع ثابت

۱- نمایش زوج‌مرتبی: نمایش زوج‌مرتبی یک تابع زمانی نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است که **مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج‌مرتب‌ها با هم برابر باشند.** مثلاً تابع $f=\{(۱,۲),(-۳,۲),(۰,۲),(۷,۲)\}$ تابعی ثابت است، زیرا مؤلفهٔ دوم تمام زوج‌مرتب‌های آن ۲ است.

تست **اگر تابع $f=\{(۲,-۱),(۳,۵a+۹),(-۲,b+۳)\}$، تابعی ثابت باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟**

۱) ۲   ۲) -۲ ۳) ۶   ۴) -۶

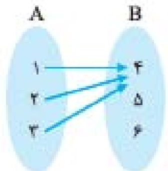
پاسخ گزینهٔ ۱ f تابعی ثابت است، پس باید مؤلفه‌های دوم تمام زوج‌مرتب‌های آن با هم برابر باشند. مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌ها برابر با -۱، $۵a+۹$ و $b+۳$ هستند، پس $b+۳$ و $۵a+۹$ را باید با -۱ برابر قرار دهیم:

$b+۳=-۱ \Rightarrow b=-۴$

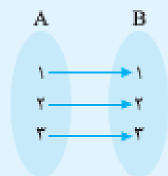
$۵a+۹=-۱ \Rightarrow ۵a=-۱۰ \Rightarrow a=-۲$

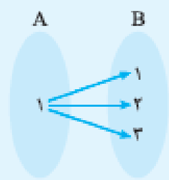
در نتیجه $a-b$ برابر است با: $a-b=-۲-(-۴)=۲$

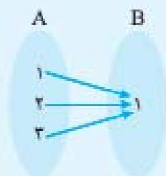
۲- نمایش پیکانی: نمایش پیکانی یک تابع زمانی نشان‌دهندهٔ تابع ثابت است که **همهٔ پیکان‌ها به یک عضو از مجموعهٔ B وارد شده باشند**؛ مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است؛ زیرا تمام پیکان‌ها به عضو ۴ از مجموعهٔ B وارد شده‌اند:

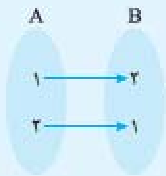


تست **کدام گزینه نمایش یک تابع ثابت از مجموعهٔ A به B است؟**

۱)


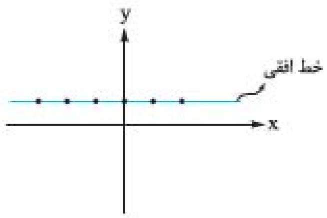
۲)


۳)


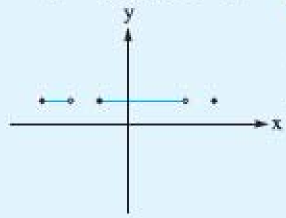
۴)


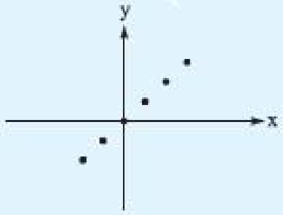
پاسخ گزینهٔ ۳ نمایش پیکانی یک تابع، زمانی نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است که تمام پیکان‌ها به یک عضو از مجموعهٔ B وارد شوند. تنها گزینه‌ای که این ویژگی را دارد، ۳ است. ضمناً می‌دانیم که ۲ اصلاً تابع نیست.

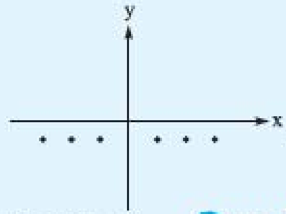
۳- نمایش مختصاتی: نمایش مختصاتی یک تابع زمانی نشان‌دهندهٔ تابع ثابت است که **همهٔ نقاط آن تابع روی یک خط افقی قرار داشته باشند.** به عنوان مثال تابع زیر، یک تابع ثابت است، زیرا تمام نقاط تشکیل‌دهندهٔ آن روی یک خط افقی $(y=۱)$ قرار دارند:

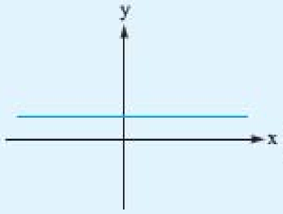


تست کدام‌یک از توابع زیر نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ گزینهٔ ۲ تمام نقاط تشکیل‌دهندهٔ توابع ۱، ۳ و ۴ روی یک خط افقی قرار دارند، پس تابع ثابت محسوب می‌شوند. نقاط تابع ۲، روی یک خط افقی قرار ندارند، پس این تابع، ثابت محسوب نمی‌شود.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

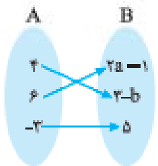
۱۳- اگر تابع $f=\{(-۳,۲),(۵,a+۷)\}$ تابعی ثابت باشد، a کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۵ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۴- اگر برد تابع $f=\{(۲b,a+۳),(-a+۱,۵),(۳a+۱,b)\}$ دارای یک عضو باشد، دامنهٔ آن کدام است؟

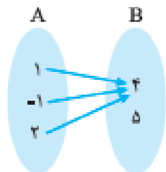
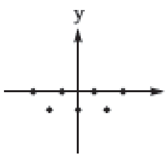
۱) $\{۲,۵\}$ ۲) $\{-۱,۲,۷\}$ ۳) $\{۲,۵,۱۰\}$ ۴) $\{-۱,۷,۱۰\}$

۱۵- اگر تابع روبه‌رو تابعی ثابت باشد، کدام گزینه برابر با صفر است؟



۱) $۲a+۳b$
۲) $۲a-۳b$
۳) $۳a+۲b$
۴) $۳a-۲b$

۱۶- کدام گزینه نمایش یک تابع ثابت نیست؟

۱) $f(x)=\frac{۱}{۲}$ ۲)  ۳)  ۴) $\{(۲,-۱),(۷,-۱),(\sqrt{۳},-۱)\}$

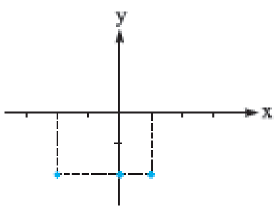
۱۷- تابع $\begin{cases} f:\{-۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۱\end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\{(-۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$ ۲) $\{(۲,۱),(۱,-۱),(۳,۱)\}$
۳) $\{(-۱,۲),(۳,۱)\}$ ۴) $\{(-۱,۲),(۲,۳),(۳,-۱)\}$

۱۸- اگر تابع $f=\{(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳)\}$ تابعی ثابت باشد، واریانس اعداد $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $y_۱$ ۳) $\sqrt{y_۱^۲+y_۲^۲+y_۳^۲}$ ۴) $y_۱y_۲y_۳$

۱۹- نمودار روبه‌رو مربوط به تابع با کدام ضابطه است؟



۱) $\begin{cases} f:\{-۲,۱\}\to\{-۲\} \\ f(x)=۲\end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=-۲\end{cases}$

۳) $\begin{cases} f:\{-۲,۰,۱\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=-۲\end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f:\{-۲\}\to\{-۲,۰,۱\} \\ f(x)=۲\end{cases}$

۲۰- اگر $f=\{(-۱,b^۲-۲b),(a-۴,۳),(a+b,c)\}$ یک تابع ثابت با دامنهٔ دوعضوی باشد، مقدار $a+b$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۴

توابع چندضابطه‌ای

توابعی که تاکنون دیدیم همگی از یک ضابطه برای کل دامنه‌شان استفاده می‌کردند؛ اما توابعی هم هستند که برای قسمت‌های مختلف دامنه‌شان از ضابطه‌های مختلفی استفاده می‌کنند، مثل تابع روبه‌رو:
$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & -۲\le x<۱ \\ x+۲ & ۱\le x\le ۳ \end{cases}$$

دامنهٔ این تابع اجتماع دو محدودهٔ $-۲\le x<۱$ و $۱\le x\le ۳$ است که برابر با محدودهٔ $-۲\le x\le ۳$ است.

این تابع به ازای ورودی‌های در محدودهٔ $-۲\le x<۱$، از ضابطهٔ $y=x-۱$ و به ازای ورودی‌های در محدودهٔ $۱\le x\le ۳$ از ضابطهٔ $y=x+۲$ خروجی می‌دهد؛ یعنی اگر عددی در محدودهٔ $-۲\le x<۱$ وارد تابع شود، آن را جای x در ضابطهٔ $y=x-۱$ قرار می‌دهیم و مقدار به دست آمده را به عنوان خروجی می‌گیریم و اگر عددی در محدودهٔ $۱\le x\le ۳$ وارد تابع شود، آن را جای x در ضابطهٔ $y=x+۲$ قرار می‌دهیم و مقدار به دست آمده را به عنوان خروجی می‌گیریم.

در واقع اگر $-۲\le x<۱$ بود، $f(x)=x-۱$ است و اگر $۱\le x\le ۳$ بود، $f(x)=x+۲$ است.

به این توابع که بیش از یک ضابطه دارند، **توابع چندضابطه‌ای** می‌گوییم. تابعی که مثال زدیم، دارای دو ضابطه بود، پس یک تابع دوضابطه‌ای است.

هر کدام از ضابطه‌های یک تابع چندضابطه‌ای می‌توانند یک عدد ثابت هم باشند.

