

هویت اجتماعی

۲	درس ۱: کنش‌های ما
۸	درس ۲: پدیده‌های اجتماعی
۱۵	درس ۳: جامعه و فرهنگ ...
۲۳	درس ۴: ارزیابی فرهنگ‌ها
۳۲	درس ۵: هویت
۴۱	درس ۶: بازتولید هویت اجتماعی
۵۰	درس ۷: تحولات هویتی جامعه
۵۸	درس ۸: بعد فرهنگی هویت ایران
۶۷	درس ۹: بعد سیاسی هویت ایران
۷۶	درس ۱۰: ابعاد جمعیتی و ...
آزمون‌ها	

فارسی ۳

۱۰	ستایش: ملکا ذکر تو گویم
۱۲	درس ۱: شکر نعمت
۱۹	درس ۲: مست و هشیار
۲۶	درس ۳: آزادی
۳۲	درس ۴: (آزاد) از یک انسان
۳۴	درس ۵: دماوندیه
۴۶	درس ۶: نی‌نامه
۵۲	درس ۷: در حقیقت عشق
۶۰	درس ۸: از پاریز تا پاریس
۷۰	درس ۹: کویر
۸۴	درس ۱۰: فصل شکوفایی
۸۸	درس ۱۱: آن شب عزیز
۱۰۰	درس ۱۲: گذر سیاوش از آتش
۱۰۹	درس ۱۳: خوان هشتم
۱۲۰	درس ۱۴: سی مرغ و سیمرغ
۱۲۹	درس ۱۵: (آزاد) حدیث جوانی
۱۳۲	درس ۱۶: کباب غاز
۱۵۰	درس ۱۷: خنده تو
۱۵۵	درس ۱۸: عشق جاودانی
۱۶۳	نیایش: لطف تو
آزمون‌ها	

نگارش ۳

۱۲	درس ۱: خاطره‌نگاری
۳۰	درس ۲: نگارش ادبی (۱) ...

۴۴	درس ۳: نگارش ادبی (۲) ...
۶۰	درس ۴: نامه‌نگاری
۸۰	درس ۵: نگارش علمی ... (۱)
۹۶	درس ۶: نگارش علمی ... (۲)

دین و زندگی ۳

۶	درس ۱: هستی‌بخش
۱۸	درس ۲: یگانه بی‌همتا
۳۰	درس ۳: توحید و سبک زندگی
۴۲	درس ۴: فقط برای تو
۵۲	درس ۵: قدرت پرواز
۶۴	درس ۶: سنت‌های خداوند در زندگی
۸۰	درس ۷: بازگشت
۹۴	درس ۸: زندگی در دنیای امروز ...
۱۰۸	درس ۹: پایه‌های استوار
۱۲۶	درس ۱۰: تمدن جدید و مسئولیت‌ها
آزمون‌ها	

انگلیسی ۳ (Student Book)

۱۵	درس ۱
۴۳	درس ۲
۷۱	درس ۳
آزمون‌ها	

انگلیسی ۳ (Work Book)

۷	درس ۱
۲۵	درس ۲
۴۳	درس ۳

سلامت و بهداشت

۳	درس ۱: سلامت چیست؟
۱۲	درس ۲: سبک زندگی
۱۹	درس ۳: برنامه غذایی سالم
۳۳	درس ۴: کنترل وزن و تناسب اندام
۴۰	درس ۵: بهداشت و ایمنی مواد غذایی
۴۹	درس ۶: بیماری‌های غیرواگیر
۶۷	درس ۷: بیماری‌های واگیر
۷۹	درس ۸: بهداشت فردی
۱۰۱	درس ۹: بهداشت ازدواج و باروری
۱۱۱	درس ۱۰: بهداشت روان

۱۲۹	درس ۱۱: مصرف دخانیات و الکل
۱۳۸	درس ۱۲: اعتیاد به مواد مخدر ...
۱۵۵	درس ۱۳: پیشگیری از اختلالات ...
۱۷۰	درس ۱۴: پیشگیری از حوادث ...
آزمون‌ها	

عربی، زبان قرآن ۳

۱	الَّذِينَ الْأُولُ: الَّذِينَ وَ التَّائِبِينَ
۱۷	الَّذِينَ الثَّانِي: مَكَّةَ الْمُكْرَمَةَ ...
۳۳	الَّذِينَ الثَّلَاثُ: الْكُتُبِ طَعَامَ الْفِكْرِ
۴۹	الَّذِينَ الرَّابِعُ: الْفُرْزُدُقُ ...
آزمون‌ها	

شیمی ۳

۱	فصل ۱: مولکول‌ها در خدمت ...
۳۷	فصل ۲: آسایش و رفاه در ...
۶۵	فصل ۳: شیمی جلوه‌ای از هنر، ...
۸۹	فصل ۴: شیمی، راهی به سوی ...
آزمون‌ها	

هندسه ۳

۹	فصل ۱: ماتریس و کاربردها
۱۰	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ...
۲۲	درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان
آزمون فصل اول	
۳۳	فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی
۳۴	درس ۱: آشنایی با مقاطع مخروطی ...
۴۰	درس ۲: دایره
۴۷	درس ۳: بیضی و سهمی
آزمون فصل دوم	
۶۱	فصل ۳: بردارها
۶۲	درس ۱: معرفی فضای \mathbb{R}^3
۷۷	درس ۲: ضرب داخلی و ضرب ...
آزمون فصل سوم	
آزمون‌ها	

ریاضیات گسسته

۱	فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد
۲	درس ۱: استدلال ریاضی
۹	درس ۲: بخش پذیری در اعداد ...