تست در تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\ge ۰ \\ ۱ & x<۰ \end{cases}$، مقدار $f(۵)-f(-۲)$ کدام است؟

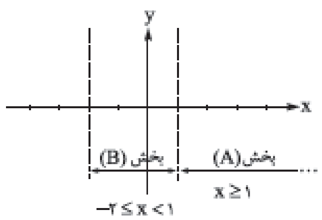
۱) ۱۴ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ ۳ $f(۵)$ یعنی مقدار تابع به ازای ورودی $x=۵$، دامنهٔ ضابطهٔ اول $x\ge ۰$ است که شامل $x=۵$ هم می‌شود؛ پس برای محاسبهٔ $f(۵)$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم:
$$x\ge ۰: f(x)=۲x \Rightarrow f(۵)=۲(۵)=۱۰$$
$f(-۲)$ یعنی مقدار تابع به ازای ورودی $x=-۲$. دامنهٔ ضابطهٔ دوم $x<۰$ است که شامل $x=-۲$ هم می‌شود، پس برای محاسبهٔ $f(-۲)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم. چون ضابطهٔ دوم یک تابع ثابت است، پس به ازای هر عددی که وارد آن شود، خروجی‌اش برابر ۱ است:
$$x<۰: f(x)=۱ \Rightarrow f(-۲)=۱$$
مقدار خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:
$$f(۵)-f(-۲)=۱۰-۱=۹$$

نمودار توابع چندضابطه‌ای

برای رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای، هر کدام از بخش‌های مختلف دامنه را روی محور xها مشخص می‌کنیم. سپس نمودار ضابطهٔ هر بخش (فقط آن قسمتی که در محدودهٔ آن بخش قرار دارد) را رسم می‌کنیم.

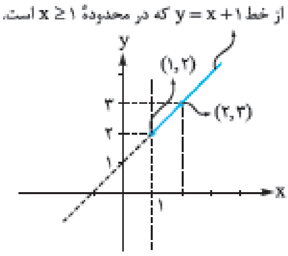
به عنوان مثال برای رسم تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\ge ۱ \\ x-۲ & -۲\le x<۱ \end{cases}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



- اول محدوده‌های $x\ge ۱$ و $-۲\le x<۱$ را روی محور xها با خط‌چین‌های عمودی مشخص می‌کنیم:

تذکر منظور از بخش (A) محدودهٔ مربوط به ضابطهٔ بالا و منظور از بخش (B) محدودهٔ مربوط به ضابطهٔ پایین است.

- دامنهٔ بخش (A)، $x\ge ۱$ است. ضابطهٔ f هم به ازای $x\ge ۱$ برابر $y=x+۱$ است. نمودار $y=x+۱$ یک خط است. آن را رسم می‌کنیم. قسمت‌هایی از این نمودار که در بخش (A) می‌گنجند را نگه می‌داریم و بقیه را پاک می‌کنیم:



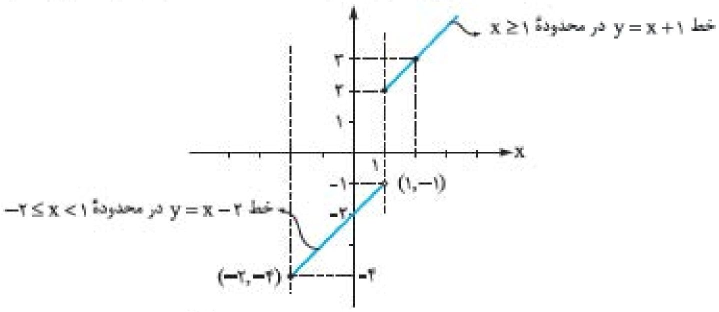
برای رسم خط هم نیاز به دو نقطه از خط داریم. بهتر است xها را در محدودهٔ $x\ge ۱$ بدهیم؛ یکی را لب مرز یعنی خود $x=۱$ و یکی را هم $x=۲$ می‌دهیم:

x	۱	۲
$y=x+۱$	۲	۳
(x,y)	$(۱,۲)$	$(۲,۳)$

دقت کنید نقطهٔ $(۱,۲)$ توپُر است؛ زیرا دامنهٔ این بخش $x\ge ۱$ بود که شامل خود $x=۱$ هم می‌باشد.

- دامنهٔ بخش (B)، $-۲ \le x < ۱$ است، ضابطهٔ f هم به ازای $-۲ \le x < ۱$، برابر $y = x - ۲$ است. نمودار $y = x - ۲$ یک خط است. آن را رسم می‌کنیم. قسمت‌هایی از این نمودار که در بخش (B) می‌گنجند را نگه می‌داریم و بقیه را پاک می‌کنیم.

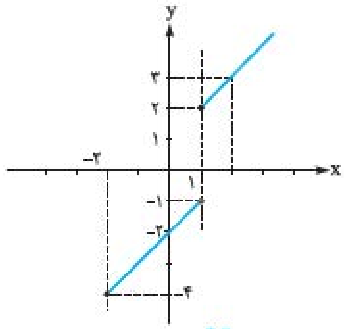
همان‌طور که گفتیم برای رسم خط نیاز به دو نقطه از خط داریم. در این‌جا بهتر است جای x اعداد اول و آخر محدودهٔ $-۲ \le x < ۱$ یعنی ۱ و ۲− را بدهیم:



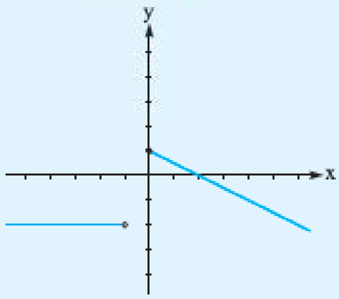
x	۱	−۲
$y = x - ۲$	−۱	−۴
(x, y)	$(۱, -۱)$	$(-۲, -۴)$

دقت کنید نقطهٔ $(۱, -۱)$ توخالی است، زیرا دامنهٔ این بخش $-۲ \le x < ۱$ است که شامل خود $x = ۱$ نمی‌شود؛ ولی نقطهٔ $(-۲, -۴)$ توپُر است، زیرا دامنهٔ این بخش $-۲ \le x < ۱$ است که شامل خود $x = -۲$ هم می‌شود.

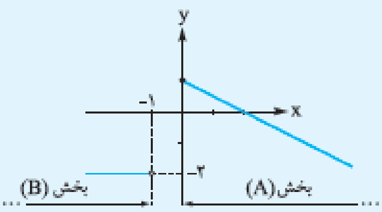
بد نیست یک بار نمودار این تابع را بدون اضافات ببینیم!



مثال **برای نمودار تابع روبه‌رو، یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید.**



پاسخ تابع رسم‌شده دارای دو بخش است؛ پس دو ضابطه دارد. آن را به دو بخش (A) و (B) قسمت می‌کنیم:



- بخش (A) یک خط است که از دو نقطهٔ $(۰, ۱)$ و $(۲, ۰)$ می‌گذرد، باید معادلهٔ این خط را بنویسیم. ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ - ۱}{۲ - ۰} = -\frac{۱}{۲}$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً نقطهٔ $(۲, ۰)$)، معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

$$\Rightarrow y - ۰ = -\frac{۱}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۱$$

پس برای $x \ge ۰$، از ضابطهٔ $y = -\frac{۱}{۲}x + ۱$ خروجی می‌گیریم. (دقت کنید چون نقطهٔ $(۰, ۱)$ توپُر بود، در دامنه، علامت بزرگ‌تر یا مساوی را قرار دادیم.)

- بخش (B) یک خط افقی است. ضابطهٔ هر خط افقی در حالت کلی به صورت «$y =$ عدد» است که در این‌جا به صورت $y = -۲$ است.

پس برای $x < -۱$، از ضابطهٔ $y = -۲$ خروجی می‌گیریم. (دقت کنید چون نقطهٔ $(-۱, -۲)$ توخالی بود، در دامنه علامت کوچک‌تر یا مساوی قرار ندادیم) پس ضابطهٔ f به صورت روبه‌رو است:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x + ۱ & x \ge ۰ \\ -۲ & x < -۱ \end{cases}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۱- اگر $f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x\geq ۲\\ ۲+۴x & x<۲\end{cases}$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۶ ۴) ۶-

۲۲- در تابع $f(x)=\begin{cases}x & x<-۱\\ x^{۲} & -۱\leq x\leq ۲\\ ۵ & x>۲\end{cases}$، مقدار $f(۳)+f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۳- در تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۳ & x\leq -۱\\ x^{۲} & -۱<x\leq ۲\\ x & x>۲\end{cases}$، مقدار $f(-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۳})+f(\sqrt{۸})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۴- تابع f به ازای اعداد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن عدد و به ازای اعداد کوچک‌تر از ۲، نصف آن عدد را به عنوان خروجی بیرون می‌دهد. مقدار $f(۳)+f(-۸)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

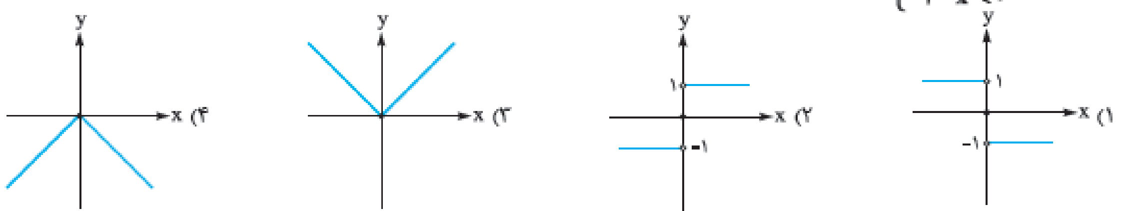
۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}۱ & x\geq ۰\\ ۲ & x<۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f(a^{۲})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $a^{۲}$

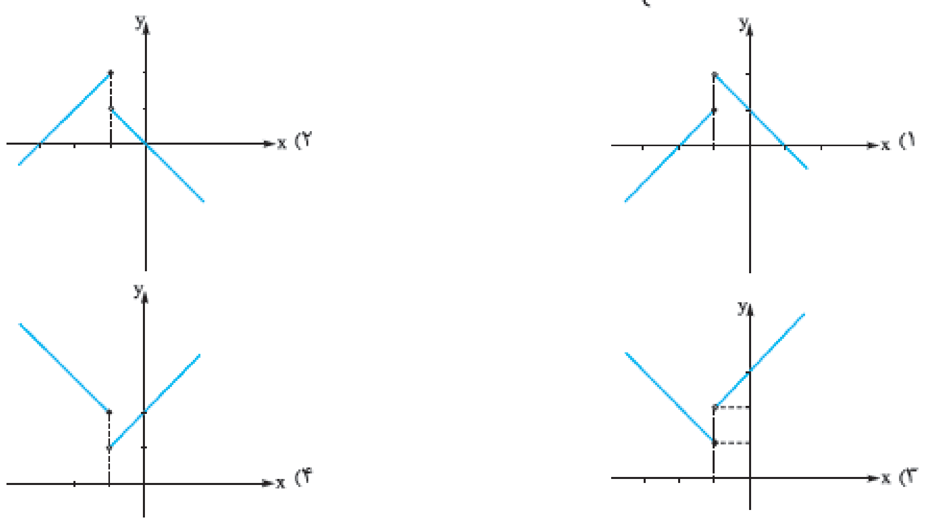
۲۶- در تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\geq ۱\\ x-۲ & x<۱\end{cases}$، اگر $f(a)=۵$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) فقط ۹ ۲) فقط ۳ ۳) فقط ۷ ۴) ۳ یا ۷

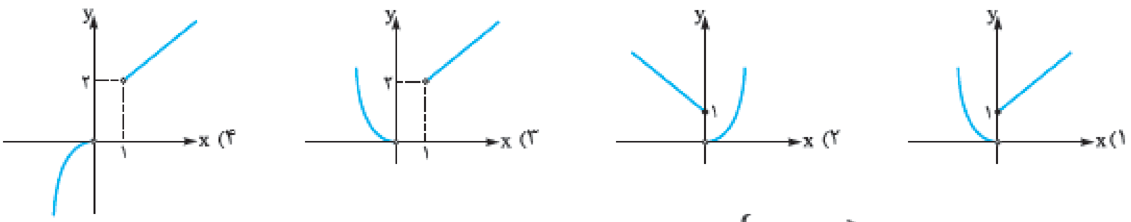
۲۷- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟



۲۸- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>-۱\\ x+۲ & x\leq -۱\end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟



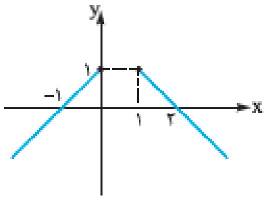
۲۹- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ به کدام صورت است؟



۳۰- کدام‌یک از خط‌های زیر، تابع $f(x)=\begin{cases} -x & x\geq ۰ \\ ۲-x & x<۰ \end{cases}$ را قطع <u>نمی‌کند</u>؟

۱) $y=-۲$ ۲) $y=-۱$ ۳) $y=۰$ ۴) $y=۱$

۳۱- کدام گزینه ضابطهٔ تابع رسم‌شده را نشان می‌دهد؟

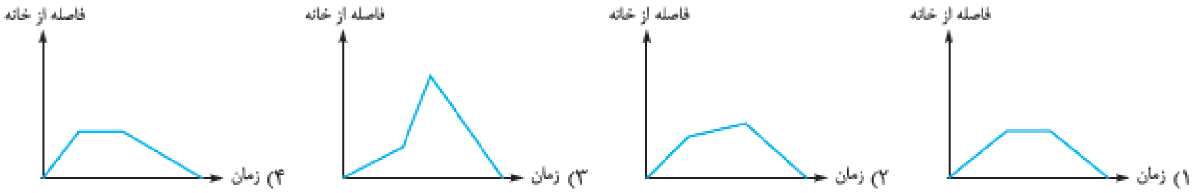


۱) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\leq ۰ \\ x-۲ & x\geq ۱ \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} -x+۱ & x\leq ۱ \\ x-۲ & x\geq ۱ \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} -x+۱ & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x\geq ۱ \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\leq ۰ \\ -x+۲ & x\geq ۱ \end{cases}$

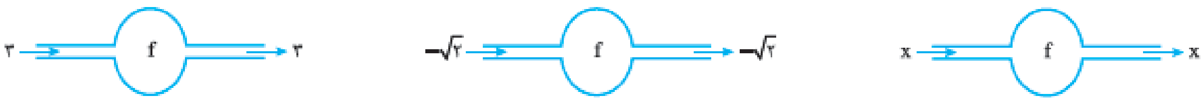
۳۲- کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند مربوط به داستان زیر باشد؟

«بهزاد برای قدم‌زدن از خانه خارج شده است. در ابتدا آهسته قدم می‌زند و سپس سرعتش را بیشتر می‌کند تا به پارک برسد. سپس از مسیری که آمده بود برمی‌گردد و به خانه می‌رسد.»



تابع همانی

به تابعی که ضابطه‌اش $f(x)=x$ باشد، **تابع همانی** می‌گوییم. در واقع تابع همانی، دستگاهی است که هر عددی که واردش شود، همان عدد را به عنوان خروجی می‌دهد.



در تابع همانی، هر عضوی از دامنه که وارد تابع شود، دقیقاً همان عضو از تابع خارج می‌شود، پس دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است:

$$D_f=R_f$$

برای مثال اگر تابع همانی $f(x)=x$، دامنه‌اش $D_f=\{-۱,۰,۲\}$ باشد، بردش هم $R_f=\{-۱,۰,۲\}$ است.

تست **اگر در تابع همانی f، $D_f=\{۱,۵,a\}$ و $R_f=\{b,۱,۸\}$ باشند، حاصل $b-a$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ **گزینهٔ ۴** تابع f همانی است، پس مجموعهٔ دامنه و برد آن با هم برابرند: $D_f=R_f \Rightarrow \{۱,۵,a\}=\{۱,b,۸\}$

عضو ۱ در هر دو مجموعه وجود دارد. عضو ۸ فقط در R_f دیده می‌شود، پس برای آن‌که در D_f هم عضو ۸ را داشته باشیم، a باید برابر ۸ باشد $(a=۸)$، پس D_f به صورت $D_f=\{۱,۵,۸\}$ در می‌آید.

از مقایسهٔ $D_f=\{۱,۵,۸\}$ با $R_f=\{۱,b,۸\}$ نتیجه می‌گیریم که b هم باید ۵ باشد $(b=۵)$، پس $b-a$ برابر است با:

$$b-a=۵-۸=-۳$$

نمایش‌های مختلف تابع همانی

۱- نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، در هر زوج مرتب، **مؤلفهٔ اول و دوم با هم برابرند**؛ مثلاً تابع $f=\{(۲,۲),(-۴,-۴),(\sqrt{۳},\sqrt{۳})\}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع همانی است.

تست در تابع همانی $f=\{(۱,a),(b,۳),(b+۲,c)\}$، میانگین a، b و c کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳ در تابع همانی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج‌مرتب با هم برابرند، پس:

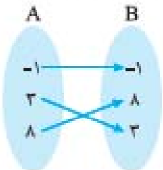
$(۱,a)$ در زوج مرتبِ $\Rightarrow ۱=a$

$(b,۳)$ در زوج مرتبِ $\Rightarrow b=۳$

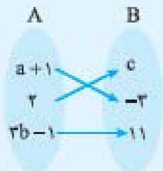
$(b+۲,c)$ در زوج مرتبِ $\Rightarrow b+۲=c \xrightarrow{b=۳} ۳+۲=c \Rightarrow c=۵$

میانگین a، b و c برابر است با: $\dfrac{a+b+c}{۳}=\dfrac{۱+۳+۵}{۳}=\dfrac{۹}{۳}=۳$

۲- نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی، باید از هر عدد از مجموعهٔ A به همان عدد از مجموعهٔ B پیکان وارد شود. در واقع **اعداد سر و ته هر پیکان باید با هم برابر باشند**؛ مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو، نشان‌دهندهٔ یک تابع همانی است.