بخش اول: تفکر و اندیشه

درس ۱ هستی بخش

آموزش به روش سؤال‌های امتحانی از خط به خط کتاب درسی

درس ۱

دین و زندگی ۳

پاسخ	سؤال
۱- دل و قلب - اعمال	۱- اندیشه مانند بذری است که در ذهن جوانه می‌زند، در ریشه می‌دواند و برگ و بار آن به صورت ظاهر می‌شود.
۲- اگر به صورت مداوم و درباره خدا و قدرت او باشد.	۲- مطابق با حدیث پیامبر اکرم <small>صلی الله علیه و آله</small> ، اندیشه در چه صورتی می‌تواند برترین عبادت‌ها باشد؟
۳- فطرت	۳- خدایابی اولیه و درک حضور او، براساس کدام عامل در انسان محقق می‌شود؟
۴- نادرست؛ تفکر در این رابطه، یکی از راه‌های درک وجود خداوند و شناخت افعال و صفات خداوند است.	۴- تفکر درباره نیازمندی‌های جهان در پیدایش خود به آفریننده، یکی از راه‌های درک وجود خداوند و شناخت ذات او می‌باشد. (درست / نادرست)
۵- اگر به خود نظر کنیم، خود را پدیده‌ای می‌یابیم که وجود و هستی‌مان از خودمان نیست. در اشیای پیرامون نیز که بیندیشیم، آن‌ها را همین‌گونه می‌بینیم.	۵- مقدمه اول استدلال نیازمندی جهان به خدا در پیدایش را شرح دهید.
۶- نیازمند به پدیدآورنده‌ای هستند که خودش پدیده نباشد، بلکه وجودش از خودش باشد.	۶- پدیده‌هایی که وجودشان از خودشان نیست، برای موجود شدن به چه چیزی نیازمند هستند؟
۷- اگر موجودی خودش ذاتاً موجود باشد، در این صورت، چنین چیزی دیگر پدیده نیست و نیاز به پدیدآورنده نخواهد داشت؛ همواره بوده است و همواره خواهد بود.	۷- ذاتی بودن وجود خداوند، چه نتایجی به همراه دارد؟
۸- الف) مقدمه دوم ب) مقدمه اول	۸- هر یک از گزاره‌های زیر، به کدام مقدمه در استدلال نیازمندی جهان به خدا در پیدایش اشاره دارد؟ الف) چیزهایی که شیرین نیستند، برای شیرین شدن نیازمند به چیزی هستند که خودش شیرین باشد. ب) آسمان‌ها و زمین، پدیده‌هایی هستند که وجودشان از خودشان نبوده و نیست.
۹- نادرست؛ این بیت بیانگر مقدمه دوم این استدلال است.	۹- بیت «ذات نایافته از هستی، بخش / چون تواند که بود هستی بخش» بیانگر مقدمه اول در استدلال نیازمندی جهان به خدا در پیدایش است. (درست / نادرست)
۱۰- آفریننده‌ای که (۱) خودش پدیده نباشد. (۲) سرچشمه هستی باشد.	۱۰- پدیده‌های جهان، در پدید آمدن و هست شدن خود، به چگونه آفریننده‌ای نیازمندند؟

۱۱- گزاره زیر، مؤید کدام گزینه است؟ «جهان در هر آن، به خداوند نیازمند است.» (۱) نیازمندی جهان به خدا در پیدایش (۲) نیازمندی جهان به خدا در بقا	۱۱- گزینه «۲» - این گزاره به نیاز پیوسته انسان به خداوند برای بقاداشتن اشاره دارد.
۱۲- چرا موجودات، دائماً به پیشگاه الهی عرض نیاز می‌کنند؟	۱۲- زیرا موجودات، پس از پیدایش نیز هم‌چنان، مانند لحظه نخست خلق شدن، به خداوند نیازمند هستند.
۱۳- نیازمندی دائمی به خدای بی‌نیاز، نزد انسان‌های آگاه و ناآگاه چه تفاوتی دارد؟	۱۳- انسان‌های ناآگاه نسبت به نیاز دائمی انسان به خداوند، بی‌توجه‌اند؛ اما انسان‌های آگاه دائماً سایه لطف و رحمت خدا را احساس می‌کنند و خود را نیازمند عنایات پیوسته او می‌دانند.
۱۴- در چه صورتی انسان، عجز و بندگی خود را نسبت به خداوند، بیشتر ابراز می‌کند؟	۱۴- هر چه معرفت انسان به خود و رابطه‌اش با خدا بیشتر شود، نیاز به او را بیشتر احساس و عجز و بندگی خود را بیشتر ابراز می‌کند.
۱۵- قرآن کریم، رابطه میان خداوند و جهان هستی را با کلمه بیان می‌کند.	۱۵- نور
۱۶- خداوند نور هستی است؛ یعنی تمام موجودات خود را از او می‌گیرند و به سبب او پیدا و آشکار شده و پا به عرصه می‌گذارند.	۱۶- وجود - هستی
۱۷- به چه دلیل آنان که به دقت و اندیشه در جهان هستی می‌نگرند، در هر چیزی خدا را مشاهده می‌کنند و علم و قدرت او را می‌بینند؟	۱۷- زیرا هر موجودی در حد خودش، تجلی خداوند و نشانگر حکمت، قدرت، رحمت و سایر صفات الهی است.
۱۸- بیت «دلی کز معرفت نور و صفا دید / به هر چیزی که دید، اول خدا دید» بیانگر چه مفهومی است؟	۱۸- هر موجودی در حد خودش تجلی خداوند و نشانگر صفات اوست.
۱۹- این که انسان بتواند با هر چیزی خدا را ببیند، معرفتی و والا است که در نگاه نخست مشکل به نظر می‌آید، اما هدفی است.	۱۹- عمیق - قابل دسترس
۲۰- چرا رسیدن به این معرفت که «انسان بتواند با هر چیزی خدا را ببیند» برای نوجوانان و جوانان قابل دسترس تر است؟	۲۰- زیرا پاکی و صفای قلب دارند.
۲۱- در چه صورتی، خداوند به کمک انسان می‌آید تا بتواند در هر چیزی خدا را ببیند؟	۲۱- اگر انسان قدم پیش گذارد و با عزم و تصمیم قوی برای این هدف حرکت کند.
۲۲- موضوعاتی که انسان می‌خواهد درباره آن‌ها شناخت پیدا کند، دو دسته‌اند: آن‌ها را نام ببرید و برای هر کدام مثال بزنید.	۲۲- (۱) موضوعاتی که در محدوده شناخت ما قرار می‌گیرند، مثل گیاهان، حیوان‌ها، ستارگان و کهکشان‌ها. (۲) موضوعاتی که نامحدودند و ذهن ما گنجایش درک آن‌ها را ندارد؛ مثل ذات خداوند.
۲۳- چرا ذهن انسان توان و گنجایش فهم چیستی و ذات ستارگان و کهکشان‌ها را دارد؟	۲۳- زیرا همه آن‌ها، اموری محدود هستند.
۲۴- لازمه شناخت هر چیزی، و به آن است.	۲۴- احاطه - دسترسی
۲۵- چرا انسان نمی‌تواند ذات امور نامحدود را تصور کند؟	۲۵- به دلیل محدود بودن ذهن
۲۶- چرا انسان ناتوان از درک چیستی و ماهیت خداوند است؟	۲۶- خداوند حقیقتی نامحدود دارد؛ در نتیجه، ذهن انسان که محدود است، نمی‌تواند به حقیقت او احاطه پیدا کند و ذاتش را شناسایی نماید.