تست اگر تابع روبه‌رو یک تابع همانی باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ همان‌طور که گفتیم، در نمایش پیکانی تابع همانی، اعداد سر و ته هر پیکان باید با هم برابر باشند، پس:

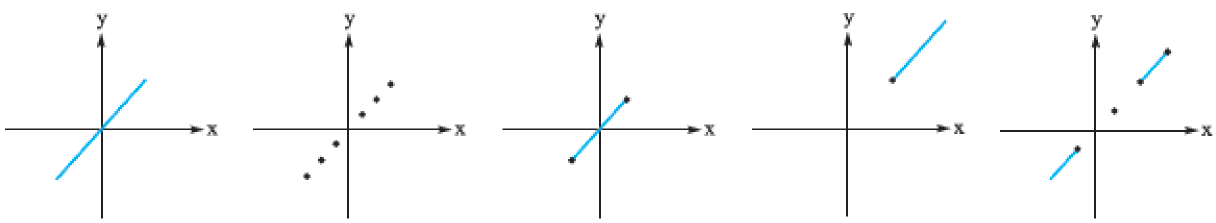
$a+۱=-۳ \Rightarrow a=-۴$

$۲=c \Rightarrow c=۲$

$۲b-۱=۱۱ \Rightarrow ۲b=۱۲ \Rightarrow b=۶$

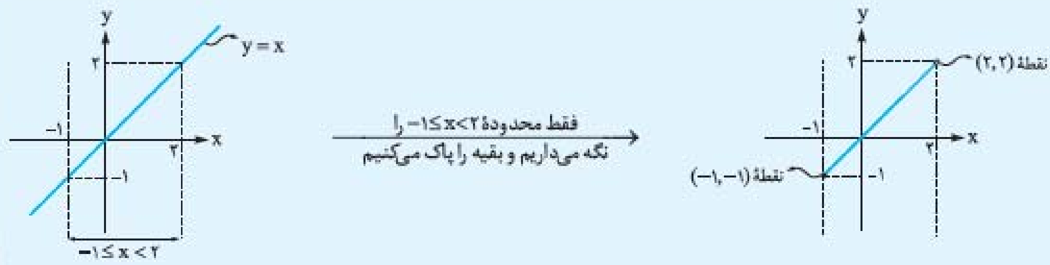
پس $a+b+c$ برابر است با: $a+b+c=-۴+۶+۲=۴$

۳- نمایش مختصاتی: همان‌طور که گفتیم ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است، پس نمودار این تابع حتماً روی خط $y=x$ قرار دارد که می‌تواند «کل خط»، «یک یا چند نقطه روی این خط»، «یک یا چند پاره‌خط روی این خط» و ... باشد. به عنوان مثال تمام توابع رسم‌شده در زیر، تابع همانی هستند، زیرا کل نمودارشان روی خط $y=x$ قرار دارد.



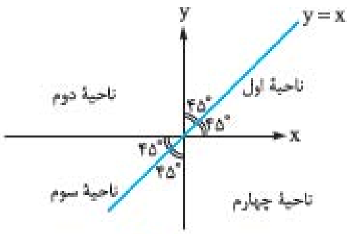
مثال نمودار تابع همانی g با دامنهٔ $-۱\le x<۲$ را رسم کنید.

پاسخ تابع g همانی است، پس ضابطه‌اش به صورت $g(x)=x$ است. دامنهٔ این تابع $-۱\le x<۲$ است؛ یعنی فقط xهایی که در محدودهٔ $-۱\le x<۲$ هستند را می‌پذیرد. برای رسم نمودار این تابع، خط $y=x$ را رسم می‌کنیم منتها فقط آن قسمتی را که در محدودهٔ دامنه یعنی $-۱\le x<۲$ قرار دارد نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم.



دقت کنید چون $x=۲$ در محدودهٔ $-۱ \le x < ۲$ نیست، نقطهٔ $(۲,۲)$ توخالی و چون $x=-۱$ در این محدوده است، نقطهٔ $(-۱,-۱)$ توپُر شد.

هر زوج‌مرتبی که عضو تابع همانی $f(x)=x$ باشد، روی خط $y=x$ قرار دارد. خط $y=x$ از لحاظ هندسی، نیمساز ناحیه‌های اول و سوم است. (البته می‌دانید که خط $y=-x$ هم نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم است.)



تست نقطهٔ $A=(-۱,a^۲+۲a)$ روی نیمساز ناحیهٔ سوم قرار دارد. مقدار a کدام است؟

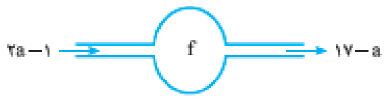
۱) ۲　　۲) -۲　　۳) ۱　　۴) -۱

پاسخ گزینهٔ ۴ نیمساز ناحیهٔ سوم، خط $y=x$ است. هر نقطه‌ای که روی این خط باشد، x و y آن با هم برابرند؛ پس برای آن‌که نقطهٔ $(\underbrace{-۱}_{x},\underbrace{a^۲+۲a}_{y})$ روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، باید -۱ با $a^۲+۲a$ برابر باشد:

$$a^۲+۲a=-۱ \Rightarrow a^۲+۲a+۱=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مربع}} (a+۱)^۲=۰ \Rightarrow a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۳- اگر f تابعی همانی باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۴　　۲) -۴

۳) ۶　　۴) -۶

۳۴- اگر دامنهٔ تابع همانی f، مجموعهٔ $\{۳,-۷,a+۱\}$ و برد آن مجموعهٔ $\{۲,۳,b\}$ باشد، میانگین a و b چه‌قدر است؟

۱) ۴　　۲) -۴　　۳) ۳　　۴) -۳

۳۵- کدام گزینه در مورد تابع همانی همواره صحیح است؟

۱) دامنه و برد آن شامل یک عضو است.　　۲) دامنه و برد آن با هم برابر است.

۳) تعداد اعضای دامنه مهم نیست ولی برد آن یک عضو دارد.　　۴) دامنه و برد آن $\mathbb{R}$ است.

۳۶- اگر مجموعهٔ دامنه و برد یک تابع با هم برابر باشند، کدام گزینه الزاماً درست است؟

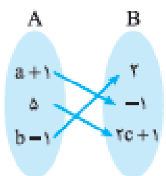
۱) این تابع، یک تابع ثابت است.　　۲) این تابع، یک تابع همانی است.

۳) این تابع، یک تابع خطی است.　　۴) هیچ‌کدام

۳۷- در تابع همانی $f=\{(a+۱,-۲),(۲b+۱,۲-a),(c,-b+۱)\}$، مقدار $-a+b-c$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) ۶

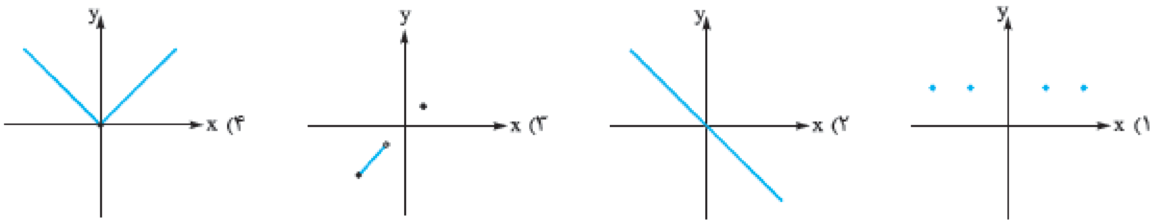
۳۸- اگر نمایش پیکانی روبه‌رو یک تابع همانی باشد، واریانس اعداد a، b و c کدام است؟



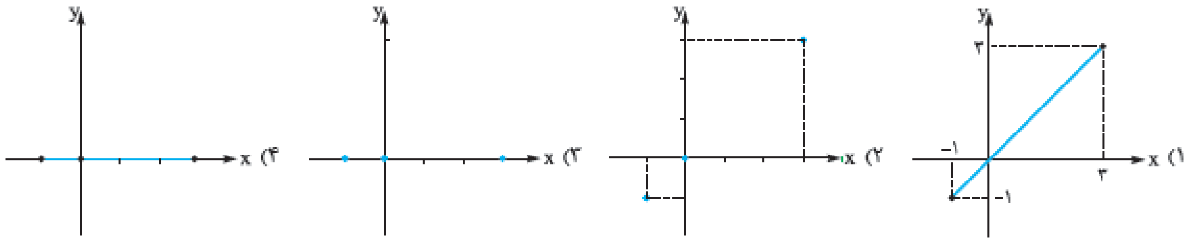
۱) ۴　　۲) $\frac{۱۳}{۳}$

۳) $\frac{۱۴}{۳}$　　۴) ۵

۳۹- کدام گزینه نمایش یک تابع همانی است؟



۴۰- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمودار یک تابع همانی با دامنهٔ $\{-1,0,3\}$ را نشان می‌دهد؟



۴۱- اگر نقطهٔ $(2, m^2-3m+4)$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ و ۱ ۲) ۲ و -1 ۳) -2 و ۱ ۴) -2 و -1

۴۲- اگر نقطهٔ (m, m^2-m-8) روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، m کدام است؟

۱) فقط -2 ۲) فقط ۴ ۳) ۲ یا -4 ۴) -2 یا ۴

پاسخ تشریحی تابع

۱- گزینهٔ ۱ مؤلفه‌های اول دو زوج‌مرتب $(1,5)$ و $(1,2b-1)$ یکسان است. برای این‌که این رابطه تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم این دو زوج‌مرتب نیز با هم برابر باشند:

$$2b-1=5 \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3$$

هم‌چنین مؤلفه‌های اول دو زوج‌مرتب $(2,1-a)$ و $(2,6)$ نیز یکسان است؛ پس مؤلفه‌های دوم این دو زوج‌مرتب نیز با هم برابرند:

$$1-a=6 \Rightarrow -a=5 \Rightarrow a=-5$$

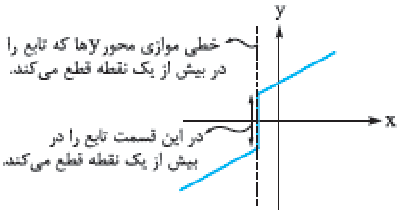
پس:

$$2a-b=2(-5)-3=-10-3=-13$$

۲- گزینهٔ ۳ نمایش پیکانی یک رابطه از مجموعهٔ A به B، به شرطی نشان‌دهندهٔ یک تابع است که از تمام اعضای مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شود. در ۱ و ۴، از عضو «۵» دو تا پیکان خارج شده، پس تابع نیستند. در ۲، از عضو «۵»، هیچ پیکانی خارج نشده، پس تابع نیست. فقط در ۳، از هر دو عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس تابع است.

۳- گزینهٔ ۴ اگر حتی یک خط موازی محور yها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار تابع نیست. این اتفاق فقط در ۴ می‌افتد.

اگر نموداری شامل یک تکهٔ کوچک یا بزرگ خط عمودی باشد، قطعاً تابع نیست!



۴- گزینهٔ ۲ از عضو (۲) در مجموعهٔ A دو پیکان به اعداد ۴ و $5-a$ وارد شده است. فقط در صورتی که این دو عدد برابر باشند، این رابطه تابع است:

$$5-a=4 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$$

۵- گزینهٔ ۱ تابع f به ازای هر ورودی x، ۳ برابر مجذور همان عدد به علاوهٔ ۱ را بیرون می‌دهد. ۳ برابر مجذور x یعنی ۳ برابر x^2 که می‌شود $3x^2$، که حالا باید آن را به علاوهٔ ۱ کنیم که می‌شود $3x^2+1$؛ پس به ازای ورودی x خروجی $3x^2+1$ را داریم و ضابطهٔ f به صورت $f(x)=3x^2+1$ در می‌آید.

۶- گزینهٔ ۱

$$f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})+3=(1^2+\underbrace{2(1)(\sqrt{2})}_{2\sqrt{2}}+\underbrace{(\sqrt{2})^2}_{2})-2-2\sqrt{2}+3$$

$$=(1+2\sqrt{2}+2)-2-2\sqrt{2}+3=1+\cancel{2\sqrt{2}}+2-2-\cancel{2\sqrt{2}}+3=4$$

$$f(2)=2^2-2(2)+3=4-4+3=3$$

بنابراین:

$$f(1+\sqrt{2})-f(2)=4-3=1$$

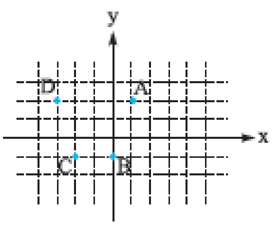
۷- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ $f(3+2\sqrt{6})$ کافی است در f جای xها، عدد $3+2\sqrt{6}$ را قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+10} \Rightarrow f(3+2\sqrt{6})=\sqrt{\underbrace{(3+2\sqrt{6})^2}_{\text{اتحاد مربع}}-6(3+2\sqrt{6})+10}$$

$$=\sqrt{3^2+2(3)(2\sqrt{6})+\underbrace{(2\sqrt{6})^2}_{4\times 6}-18-12\sqrt{6}+10}=\sqrt{9+\cancel{12\sqrt{6}}+24-18-\cancel{12\sqrt{6}}+10}=\sqrt{9+24-18+10}=\sqrt{25}=5$$

۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مختصات نقاط روی نمودار را می‌نویسیم:

$$A=(1,2),B=(0,-1),C=(-2,-1),D=(-3,2)$$



مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌های بالا، برد این تابع را تشکیل می‌دهد:

$$R_f=\{2,-1,-1,2\} \xrightarrow{\text{حذف تکراری‌ها}} R_f=\{2,-1\}$$

۹- گزینهٔ ۲ در این‌جا دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $\{-۲,۳\}$ است، پس اعداد ۲− و ۳ حق ورود به تابع f را دارند. این دو عدد را جای x در ضابطهٔ $f(x)=-۲x+۳$ قرار می‌دهیم تا ببینیم چه اعدادی از آن خارج می‌شوند:

$$f(-۲)=-۲(-۲)+۳=۴+۳=۷ \xrightarrow{\text{به ازای } x=-۲\text{، عدد ۷ خارج می‌شود}} (-۲,۷)$$

$$f(۳)=-۲(۳)+۳=-۶+۳=-۳ \xrightarrow{\text{به ازای } x=۳\text{، عدد ۳− خارج می‌شود}} (۳,-۳)$$

در نتیجه تابع f دارای دو زوج‌مرتب $(-۲,۷)$ و $(۳,-۳)$ است و به صورت $f=\{(-۲,۷),(۳,-۳)\}$ می‌باشد. برد این تابع شامل تمام زوج‌مرتب‌های دوم f است: $R_f=\{۷,-۳\}$

۱۰- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ A همان دامنهٔ تابع f است. از آن‌جایی که در این‌جا برد یا همان خروجی تابع را داریم و می‌خواهیم دامنه را به دست آوریم، باید ببینیم به ازای چه ورودی‌هایی (یعنی چه xهایی)، خروجی تابع، اعداد ۷− و ۱۳ شده است. پس باید $f(x)$ را با ۷− و ۱۳ مساوی قرار دهیم و با حل معادله، x یا همان ورودی را به دست آوریم:

$$۴x+۱=-۷ \Rightarrow ۴x=-۸ \Rightarrow x=-۲$$

$$۴x+۱=۱۳ \Rightarrow ۴x=۱۲ \Rightarrow x=۳$$

پس ورودی‌های تابع (دامنه)، اعداد ۲− و ۳ هستند و A برابر است با: $A=\{-۲,۳\}$

۱۱- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f، مجموعهٔ $\{-۱,-۳,۱\}$ است، پس اعداد ۱−، ۳− و ۱ حق ورود به تابع f را دارند. ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^۲+۱$ است. به ازای $x=-۱$، $x=-۳$ و $x=۱$، خروجی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(-۱)=(-۱)^۲+۱=۱+۱=۲ \xrightarrow{f(-۱)=۲} \text{زوج مرتب } (-۱,۲) \text{ عضو f است.} \Rightarrow$$ در نمودار ون از ۱− به ۲ پیکان رسم می‌شود.

$$f(-۳)=(-۳)^۲+۱=۹+۱=۱۰ \xrightarrow{f(-۳)=۱۰} \text{زوج‌مرتب } (-۳,۱۰) \text{ عضو f است.} \Rightarrow$$ در نمودار ون از ۳− به ۱۰ پیکان رسم می‌شود.

$$f(۱)=۱^۲+۱=۱+۱=۲ \xrightarrow{f(۱)=۲} \text{زوج‌مرتب } (۱,۲) \text{ عضو f است.} \Rightarrow$$ در نمودار ون از ۱ به ۲ پیکان رسم می‌شود.

این شرایط فقط در نمودار ۲ وجود دارد.

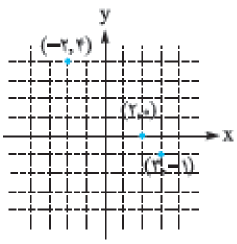
۱۲- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f، مجموعهٔ $\{-۲,۲,۳\}$ است. این اعداد را جای x در ضابطهٔ f، یعنی $f(x)=۲-x$ قرار می‌دهیم تا ببینیم چه اعدادی از آن خارج شوند.

$$f(-۲)=۲-(-۲)=۴ \xrightarrow{f(-۲)=۴} \text{نقطهٔ } (-۲,۴) \text{ عضو f است.}$$

$$f(۲)=۲-۲=۰ \xrightarrow{f(۲)=۰} \text{نقطهٔ } (۲,۰) \text{ عضو f است.}$$

$$f(۳)=۲-۳=-۱ \xrightarrow{f(۳)=-۱} \text{نقطهٔ } (۳,-۱) \text{ عضو f است.}$$

پس تابع f شامل سه نقطهٔ بالا است و نمودار آن به صورت روبه‌رو است: $f=\{(-۲,۴),(۲,۰),(۳,-۱)\}$



۱۳- گزینهٔ ۲ در نمایش زوج‌مرتبی تابع ثابت، باید تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌ها با هم برابر باشند، پس در این‌جا باید ۲ و $a+۷$ با هم برابر باشند:

$$a+۷=۲ \Rightarrow a=-۵$$

۱۴- گزینهٔ ۴ چون برد f دارای یک عضو است، پس f تابعی ثابت است و مؤلفهٔ دوم تمام زوج‌مرتب‌های آن با هم برابرند.

مؤلفه‌های دوم

$$f=\{(۲b,a+۳),(-a+۱,۵),(۳a+۱,b)\}$$

$$a+۳=۵=b \Rightarrow \begin{cases} a+۳=۵ \Rightarrow a=۲ \\ b=۵ \end{cases}$$

دامنهٔ f مجموعه‌ای شامل تمام مؤلفه‌های اول زوج‌مرتب‌های f است. کافی است $a=۲$ و $b=۵$ را در آن‌ها جای‌گذاری کنیم:

$$D_f=\{۲b,-a+۱,۳a+۱\} \xrightarrow{a=۲,b=۵} D_f=\{۲(۵),-۲+۱,۳(۲)+۱\}=\{۱۰,-۱,۷\}$$

۱۵- گزینهٔ ۱ در نمایش پیکانی، برای آن‌که تابع ثابت باشد، باید تمام پیکان‌ها به یک عضو وارد شوند. در این‌جا برای آن‌که این شرط رعایت شود، باید هر سه عضوی که پیکان به آن‌ها وارد شده است با هم برابر باشند:

$$۲a-۱=۳-b=۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۱=۵ \Rightarrow ۲a=۶ \Rightarrow a=۳ \\ ۳-b=۵ \Rightarrow -b=۲ \Rightarrow b=-۲ \end{cases}$$

با جای‌گذاری $a=۳$ و $b=-۲$ حاصل تک‌تک گزینه‌ها را به دست می‌آوریم؛ هر کدام برابر صفر شد، جواب است:

۱: $۲a+۳b=۲(۳)+۳(-۲)=۶+(-۶)=۰$

قٌب فدا رو شکر همان ۱ جواب است! (رم طراح گرم! اصلنم من طراح نبودما!)