بررسی آیات و احادیث

حدیث پیامبر اکرم صلی الله علیه و آله می‌فرماید: «أَفْضَلُ الْعِبَادَةِ إِدْمَانُ التَّفَكُّرِ فِي اللَّهِ وَ فِي قُدْرَتِهِ» ترجمه: «برترین عبادت، اندیشیدن مداوم درباره خداوند و قدرت اوست.»

پیام‌ها: اگر اندیشیدن، به صورت مداوم و درباره خدا و قدرت او باشد، برترین عبادت محسوب می‌شود.
آیه ﴿يَا أَيُّهَا النَّاسُ اتَّقُوا اللَّهَ إِلَى اللَّهِ وَ اللَّهُ هُوَ الْغَنِيُّ الْحَمِيدُ﴾ (سوره فاطر، آیه ۱۵) ترجمه: «ای مردم شما به خداوند نیازمند هستید و خدا است که [تنها] بی‌نیاز ستوده است.»

پیام‌ها: فقر و نیاز دائمی انسان (در بقا و پیدایش) و غنای ذاتی خداوند برداشت می‌شود. انسان‌ها در هر مقام و درجه‌ای باشند، نسبت به خداوند فقیرند و این فقر و بی‌نیازی، مطلق است.

آیه ﴿يَسْأَلُهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ كُلَّ يَوْمٍ هُوَ فِي شَأْنٍ﴾ (سوره رحمان، آیه ۲۹) **ترجمه:** «هر آن چه در آسمانها و زمین است، پیوسته از او درخواست می کند. او همواره دست‌اندرکار امری است.»

پیامها: بیانگر نیازمندی دائمی مخلوقات به خداوند در مرحله بقا است. / چنین نیست که خداوند، عالم را آفریده و آن را به حال خود رها کرده باشد، بلکه همواره امور هستی را تدبیر و اداره می کند.

حدیث پیامبر ﷺ «اللَّهُمَّ لَا تَكِلْنِي إِلَى نَفْسِي طَرْفَةَ عَيْنٍ أَبَدًا» **ترجمه:** «خدایا هیچ گاه مرا چشم به هم زدنی به خودم وامگذار.»

پیامها: افزایش خودشناسی، منجر به درک بیشتر فقر و نیاز به خداوند و در نهایت افزایش عبودیت و بندگی الهی می شود. / پیامبر گرامی ما، با آن مقام و منزلت خود در پیشگاه الهی، عاجزانه از خداوند می خواهد که برای یک لحظه هم، لطف و رحمت خاصش را از او نگیرد و او را به حال خود واگذار نکند.

آیه ﴿اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ...﴾ (سوره نور، آیه ۳۵) **ترجمه:** «خداوند نور آسمانها و زمین است ...»

پیامها: قرآن کریم، رابطه میان خداوند و جهان هستی را با کلمه نور بیان می کند. / استفاده از این تعبیر به این معناست که همه موجودات هستی خود را از خداوند می گیرند و به سبب او پا به عرصه هستی می گذارند.

حدیث امیرالمؤمنین علی ؑ «مَا رَأَيْتُ شَيْئًا إِلَّا وَرَأَيْتُ اللَّهَ قَبْلَهُ وَبَعْدَهُ وَمَعَهُ» **ترجمه:** «هیچ چیزی را ندیدم مگر این که خداوند را قبل و بعد و با آن دیدم.»

پیامها: هر موجودی در حد خودش تجلی خداوند و نشانگر حکمت، قدرت، رحمت و سایر صفات الهی است. / آنان که به دقت و اندیشه در جهان می نگرند، در هر چیزی خدا را مشاهده می کنند و علم و قدرت او را می بینند.

حدیث «تَفَكَّرُوا فِي كُلِّ شَيْءٍ وَلَا تَفَكَّرُوا فِي ذَاتِ اللَّهِ» **ترجمه:** «در همه چیز تفکر کنید ولی در ذات خداوند تفکر نکنید.»

پیام: ممنوع بودن تفکر در ذات و چیستی نامحدود خداوند و دعوت به تفکر در سایر موضوعات محدود مانند هستی و شناخت صفات و اسماء خدا، از این حدیث برداشت می شود.

سؤال متن — صفحه ۶ کتاب درسی

آیا هرگز درباره آغاز و پایان این هستی پهناور فکر کرده‌اید؟ به راستی این میلیاردها میلیارد کهکشان و ستاره و سیاره، با میلیاردها موجود متنوع از کجا آمده‌اند؟ موجودات جهان، هستی خود را وامدار چه کسی هستند؟! همه موجودات جهان، هستی خود را وامدار آفریننده‌ای حکیم‌اند که پیدایش (هست‌شدن) و بقای پدیده‌ها به دست اوست.

تفکر در متن — صفحه ۸ کتاب درسی

توضیحات مربوط به نیازمندی جهان به خدا در پیدایش را به صورت یک استدلال، به طور خلاصه بنویسید.

مقدمه اول: ما و این جهان، پدیده‌هایی هستیم که وجودمان از خودمان نیست.

مقدمه دوم: موجوداتی که وجودشان از خودشان نیست، برای به وجود آمدن نیازمند موجودی هستند که خود پدیده نباشد.

نتیجه: ما و همه پدیده‌های جهان، در پدید آمدن و هست‌شدن به خداوند نیازمند هستیم.

سؤال متن — صفحه ۹ کتاب درسی

آیا رابطه جهان با خدا، مانند رابطه بنا با مسجد است؟ خیر، بنا به مصالح تشکیل دهنده مسجد وجود نبخشیده است، اما خداوند متعال سرچشمه وجود موجودات است؛ هم‌چنین جهان در بقای خود، نیازمند به خداوند است، اما مسجد در بقای خود به بنا نیازی ندارد.

تدبر در قرآن — صفحه ۱۰ کتاب درسی

در آیات ﴿يَا أَيُّهَا النَّاسُ...﴾ و ﴿يَسْأَلُهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ...﴾ تدبر کنید و به سؤالات پاسخ دهید.