۱۶- گزینهٔ ۳ گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

۱: گفتیم توابع به شکل $f(x)=c$ که c در آن یک عدد حقیقی است، تابع ثابت محسوب می‌شوند، پس با فرض $c=\frac{۱}{۲}$، این تابع ثابت است.

۲: تمامی پیکان‌های خارج‌شده از مجموعهٔ A، فقط به یک عضو از مجموعهٔ B وارد شده‌اند (به عضو ۴)، پس این نمایش پیکانی، یک تابع ثابت را نشان می‌دهد.

۳: در نمایش مختصاتی تابع ثابت، تمام نقاط باید روی یک خط افقی باشند که در این نمودار این‌گونه نیست، پس این تابع، ثابت نیست.

۴: تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌ها با هم برابرند، پس تابع ثابت است.

۱۷- گزینهٔ ۱ در نمایش تابع به فرم $\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=\bigcirc \end{cases}$، «مجموعهٔ A همان دامنه» و «$f(x)=\bigcirc$ برابر با ضابطهٔ تابع» است.

پس در این‌جا دامنهٔ f برابر با مجموعهٔ $\{-۱,۲,۳\}$ و ضابطهٔ آن برابر با $f(x)=۱$ است. از ضابطهٔ f می‌فهمیم که f تابعی ثابت با برد $\{۱\}$ است؛ یعنی مؤلفهٔ دوم تمام زوج‌مرتب‌های آن ۱ است. با داشتن دامنهٔ f و این‌که مؤلفهٔ دوم تمام زوج‌مرتب‌هایش عدد ۱ است، f را می‌نویسیم:

$f=\{(-۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$

۱۸- گزینهٔ ۱ اگر f تابعی ثابت باشد، برد آن شامل یک عضو است و تمام مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌های آن با هم برابرند، پس در این‌جا $y_۱=y_۲=y_۳$.

از طرفی می‌دانیم واریانس چند عددِ یکسان، برابر با صفر است، پس واریانس اعداد $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ که همگی با هم برابرند، برابر با صفر است.

۱۹- گزینهٔ ۳ تابع رسم‌شده از سه نقطه روی یک خط افقی تشکیل شده است، پس تابعی ثابت است.

این تابع از سه زوج‌مرتب $(-۲,۱)$، $(۰,-۲)$ و $(-۲,-۲)$ تشکیل شده است. دامنهٔ آن مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌مرتب‌ها است که شامل $\{-۲,۰,۱\}$ می‌شود و برد آن هم $\{-۲\}$ است. پس ضابطهٔ آن به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} f:\overset{\text{دامنه}}{\{-۲,۰,۱\}}\to \overset{\text{همدامنه}}{\mathbb{R}} \\ \underbrace{f(x)=-۲}_{\text{ضابطه}} \end{cases}$$

تذکر می‌دانیم «برد»، زیرمجموعهٔ «همدامنه» است، پس در این‌جا، جای $\mathbb{R}$ که هم‌دامنه فرض شده است، هر مجموعه‌ای که شامل $\{-۲\}$ باشد را می‌توانیم جایگزین کنیم، حتی خود $\{-۲\}$ را، پس ضابطهٔ $\begin{cases} f:\{-۲,۰,۱\}\to\{-۲\} \\ f(x)=-۲ \end{cases}$ هم می‌تواند جواب باشد.

۲۰- گزینهٔ ۴ از آن‌جایی که f تابع ثابت است، پس همهٔ مؤلفه‌های دوم زوج‌مرتب‌های f با هم برابرند: $b^۲-۲b=۳=c$

نتیجه می‌گیریم $c=۳$ است و برای به دست آوردن b باید معادلهٔ $b^۲-۲b=۳$ را حل کنیم:

$$b^۲-۲b=۳ \Rightarrow b^۲-۲b-۳=۰ \xrightarrow{\Delta=(-۲)^۲-۴(۱)(-۳)=۴+۱۲=۱۶} b=\frac{۲\pm\sqrt{۱۶}}{۲}=\frac{۲\pm۴}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b=۳ \\ b=-۱ \end{cases}$$

یک بار با $b=۳$ و $c=۳$، یک بار هم با $b=-۱$ و $c=۳$، f را بازنویسی می‌کنیم:

- $b=۳$ و $c=۳$: $f=\{(-۱,۳),(a-۴,۳),(a+۳,۳)\}$

برای آن‌که دامنهٔ f دارای دو عضو باشد، $a-۴$ یا $a+۳$ باید برابر -۱ باشند: $a+۳=-۱ \Rightarrow a=-۴$ $\quad$ $a-۴=-۱ \Rightarrow a=۳$

- در حالت $b=۳$ و $a=۳$ داریم: $a+b=۳+۳=۶$
- در حالت $b=۳$ و $a=-۴$ داریم: $a+b=-۴+۳=-۱$

- $b=-۱$ و $c=۳$: $f=\{(-۱,۳),(a-۴,۳),(a-۱,۳)\}$

برای آن‌که دامنهٔ f دارای دو عضو باشد، $a-۴$ یا $a-۱$ باید برابر -۱ باشند: $a-۱=-۱ \Rightarrow a=۰$ $\quad$ $a-۴=-۱ \Rightarrow a=۳$

- در حالت $a=۳$ و $b=-۱$ داریم: $a+b=۳+(-۱)=۲$
- در حالت $a=۰$ و $b=-۱$ داریم: $a+b=۰+(-۱)=-۱$

پس حاصل $a+b$ در حالت‌های مختلف می‌تواند اعداد ۶، -۱ و ۲ باشد.

۲۱- گزینهٔ ۳ برای محاسبهٔ $f(1)$ باید مقدار تابع را به ازای ورودی $x=1$ به دست آوریم. $x=1$ در محدودهٔ $x<2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(1)$ از ضابطهٔ دوم باید استفاده کنیم و جای xهایش عدد ۱ را قرار دهیم: $x<2: f(x)=2+4x \Rightarrow f(1)=2+4(1)=2+4=6$

۲۲- گزینهٔ ۲ $x=3$ در محدودهٔ $x>2$ قرار دارد، پس برای محاسبهٔ $f(3)$ از ضابطهٔ سوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=5 \Rightarrow f(3)=5$$

$x=-1$ در محدودهٔ $-1\le x\le 2$ قرار دارد، پس برای محاسبهٔ $f(-1)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم: $f(x)=x^2 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2=1$

بنابراین داریم: $f(3)+f(-1)=5+1=6$

۲۳- گزینهٔ ۱ سه عدد رادیکالی را تخمین می‌زنیم: $-\sqrt{2}\simeq -1/4\ ,\ \sqrt{3}\simeq 1/7\ ,\ \sqrt{8}\simeq 2/8$

- $x=-\sqrt{2}\simeq -1/4$، در محدودهٔ $x\le -1$ قرار دارد، پس برای محاسبهٔ $f(-\sqrt{2})$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=2x+3 \Rightarrow f(-\sqrt{2})=2(-\sqrt{2})+3=-2\sqrt{2}+3$$

- $x=\sqrt{3}\simeq 1/7$، در محدودهٔ $-1<x\le 2$ قرار دارد، پس برای محاسبهٔ $f(\sqrt{3})$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=x^2 \Rightarrow f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$$

- $x=\sqrt{8}\simeq 2/8$، در محدودهٔ $x>2$ قرار دارد، پس برای محاسبهٔ $f(\sqrt{8})$ از ضابطهٔ سوم استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=x \Rightarrow f(\sqrt{8})=\sqrt{8}$$

حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم، فقط $\sqrt{8}$ را می‌توانیم به صورت $\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ هم بنویسیم:

$$f(-\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+f(\sqrt{8})=(-2\sqrt{2}+3)+(3)+(\underbrace{\sqrt{8}}_{2\sqrt{2}})=-2\sqrt{2}+3+3+2\sqrt{2}=6$$

۲۴- گزینهٔ ۱ تابع f به ازای اعداد بزرگ‌تر از ۲ $(x>2)$، مربع آن عدد (یعنی x^2) را خروجی می‌دهد: $x>2: f(x)=x^2$

و به ازای اعداد کوچک‌تر از ۲ $(x<2)$، نصف آن عدد را خروجی می‌دهد: $x<2: f(x)=\frac{x}{2}$

پس ضابطهٔ f به صورت مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>2 \\ \frac{x}{2} & x<2 \end{cases}$$

برای به دست آوردن $f(3)$ از ضابطهٔ اول و برای به دست آوردن $f(-8)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم: $x>2: f(x)=x^2 \Rightarrow f(3)=3^2=9$

$$x<2: f(x)=\frac{x}{2} \Rightarrow f(-8)=\frac{-8}{2}=-4$$

پس: $f(3)+f(-8)=9+(-4)=5$

۲۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر عددی به توان زوج برسد، حاصل حتماً بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس a^2 همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است: $a^2\ge 0$

چون $a^2\ge 0$ است، پس برای محاسبهٔ $f(a^2)$ باید سراغ ضابطهٔ اول برویم که دامنه‌اش $x\ge 0$ است و اعداد بزرگ‌تر یا مساوی صفر حق ورود به آن را دارند. از آن‌جایی که خروجی این ضابطه، عدد ثابت است، پس $f(a^2)=1$.

۲۶- گزینهٔ ۲ چون نمی‌دانیم a در کدام‌یک از محدوده‌های $x\ge 1$ و $x<1$ قرار دارد، پس باید با هر دو حالت این مسئله را حل کنیم و جواب به دست آمده را بررسی کنیم.