- ۱- فکر می کنید چرا موجودات پیوسته از خداوند درخواست دارند؟ زیرا همواره و در هر «آن» به او نیازمند هستند. (نیاز در بقا)
- ۲- نیاز انسان به خدا شامل چه چیزهایی می شود؟ انسان در همه حالات و امور خود، از پیدایش تا بقا، نیازمند به خداوند است.
- ۳- منظور از این که خداوند هر لحظه دست‌اندرکار امری است، چیست؟ زیرا موجودات پیوسته از او درخواست می کنند.

سؤال متن — صفحه ۱۱ کتاب درسی

نور بودن خداوند به چه معناست؟ خداوند نور هستی است؛ یعنی همه موجودات، وجود خود را از او می گیرند، به سبب او پیدا و آشکار شده و پا به عرصه هستی می گذارند و وجودشان به وجود او وابسته است.

تفکر در حدیث — صفحه ۱۲ کتاب درسی

مقصود امام علی ؑ از این که می فرماید قبل و بعد و همراه هر چیزی خدا را دیدم، چیست؟ تجلی خداوند و صفات او در همه موجودات

سؤال متن — صفحه ۱۲ کتاب درسی

آیا می توان به ذات خداوند پی برد و چیستی او را مشخص کرد؟ خیر، زیرا خداوند حقیقتی نامحدود دارد و لازمه شناخت هر چیزی احاطه بر آن است؛ در حالی که ذهن انسان توان دسترسی و احاطه به خداوند را ندارد.

با وجود شباهت‌های ظاهری رابطه خدا و جهان با رابطه ساعت‌ساز و ساعت، تفاوت‌های این دو رابطه را بنویسید. (۱) ساعت‌ساز هستی‌بخش اجزای ساعت نیست و فقط نظم‌دهنده به آن‌ها است، اما خداوند هم هستی‌بخش است و هم نظم‌دهنده. (۲) نظم و پیچیدگی جهان، فراتر از نظم یک ساعت است. (۳) بقای ساعت وابسته به ساعت‌ساز نیست، اما بقای جهان وابسته به خداوند است.

درس ۲ یگانه‌بی‌همتا

آموزش به روش سؤال‌های امتحانی از خط به خط کتاب درسی

سؤال	پاسخ
۱- با توجه به دعای حضرت علی <small>علیه السلام</small> در ارتباط با کسب عزت با بندگی خداوند به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) عبارت «این افتخار بس که تو پروردگار منی» به کدام یک از مراتب توحید اشاره دارد؟ ب) کدام عزت برای انسان کافی است؟	۱- الف) توحید در ربوبیت ب) بندگی خداوند
۲- مهم‌ترین اعتقاد دینی است.	۲- توحید (یکتاپرستی)
۳- در اسلام بی‌اعتقادی به، موجب بی‌اعتباری تمام اعتقادات دیگر می‌شود.	۳- توحید
۴- توحید مانند روحی در پیکره معارف و حضور دارد و به آن حیات و معنا می‌بخشد.	۴- احکام دین
۵- رسول خدا <small>صلی الله علیه و آله</small> از همان آغاز رسالت از مشرکان می‌خواست با گفتن کدام جمله دست از شرک و بت‌پرستی بردارند و به خدای یگانه ایمان بیاورند؟	۵- «لا اله الا الله»
۶- چند مورد از نتایج گفتن جمله «لا اله الا الله» توسط مشکریان و گرویدن آنان به اسلام را نام ببرید.	۶- ۱) تمام احکام و حقوق اسلامی فرد به رسمیت شناخته می‌شد. ۲) دفاع از حقوق او بر دیگر مسلمانان واجب می‌گشت. ۳) در زمره برادران و خواهران دینی قرار می‌گرفت.
۷- پایبندی به جمله «لا اله الا الله» چه اثری بر زندگی شخص تازه‌مسلمان داشت؟	۷- پایبندی به آن، همه زندگی فرد مسلمان را در رابطه با خدا، خویش، خانواده و دیگر مخلوقات تغییر می‌داد.
۸- اصطلاح «توحید در خالقیت» را تعریف کنید.	۸- توحید در خالقیت عبارت از این است که معتقد باشیم خداوند تنها مبدأ و خالق جهان است، موجودات همه مخلوق او هستند و در کار آفرینش شریک و همتایی ندارد.
۹- اصطلاح «توحید در مالکیت» را تعریف کنید.	۹- هر کس که چیزی را پدید می‌آورد، مالک آن است. از آن‌جا که خداوند تنها خالق جهان است، پس تنها مالک آن نیز هست.
۱۰- اصطلاح «حق ولایت و سرپرستی» به چه معناست؟ آن را تعریف کنید.	۱۰- هر کس که مالک چیزی باشد، حق تصرف و تغییر در آن چیز را دارد، اما دیگران بدون اجازه وی نمی‌توانند در آن تصرف یا از آن استفاده کنند. به این حق تصرف، ولایت و سرپرستی می‌گویند.
۱۱- عبارت قرآنی ﴿ مَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَلِيٍّ وَلَا يُشْرِكُ فِي حُكْمِهِ أَحَدًا ﴾ به کدام یک از مراتب توحید اشاره دارد؟	۱۱- توحید در ولایت (ترجمه آیه: آن‌ها هیچ ولی [سرپرستی] جز او ندارند ...)
۱۲- به چه علت خداوند تنها ولی و سرپرست جهان است؟	۱۲- از آن‌جا که خداوند، تنها مالک جهان است، تنها ولی و سرپرست جهان نیز هست.
۱۳- در ارتباط با جمله «مخلوقات، جز به اذن و اجازه خداوند نمی‌توانند در جهان تصرف کنند»، توضیح دهید که آیا چنین ادنی به معنای واگذاری ولایت خدا به دیگری می‌باشد یا خیر؟	۱۳- خیر، بلکه بدین معناست که خداوند آن شخص را در مسیر و مجرای ولایت خود قرار داده است.

۱۴- این که خداوند پیامبر اکرم ﷺ را ولیّ انسان‌ها معرفی می‌کند، به چه معناست؟	۱۴- بدین معناست که ایشان را واسطهٔ ولایت خود و رسانندهٔ فرمان‌هایش قرار داده است.
۱۵- لغت «رب» به چه معناست؟	۱۵- «رب» به معنای مالک و صاحب اختیاری است که تدبیر و پرورش مخلوق به دست اوست.
۱۶- به چه علت خداوند تنها ربّ هستی می‌باشد؟	۱۶- به این علت که خداوند تنها خالق، مالک و ولیّ جهان است.
۱۷- اداره‌کردن جهان توسط خداوند و به پیش‌بردن آن به سوی مقصدی که برای آن معین شده است، بیانگر کدام مرتبهٔ توحید است؟	۱۷- توحید در ربوبیت
۱۸- توحید در ربوبیت بدین معناست که موجودات قدرت تدبیر ندارند. (درست / نادرست)	۱۸- نادرست؛ توحید در ربوبیت بدین معنا نیست که موجودات، به خصوص انسان، نقشی در پرورش و تدبیر سایر مخلوقات ندارند.
۱۹- معنای درست توحید در ربوبیت در ارتباط با باغبانی که زحمت می‌کشد و به پرورش درختان اقدام می‌کند، چیست؟	۱۹- بدین معناست که این باغبان و تدبیرش همه از آن خدا و تحت تدبیر او هستند.
۲۰- کشاورز وقتی رابطهٔ خود را با خدا بررسی می‌کند، به چه نتیجه‌ای دست می‌یابد؟	۲۰- می‌بیند که هم خودش و هم نیرو و توانش از آن خداوند است و کشت و زرع او براساس استعدادی که خداوند در آن قرار داده رشد کرده و محصول داده است.
۲۱- زارع حقیقی و پرورش‌دهندهٔ اصلی زراعت یک کشاورز، خود آن کشاورز است. (درست / نادرست)	۲۱- نادرست؛ زارع حقیقی و پرورش‌دهندهٔ اصلی زراعت یک کشاورز، خداوند است.
۲۲- این تصور که چند خدا وجود دارد و هر یک خالق بخشی از جهان‌اند، به معنای آن نیست که هر کدام از آن‌ها محدود و ناقص می‌باشند. (درست / نادرست)	۲۲- نادرست؛ به معنای آن است که هر کدام از آن‌ها محدود و ناقص هستند و به تنهایی نمی‌توانند کل جهان را خلق کنند.
۲۳- اصطلاحات زیر را تعریف کنید. الف) شرک در خالقیت ب) شرک در مالکیت	۲۳- الف) اگر کسی معتقد باشد که این جهان را چند خالق آفریده‌اند، گرفتار شرک در خالقیت شده است. ب) اعتقاد به این که علاوه بر خداوند و در کنار او، دیگران هم مالک بخشی از جهان هستند.
۲۴- اگر کسی به شرک در خالقیت اعتقاد داشته باشد، گرفتار کدام‌یک از مراتب دیگر شرک هم خواهد بود؟	۲۴- شرک در مالکیت
۲۵- اصطلاحات زیر را تعریف کنید. الف) شرک در ولایت ب) شرک در ربوبیت	۲۵- الف) اعتقاد به این که علاوه بر خداوند و در کنار او، دیگرانی نیز هستند که سرپرستی جهان را بر عهده دارند و خودشان حق تصرف در جهان را دارا می‌باشند. ب) اعتقاد به این که علاوه بر خداوند و در کنار او، دیگرانی نیز هستند که تدبیر امور موجودات را بر عهده دارند.
۲۶- اگر کسی در کنار ربوبیت الهی، برای خود یا سایر مخلوقات حساب جداگانه باز کند و گمان کند که کسی می‌تواند مستقل از خداوند، امور را تدبیر کند، گرفتار شرک در ولایت شده است. (درست / نادرست)	۲۶- نادرست؛ چنین کسی گرفتار شرک در ربوبیت شده است.
۲۷- عبارات قرآنی ﴿قُلْ هُوَ اللَّهُ أَحَدٌ﴾ و ﴿لَمْ يَكُنْ لَهُ كُفُوًا أَحَدٌ﴾ هر یک به ترتیب به کدام اصول اعتقادی اشاره دارند؟	۲۷- اصل توحید (یکتابودن خداوند) - اصل توحید (یکتابودن خداوند)
۲۸- کدام‌یک از عبارات قرآنی زیر به «بی‌نیازی کامل خداوند» اشاره دارد؟ ۱) ﴿لَمْ يَلِدْ وَ لَمْ يُولَدْ وَ لَمْ يَكُنْ لَهُ كُفُوًا أَحَدٌ﴾ ۲) ﴿اللَّهُ الصَّمَدُ﴾	۲۸- گزینهٔ «۲» (ترجمهٔ آیه: خداوند بی‌نیاز است.)
۲۹- مشخص کنید هر یک از موارد زیر به ترتیب بیانگر کدام مرتبهٔ توحید هستند؟ الف) ﴿قُلْ مَنْ رَبُّ السَّمَاوَاتِ وَ الْأَرْضِ﴾ ب) ﴿قُلِ اللَّهُ خَالِقُ كُلِّ شَيْءٍ﴾	۲۹- الف) توحید در ربوبیت (ترجمهٔ آیه: بگو پروردگار آسمان‌ها و زمین کیست؟) ب) توحید در خالقیت (ترجمهٔ آیه: بگو خالق همه‌چیز خداست.)

۳۰- مشخص کنید هر یک از عبارات قرآنی زیر به ترتیب نفی کننده کدام یک از اقسام شرک هستند؟ (الف) ﴿قُلْ أَفَاتَّخَذْتُمْ مِنْ دُونِهِ أَوْلِيَاءَ﴾ (ب) ﴿لَا يَمْلِكُونَ لِنَفْسِهِمْ نَفْعًا وَلَا ضَرًّا﴾ (ج) ﴿أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَابَهَ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ﴾	۳۰- الف) شرک در ولایت ب) شرک در مالکیت ج) شرک در خالقیت
۳۱- لغت «توحید» به چه معناست؟	۳۱- اعتقاد به خدای یگانه
۳۲- خداوند میان پدیده‌های جهان، رابطه..... را حاکم کرده است؛ همان طور که آتش موجب گرما و دارو سبب شفا می‌باشد.	۳۲- علیت
۳۳- هر یک از اعمال معنوی «دعا»، «دادن صدقه» و «صله رحم» چه ثمراتی را به دنبال دارند؟	۳۳- دعا سبب آمرزش، صدقه موجب دفع بلا و صله رحم موجب افزایش طول عمر است.
۳۴- درخواست از اولیای الهی برای اجابت خواسته‌ها منافاتی با توحید.....	۳۴- ندارد
۳۵- عقیده به توانایی پیامبر اکرم ﷺ و اولیای دین ﷺ در برآوردن حاجات انسان چه هنگام موجب شرک است؟	۳۵- زمانی که این توانایی را از خود آن‌ها و مستقل از خدا بدانیم.
۳۶- روح مطهر رسول خدا ﷺ پس از رحلت زنده است و می‌تواند به انسان‌ها یاری برساند. (درست / نادرست)	۳۶- درست
۳۷- کدام گروه از مسلمانان درخواست‌هایی مانند «طلب دعا از پدر و مادر برای سعادت‌مندی» را مصداق شرک می‌دانند؟	۳۷- تکفیری‌ها
۳۸- دو مورد از اعتقادات جریان «تکفیری» را نام ببرید.	۳۸- ۱) توسل به پیامبران و معصومین ﷺ شرک است. ۲) طلب دعا و شفیع قراردادن دیگران برای این که خدا انسان را ببخشد، شرک است.
۳۹- کدام جریان، بزرگ‌ترین ضربه را بر اسلام وارد کرده و سبب تنفر برخی از مردم جهان از اسلام شده است؟	۳۹- جریان تکفیری