- فرض کنیم a در محدودهٔ $x\ge 1$ است، پس برای محاسبهٔ $f(a)$، باید در ضابطهٔ اول (یعنی $y=2x-1$) جای a ،x را قرار دهیم:

$$f(x)=2x-1 \Rightarrow f(a)=2a-1$$

سؤال گفته $f(a)=5$ است، پس: $2a-1=5 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3\ \checkmark$

مقدار به دست آمده برای a در محدودهٔ $x\ge 1$ قرار دارد، پس این جواب قابل قبول است.

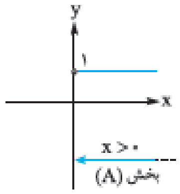
- فرض کنیم a در محدودهٔ $x<1$ است، پس برای محاسبهٔ $f(a)$، باید در ضابطهٔ دوم (یعنی $y=x-2$) جای a ،x را قرار دهیم:

$$f(x)=x-2 \Rightarrow f(a)=a-2$$

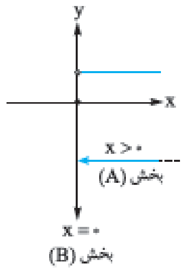
چون $f(a)=5$ است، پس: $a-2=5 \Rightarrow a=7\ \times$

در این حالت مقدار به دست آمده برای a در محدودهٔ $x<1$ قرار ندارد، پس این جواب قابل قبول نیست و در نتیجه فقط $a=3$ است.

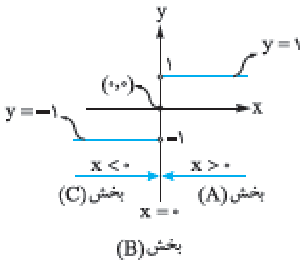
۲۷- گزینهٔ ۲ f یک تابع سه‌ضابطه‌ای است. آن را در سه بخش رسم می‌کنیم:



- بخش (A): برای $x > ۰$ از ضابطهٔ $y = ۱$ که یک خط افقی است تبعیت می‌کند.
- بخش (B): برای $x = ۰$، از ضابطهٔ $y = ۰$ تبعیت می‌کند. این ضابطه فقط شامل یک نقطه است، نقطه‌ای که x آن صفر و y آن هم صفر است: $(۰,۰)$

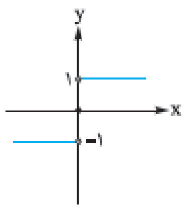


- بخش (C): برای $x < ۰$ از ضابطهٔ $y = -۱$ که باز هم یک خط افقی است، تبعیت می‌کند:



$\Rightarrow$

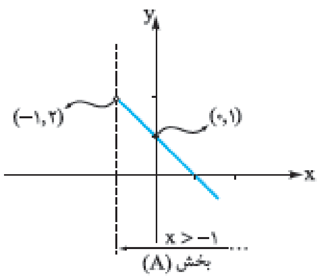
پس در نهایت شکل تابع f به صورت روبه‌رو است:



۲۸- گزینهٔ ۱ ● بخش (A): ابتدا در محدودهٔ $x > -۱$، تابع $y = -x + ۱$ را رسم می‌کنیم.

برای رسم خط کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم. بهتر است x را -۱ که لب مرز است و صفر که در محدودهٔ $x > -۱$ قرار دارد بدهیم:

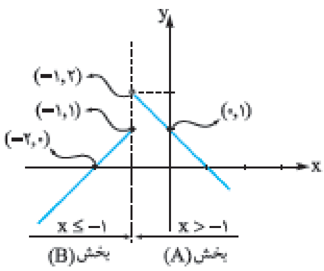
x	-۱	۰
$y = -x + ۱$	۲	۱
(x, y)	$(-۱, ۲)$	$(۰, ۱)$



- بخش (B): در محدودهٔ $x \leq -۱$، تابع $y = x + ۲$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را -۱ که لب مرز است و -۲ که در محدودهٔ $x \leq -۱$، قرار دارد بدهیم:

x	-۱	-۲
$y = x + ۲$	۱	۰
(x, y)	$(-۱, ۱)$	$(-۲, ۰)$

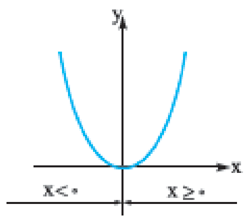
نمودار به دست آمده، همان نمودار ۱ است.



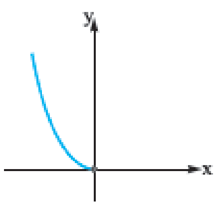
۲۹- گزینهٔ ۳ باید هر ضابطه را در محدودهٔ دامنهٔ خودش رسم کنیم.

اول سهمی $y = x^۲$ را به ازای $x < ۰$ رسم می‌کنیم.

نمودار $y = x^۲$ به صورت مقابل است:



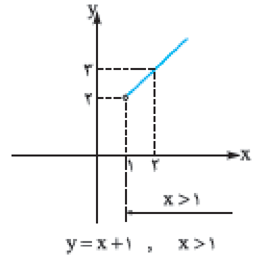
اگر محدودهٔ $x < ۰$ را برای نمودار بالا در نظر بگیریم، فقط قسمت سمت چپ محور yها باقی می‌ماند:



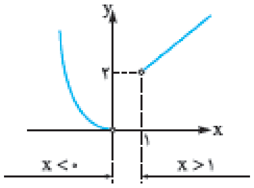
$y = x^۲, x < ۰$

حالا باید خط $y=x+۱$ را در محدودهٔ $x>۱$ رسم کنیم. این کار را با دادن دو نقطه انجام می‌دهیم.
یک بار x را ۱ و یک بار هم ۲ می‌دهیم:

x	۱	۲
$y=x+۱$	۲	۳
(x,y)	$(۱,۲)$	$(۲,۳)$



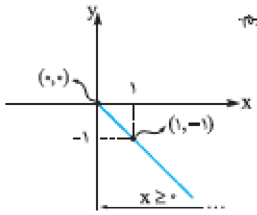
با قراردادن دو قسمت بالا در یک نمودار، نمودار تابع اصلی به دست می‌آید:



۳۰- گزینهٔ ۴ تابع f تابعی دوضابطه‌ای است. این تابع دوضابطه‌ای را در دو بخش جدا رسم می‌کنیم.

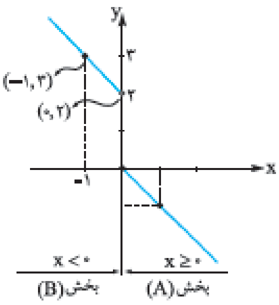
- بخش (A): ابتدا در محدودهٔ $x\geq ۰$، تابع $y=-x$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را صفر، که لب مرز است و ۱ که در محدودهٔ $x\geq ۰$ قرار دارد بدهیم.

x	۰	۱
$y=-x$	۰	-۱
(x,y)	$(۰,۰)$	$(۱,-۱)$

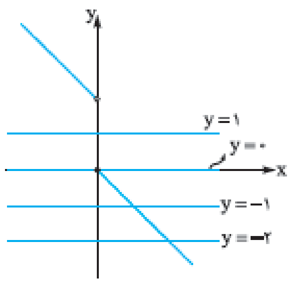


- بخش (B): در محدودهٔ $x<۰$، تابع $y=۲-x$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را صفر که لب مرز است و -۱ که در محدودهٔ $x<۰$ قرار دارد بدهیم. فقط دقت کنید در این حالت به ازای $x=۰$، نقطه‌ای که به دست می‌آید را باید توخالی بگذاریم.

x	۰	-۱
$y=۲-x$	۲	۳
(x,y)	$(۰,۲)$	$(-۱,۳)$

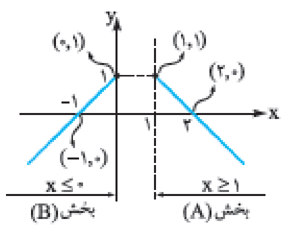


حالا نمودار f را بدون اضافات به همراه چهار خط داده‌شده در گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



فقط خط $y=۱$ از بین این چهار خط، نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.

۳۱- گزینهٔ ۴ تابع رسم‌شده از دو بخش تشکیل شده است. هر دو بخش یک خط هستند.



برای به دست آوردن معادلهٔ یک خط، نیاز به شیب و یک نقطه از آن خط داریم:

- بخش (A): یک خط است که از دو نقطهٔ $(۱,۱)$ و $(۲,۰)$ گذشته است. شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱-۰}{۱-۲}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً $(۲,۰)$) معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۰=-۱(x-۲)\Rightarrow y=-x+۲$$

پس ضابطهٔ اول به صورت $y=-x+۲$ با شرط دامنهٔ $x\geq ۱$ است.

- بخش (B): یک خط است که از دو نقطهٔ $(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ می‌گذرد، شیب آن را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱-۰}{۰-(-۱)}=\frac{۱}{۱}=۱$$

با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً $(-۱,۰)$) معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

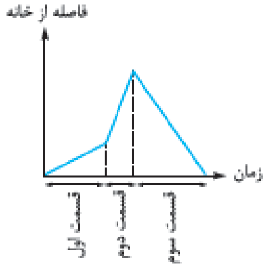
$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۰=۱(x-(-۱))\Rightarrow y=x+۱$$

پس ضابطهٔ دوم هم به صورت $y=x+۱$ با شرط دامنهٔ $x\leq ۰$ است.
در نهایت ضابطهٔ f به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x\geq ۱\\ x+۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

۳۲- گزینهٔ ۳ نمودارهای (۱) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند؛ چون در این دو نمودار، در یک بازهٔ زمانی، فاصلهٔ بهزاد از خانه ثابت مانده است و این به معنی آن است که بهزاد در مسیر توقف کرده است که این موضوع در داستان قید نشده است. پس جواب، (۲) یا (۳) است.