بررسی آیات واحادیث

دعا امام علی علیه السلام «خدای من! مرا این عزت بس که بنده تو باشم و این افتخار بس که تو پروردگار منی، خدای من! تو همان گونه‌ای که من دوست دارم، پس مرا همان گونه قرار ده که تو دوست داری.»

پیام: کلیدواژه «پروردگار» در عبارت فوق، نشانگر توحید در ربوبیت است. / بالاترین عزت، بندگی خدا و بالاترین افتخار، ربوبیت خداوند برای بنده است.

آیه ﴿اللَّهُ خَالِقُ كُلِّ شَيْءٍ...﴾ (سوره زمر، آیه ۶۲) **ترجمه:** «خدا آفریننده هر چیزی است...»

پیام: کلیدواژه «خالق» در این آیه بیانگر توحید در خالقیت است.

آیه ﴿وَلِلَّهِ مَا فِي السَّمَاوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ...﴾ (سوره آل عمران، آیه ۱۰۹) **ترجمه:** «آن چه در آسمان‌ها و زمین است، از آن خداست.»

پیام: این آیه، بیانگر توحید در مالکیت خداوند است.

آیه ﴿... مَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَلِيٍّ وَلَا يُشْرِكُ فِي حُكْمِهِ أَحَدًا﴾ (سوره کوف، آیه ۲۶) **ترجمه:** «آن‌ها هیچ ولی [سرپرستی] جز او ندارند و او در فرمانروایی خویش کسی را شریک نمی‌سازد.»

پیام: کلیدواژه «ولی» در این آیه به توحید در ولایت اشاره دارد.

آیه ﴿قُلْ أَعْيَبَ اللَّهُ ابْنِي رَبًّا وَهُوَ رَبُّ كُلِّ شَيْءٍ...﴾ (سوره انعام، آیه ۱۶۴) **ترجمه:** «بگو: آیا جز خدا پروردگاری را بطلبم در حالی که او پروردگار همه چیز است؟...»

پیام: عبارت ﴿قُلْ أَعْيَبَ اللَّهُ ابْنِي رَبًّا﴾ نافی شرک در ربوبیت و عبارت ﴿هُوَ رَبُّ كُلِّ شَيْءٍ﴾ بیانگر توحید در ربوبیت است.

سوره ﴿بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ * قُلْ هُوَ اللَّهُ أَحَدٌ (۱) اللَّهُ الصَّمَدُ (۲) لَمْ يَلِدْ وَلَمْ يُولَدْ (۳) وَ لَمْ يَكُنْ لَهُ كُفُوًا أَحَدٌ (۴)﴾ (سوره توفهید) **ترجمه:** «به نام خداوند بخشنده مهربان * بگو خداوند یکتا است (۱) خدای بی‌نیاز (۲) نه هرگز زاییده و نه زاده شده (۳) و برای او هیچ‌گاه شبیه و مانندی نبوده است (۴)»

پیام: آیات (۱) و (۴) به «اصل توحید و یگانگی خداوند» اشاره دارند. / آیه (۲) به بی‌نیازی کامل خداوند اشاره دارد.

آیه ﴿قُلْ مَنْ رَبُّ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ قُلِ اللَّهُ قُلْ أَفَاتَّخَذْتُمْ مِنْ دُونِهِ أَوْلِيَاءَ لَا يَمْلِكُونَ لِأَنْفُسِهِمْ نَفْعًا وَلَا ضَرًّا قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الْأَعْمَى وَالْبَصِيرُ أَمْ هَلْ تَسْتَوِي الظُّلُمَاتُ وَالنُّورُ أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَابَهُ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ قُلِ اللَّهُ خَالِقُ كُلِّ شَيْءٍ وَهُوَ الْوَاحِدُ الْقَهَّارُ﴾ (سوره رعد، آیه ۱۶) **ترجمه:** «بگو پروردگار آسمان‌ها و زمین کیست؟ بگو خدا است. بگو آیا غیر از او سرپرستانی گرفته‌اید که [حتی] اختیار سود و زیان خود را ندارند؟ بگو آیا نابینا و بینا برابر است؟ یا تاریکی‌ها و روشنایی برابرند؟ یا آن‌ها شریک‌هایی برای خدا قرار داده‌اند که [آن شریکان هم] مثل خداوند آفرینشی داشته‌اند و در نتیجه این دو آفرینش بر آن‌ها مشتبه شده است [و از این رو شریکان را نیز مستحق عبادت دیده‌اند؟! بگو خدا آفریننده هر چیزی است و او یکتای مقتدر است.»

پیام: ﴿قُلْ مَنْ رَبُّ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ﴾ ← توحید در ربوبیت / ﴿قُلْ أَفَاتَّخَذْتُمْ مِنْ دُونِهِ أَوْلِيَاءَ﴾ ← نفی در شرک و ولایت / ﴿لَا يَمْلِكُونَ لِأَنْفُسِهِمْ نَفْعًا وَلَا ضَرًّا﴾ ← نفی شرک در مالکیت / ﴿أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَابَهُ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ﴾ ← نفی شرک در خالقیت / ﴿قُلِ اللَّهُ خَالِقُ كُلِّ شَيْءٍ﴾ ← توحید در خالقیت / ﴿هُوَ الْوَاحِدُ الْقَهَّارُ﴾ ← اصل توحید

سؤال متن

- **حقیقت توحید چیست و مراتب آن کدام‌اند؟** توحید به معنای «اعتقاد به یگانگی خداوند» است و دارای چندین مرتبه می‌باشد که از آن جمله می‌توان به «توحید در خالقیت»، «توحید در مالکیت»، «توحید در ولایت» و «توحید در ربوبیت» اشاره نمود.
- **مرز میان توحید و شرک چیست؟** مرز میان توحید و شرک بسیار ظریف است. این به آن معناست که چنانچه امور حاکم بر جهان هستی را به اذن خداوند و به خواست او بدانیم، دارای اعتقاد صحیحی بوده‌ایم و به توحید پایبند می‌باشیم. اما اگر در کنار خداوند برای عده‌ای از مخلوقات، حساب جداگانه باز کرده باشیم، دچار شرک شده‌ایم و از توحید فاصله گرفته‌ایم.
- **آیا درخواست از غیر خدا مساوی با شرک است؟** درخواست از غیر خدا تنها در حالی مساوی با شرک است که توانایی برآوردن حاجات را از خود آن‌ها و مستقل از خداوند بدانیم. اعتقاد صحیح در این مورد این است که آنان را واسطه‌ای برای دریافت فیض بدانیم.

سؤال متن

- **چرا خداوند در آفرینش جهان شریکی ندارد؟** زیرا که این تصور که جهان هستی دارای چند خدا می‌باشد و هر کدام خالق بخشی هستند یا با همکاری یکدیگر این جهان را آفریده‌اند، به این معناست که هر کدام از آن‌ها محدود و ناقص هستند و به تنهایی نمی‌توانند کل جهان را خلق کنند. هم‌چنین به معنای آن است که هر یک از خدایان مذکور کمالاتی دارند که دیگری آن کمالات را ندارد و گرنه عین همدیگر می‌شوند و دیگر چند خدا نیستند. پس تصور چندخدایی صحیح نیست و خدای واحد آفریننده جهان است.

تدبر در قرآن

- (الف) با توجه به اهمیت سوره توحید و جایگاه آن در قرآن کریم، در آیات این سوره تدبر کنید و پیام‌های آن را به دست آورید.
- (۱) آیات اول و چهارم به «اصل توحید و یگانگی خداوند» اشاره دارند. (۲) آیه دوم به بی‌نیازی کامل خداوند از غیر اشاره دارد.
- (ب) با توجه به آیه ۱۶ سوره رعد «قُلْ مَنْ رَبُّ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ قُلِ اللَّهُ...» به سؤالات زیر پاسخ دهید.
- ۱- کسی را می‌توانیم به عنوان ولی و سرپرست خود انتخاب کنیم که خالق جهان باشد (قل الله)
 - ۲- کسی که اختیار سود و زیان خود را ندارد نمی‌تواند ولی و سرپرست مردم باشد.
 - ۳- در چه صورت جا داشت که مردم در اعتقاد به توحید در شک بیفتند؟ با توجه به عبارت ﴿أَمْ جَعَلُوا لِلَّهِ شُرَكَاءَ خَلَقُوا كَخَلْقِهِ فَتَشَابَهُ الْخَلْقُ عَلَيْهِمْ﴾ چنانچه آن چیزهایی که مشرکان، شریک خدا قرار داده بودند، مانند خداوند، مخلوقاتی خلق کرده بودند، جای آن بود که آدمی در عقیده به توحید متزلزل شود و به خدایان دیگر نیز اعتقاد یابد.
 - (ج) مراتب توحید یا شرک را در آیات ذکرشده مشخص کنید. تمام این مراتب، در قسمت «بررسی آیات و احادیث»، در قسمت آیه مربوطه، بررسی گردیده است.

سؤال متن

- مرز توحید و شرک کجاست؟ آیا اگر کسی پزشک را وسیله درمان و بهبود بیماری بداند، مشرک است؟ آیا اگر کسی از غیر خدا درخواست کمک کند، گرفتار شرک شده است؟ آیا اگر کسی دعا را وسیله جلب مغفرت الهی و صدقه را وسیله دفع بلا بداند، مشرک است؟ و بالاخره، آیا توسل به پیامبران و معصومین علیهم‌السلام شرک به حساب می‌آید؟ در پاسخ به سؤال‌های فوق می‌گوییم:
- اولاً خداوند رابطه علیت را میان پدیده‌های جهان حاکم کرده است. مثلاً آتش موجب گرما و روشنی و دارو سبب شفا و بهبودی است. در امور معنوی نیز همین‌گونه است. دعا سبب آمرزش، صدقه موجب دفع بلا و صلوة رحم موجب افزایش طول عمر است.
- ثانیاً همان‌گونه که درخواست از پزشک برای درمان بیمار با توحید منافاتی ندارد، درخواست از اولیای الهی برای اجابت خواسته‌ها نیز منافاتی با توحید ندارد. بنابراین عقیده بر توانایی پیامبر اکرم صلی‌الله‌علیه‌وآله‌وسلم و اولیای دین در برآوردن حاجات انسان (مانند شفا دادن) وقتی موجب شرک است که این توانایی را از خود آن‌ها و مستقل از خدا بدانیم. اما اگر این توانایی را صرفاً از خدا و انجام آن را با درخواست اولیاء از خداوند و به اذن خدا بدانیم، عین توحید است.

به نظر شما، چرا دقیقاً در زمانی که مسلمانان در پرتو بیداری اسلامی، در حال معرفی اسلام حقیقی به مردم جهان بودند و حتی جمعیت کشورهای صنعتی به سرعت در حال تغییر به نفع مسلمانان بود، چنین جریانی شکل گرفت؟ سیاستمداران کشورهای غربی و ایالات متحده آمریکا و به طور کل مستکبران جهانی، از آن‌جا که این بیداری را به ضرر منافع خود می‌دیدند، چنین جریانی را راه انداختند و از آن پشتیبانی کردند تا بیداری در جهان اسلام شکل نگیرد.

اندیشه و تحقیق

صفحه ۲۶ کتاب درسی

باور به توحید در خالقیت، مالکیت، ولایت و ربوبیت چه تأثیری در زندگی ما می‌گذارد؟ باور به این مراتب توحید موجب می‌شود انسان، در آفرینش جهان کسی را برای خداوند شریک قرار ندهد و مالکیت آسمان‌ها و زمین را فقط از آن خدا بداند و حق تغییر، تصرف و تدبیر جهان را تنها شایسته خداوند بداند.