از آن‌جا که بهزاد ابتدا آهسته‌تر قدم می‌زد و سپس سرعت گرفته، شیب قسمت اول باید کم‌تر از شیب قسمت دوم باشد.



در (۳)، شیب قسمت اول، کم‌تر از شیب قسمت دوم است، پس جواب (۳) است.

قسمت اول: بهزاد آهسته از خانه دور می‌شود.

قسمت دوم: بهزاد با سرعت بیشتری به سمت پارک می‌رود و همچنان در حال دورشدن از خانه است!

قسمت سوم: بهزاد به سمت خانه برمی‌گردد و فاصله‌اش از خانه رو به کم‌شدن است.

۳۳- گزینهٔ ۳ در تابع همانی به ازای هر عددی که وارد تابع شود، همان عدد را به عنوان خروجی دریافت می‌کنیم. پس در این‌جا ورودی $۲a-۱$ و خروجی $۱۷-a$ باید با هم برابر باشند: $۲a-۱=۱۷-a \Rightarrow ۲a+a=۱۷+۱ \Rightarrow ۳a=۱۸ \Rightarrow a=۶$

۳۴- گزینهٔ ۴ تابع f همانی است، پس مجموعهٔ دامنه و برد آن با هم برابرند: $D_f=R_f \Rightarrow \{۳,-۷,a+۱\}=\{۳,۲,b\}$

عضو ۳ در هر دو مجموعه وجود دارد. عضو «-۷» فقط در D_f دیده می‌شود، پس برای آن‌که در R_f هم عضو «-۷» داشته باشیم، b باید برابر -۷ باشد $(b=-۷)$، پس R_f به صورت $R_f=\{۳,۲,-۷\}$ درمی‌آید.

از مقایسهٔ $D_f=\{۳,-۷,a+۱\}$ و $R_f=\{۳,۲,-۷\}$ می‌فهمیم که $a+۱$ هم باید با ۲ برابر باشد: $a+۱=۲ \Rightarrow a=۱$

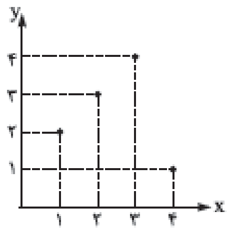
پس میانگین a و b برابر است با: $\frac{a+b}{۲}=\frac{۱+(-۷)}{۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳$

۳۵- گزینهٔ ۲ در تابع همانی، مجموعهٔ دامنه و برد تابع با هم برابرند، پس (۲) صحیح است.

در مورد (۱) هم اشاره کنیم که اگر دامنه و برد شامل یک عضو باشد، آن تابع فقط یک نقطه است که می‌تواند همانی باشد و می‌تواند نباشد! در (۳) هم تعریف تابع ثابت آمده است؛ زیرا تنها تابعی که بردش یک عضو دارد، تابع ثابت است.

دامنه و برد تابع همانی می‌تواند $\mathbb{R}$ باشد ولی الزامی نداریم، پس (۴) هم صحیح نیست.

۳۶- گزینهٔ ۴ تابع $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۲,۳),(۴,۱)\}$ را در نظر بگیرید.



مجموعهٔ مؤلفه‌های اول آن، دامنهٔ f را تشکیل می‌دهند: $D_f=\{۱,۳,۲,۴\}$

مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم آن، برد f را تشکیل می‌دهند: $R_f=\{۲,۴,۳,۱\}$

نمودار آن را هم می‌توانید ببینید:

نقاط تابع فوق روی یک خط افقی نیستند، پس تابع ثابت نیست.

نقاط تابع فوق روی نیمساز ربع اول و سوم نیستند، پس تابع همانی نیست.

نقاط تابع فوق روی خط راست نیستند، پس تابع خطی نیست.

دقت کنید اگر تابع همانی باشد، آن‌گاه دامنه و برد آن تابع با هم برابرند (عکس این جمله درست نیست، یعنی اگر دامنه و برد برابر باشند، تابع الزاماً همانی نیست)

۳۷- گزینهٔ ۴ در تابع همانی، در هر زوج‌مرتب مؤلفه‌های اول و دوم برابرند، پس:

$$\text{زوج‌مرتبِ}(a+۱,-۲) \Rightarrow a+۱=-۲ \Rightarrow a=-۳$$

$$\text{زوج‌مرتبِ}(۲b+۱,۲-a) \Rightarrow ۲b+۱=۲-a \xrightarrow{a=-۳} ۲b+۱=۲-(-۳) \Rightarrow ۲b+۱=۵ \Rightarrow ۲b=۴ \Rightarrow b=۲$$

$$\text{زوج‌مرتبِ}(c,-b+۱) \Rightarrow c=-b+۱ \xrightarrow{b=۲} c=-۲+۱ \Rightarrow c=-۱$$

حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم: $-a+b-c=-(-۳)+۲-(-۱)=۳+۲+۱=۶$

۳۸- گزینهٔ ۳ در نمایش پیکانی تابع همانی، اعداد سر و ته هر پیکان، باید با هم برابر باشند، پس:

$$a+۱=-۱ \Rightarrow a=-۲ \qquad b-۱=۲ \Rightarrow b=۳ \qquad ۲c+۱=۵ \Rightarrow ۲c=۴ \Rightarrow c=۲$$

برای به دست آوردن واریانس، ابتدا باید میانگین را حساب کنیم، میانگین اعداد $a=-۲$، $b=۳$ و $c=۲$ برابر است با:

$$\text{میانگین}=\frac{a+b+c}{۳}=\frac{-۲+۳+۲}{۳}=\frac{۳}{۳}=۱$$

واریانس داده‌های x_1، x_2 و x_3 با میانگین $\bar{x}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

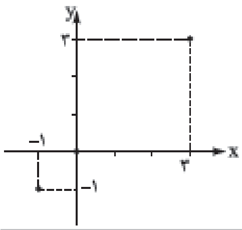
$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2}{3}$$

پس در این‌جا با جای‌گذاری a، b و c به جای x_1، x_2 و x_3، همچنین $\bar{x}=1$ داریم:

$$\sigma^2=\frac{(-2-1)^2+(3-1)^2+(2-1)^2}{3}=\frac{9+4+1}{3}=\frac{14}{3}$$

۳۹- گزینهٔ ۳ نمودار تابع همانی همواره روی خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قرار دارد. تنها گزینه‌ای که این شرط را دارد، (۳) است. (۱) تابع ثابت، (۲) نیمساز ربع دوم و چهارم (یعنی خط $y=-x$) و (۴) هم تابع $f(x)=|x|$ است.

۴۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در تابع همانی هر عددی که وارد تابع شود، همان عدد هم از تابع خارج می‌شود.
در این‌جا دامنه، مجموعهٔ $\{-1,0,3\}$ است، یعنی اعداد -1، صفر و ۳ حق ورود به تابع را دارند. از آن‌جایی‌که باید خود عددِ ورودی از تابع خارج شود، پس تابع دارای سه زوج‌مرتب $(-1,-1)$، $(0,0)$ و $(3,3)$ است و نمودارش به شکل روبه‌رو است:



۴۱- گزینهٔ ۱ هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است، دارای طول (x) و عرض (y) یکسانی است؛ پس اگر نقطهٔ $(\underset{x}{2},\underbrace{m^2-3m+4}_{y})$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، باید ۲ با m^2-3m+4 برابر باشد:

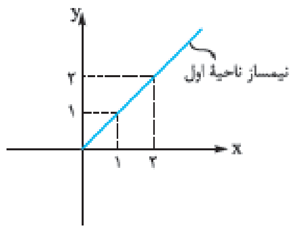
$$m^2-3m+4=2 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترک}} (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

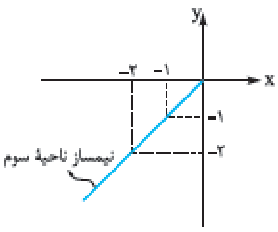
۴۲- گزینهٔ ۱ اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، دارای طول (x) و عرض (y) برابر است؛ پس در این‌جا هم که نقطهٔ (m,m^2-m-8) روی نیمساز ناحیهٔ سوم است، باید m و m^2-m-8 با هم برابر باشند:

$$m^2-m-8=m \Rightarrow m^2-2m-8=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترک}} (m-4)(m+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=-2 \end{cases}$$

دقت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ اول باشد، دارای طول و عرض مثبت و برابر است و اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، دارای طول و عرض **منفی و برابر** است.

پس در این‌جا که نقطه باید روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، طول و عرض باید هر دو منفی باشند. $m=4$ و $m=-2$ را در نقطهٔ (m,m^2-m-8) جای‌گذاری می‌کنیم تا مختصات کامل آن به دست آید:





$$m=4 \Rightarrow (4,4^2-4-8)=(4,4) \xrightarrow{\text{طول و عرض مثبت و برابر}}$$ روی نیمساز ناحیهٔ اول ✗

$$m=-2 \Rightarrow (-2,(-2)^2+2-8)=(-2,-2) \xrightarrow{\text{طول و عرض منفی و برابر}}$$ روی نیمساز ناحیهٔ سوم ✓

پس فقط $m=-2$ قابل قبول است.