درس ۳ توحید و سبک زندگی

آموزش به روش سؤال‌های امتحانی از خط به خط کتاب درسی

سؤال	پاسخ
۱- زندگی توحیدی ریشه در چه چیزی دارد؟	۱- جهان‌بینی توحیدی
۲- افکار و اعتقادات هر فرد مهم‌ترین عامل در تعیین هدف‌ها و رفتارهای اوست. (درست / نادرست)	۲- درست
۳- چه کسی می‌تواند جهت زندگی خود را خدا قرار دهد؟	۳- کسی که خداوند را به عنوان تنها خالق جهان پذیرفته است و ایمان دارد که او پروردگار هستی است.
۴- کدام‌یک از افراد مسلمان، اثرات پذیرش دین اسلام را نزد پادشاه حبشه بازگو کرد؟	۴- جعفر بن ابی‌طالب
۵- پیامبر ﷺ به هنگام بعثت با چه صفاتی شناخته می‌شد؟	۵- صداقت، امانت‌داری و عفت
۶- میزان تأثیرگذاری اعتقاد افراد به خداوند به درجه ایمان افراد به توحید و یکتاپرستی بستگی دارد. (درست / نادرست)	۶- درست
۷- ویژگی‌های «انسانی» را که در مسیر توحید گام برداشته است، نام ببرید.	۷- ۱) در زندگی خود از فرمان‌های خدا اطاعت می‌کند. ۲) می‌کوشد تمایلات درونی و تصمیم‌ها و فعالیت‌های خود را در جهت خواست و رضایت الهی قرار دهد.
۸- انسانی که به مراتبی از توحید عملی در بُعد فردی رسیده باشد، می‌کوشد تا تمایلات خود را در چه راستایی قرار دهد؟	۸- چنین فردی می‌کوشد تمایلات درونی و تصمیم‌ها و فعالیت‌های خود را در جهت خواست و رضایت الهی قرار دهد و به طور کلی در تمام برنامه‌های روزانه خود خدا را در نظر می‌گیرد و تلاش می‌کند از دایره فرمان‌های او خارج نشود.
۹- این‌که گفته می‌شود: «برای انسان موحد جهان معنای خاص خود را دارد.» به چه معناست؟	۹- یعنی از نظر او هیچ حادثه‌ای در عالم بی‌حکمت نیست، گرچه حکمت آن را نداند.
۱۰- ویژگی‌های انسان موحد را در راستای حکیمانه دانستن جهان نام ببرید.	۱۰- ۱) موحد واقعی همواره امیدوار است. ۲) در مقابل سختی‌ها و مشکلات، صبور و استوار است. ۳) مشکلات را زمینه موفقیت‌های آینده‌اش قرار می‌دهد.
۱۱- انسان موحد چه باوری در ارتباط با دشواری‌های زندگی دارد؟	۱۱- باور دارد که دشواری‌های زندگی نشانه بی‌مهری خداوند نیست، بلکه بستری برای رشد و شکوفایی اوست.
۱۲- چهار مورد از ویژگی‌های انسان موحد را بنویسید.	۱۲- ۱) در انتخاب شغل، همسر و ... و مجموعه برنامه‌های روزانه خود، خدا را در نظر می‌گیرد. ۲) سختی‌های زندگی را بستری برای رشد و شکوفایی خود می‌داند. ۳) تلاش می‌کند از دایره فرمان‌های خداوند خارج نشود. ۴) موجودات جهان را مخلوق خدا می‌بیند و می‌داند که خداوند او را در برابرشان مسئول قرار داده است.



ریاضیات گسسته

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱ استدلال ریاضی

درسنامه

برای اثبات درستی یک گزاره، روش‌های مختلفی وجود دارد.

مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گوییم. این روش استدلال به صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود.

مثال برای عبارتهای زیر مثال نقض بیاورید.

(الف) مجموع دو عدد اول، عددی مرکب است.

(ب) اگر n^2 عدد صحیح باشد، آن گاه n نیز عددی صحیح است.

(پ) به ازای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از یک، عدد $2^n - 1$ اول است.

پاسخ (الف) مجموع دو عدد اول ۲ و ۳، برابر $2 + 3 = 5$ است که عددی مرکب نیست.

$$n^2 = 2 \Rightarrow n = \sqrt{2} \quad (\text{ب})$$

$$n = 4 \Rightarrow 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5 \quad (\text{پ})$$

اثبات به روش مستقیم

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم.

مثال گزاره «مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.» را به روش مستقیم اثبات کنید.

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^3 = (2k + 1)^3 = \underbrace{8k^3 + 12k^2 + 6k + 1}_{\text{زوج}} = 2k' + 1 \quad \text{پاسخ}$$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 + n + 1$ عددی فرد است.

$$n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1 = \underbrace{2k(2k + 1) + 1}_{\text{زوج}} + 1 = \text{فرد} \quad \text{پاسخ (۱) اگر } n \text{ زوج باشد، پس } n = 2k.$$

$$(۲) \text{ اگر } n \text{ فرد باشد، پس } n = 2k + 1.$$

$$n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1 = (2k + 1)(2k + 2) + 1 = \underbrace{(2k + 1)2(k + 1)}_{\text{زوج}} + 1 = \text{فرد}$$

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می‌شود) و فرض اولیه و حقایقی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، به یک نتیجه غیرممکن یا در تناقض با فرض اولیه می‌رسیم.

مثال گزاره زیر را به روش برهان خلف ثابت کنید.

«حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.»

پاسخ فرض کنیم α عدد گویای ناصفر و β یک عدد گنگ باشد.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\alpha\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف)، پس گویا است. تقسیم دو عدد گویا باز هم گویا است؛ پس داریم: $\frac{\alpha\beta}{\alpha} = \beta$ عددی گویا است که این خلاف فرض است و در نتیجه فرض خلف باطل و $\alpha\beta$ گنگ است.

اثبات بازگشتی

دو حکم را معادل یا هم‌ارز می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که با حکم اولیه هم‌ارز باشد و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش اثبات، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

پاسخ

$$\frac{b+a}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \xrightarrow{a,b>0} (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

سؤال متن

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های (الف) و (ب) کافی هستند؟ اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟ خیر، ارائه مثال‌های بیشتر نیز کفایت نمی‌کند. زیرا در ریاضیات ارائه مثال برای نشان دادن درستی یک گزاره قابل قبول نیست بلکه باید این موضوع در حالت کلی اثبات شود. در واقع زمانی که شما با مثال درستی یک موضوع را بررسی می‌کنید شاید مثال‌هایی باشد که نشان دهد آن گزاره غلط است و شما آن مثال‌ها را بررسی نکرده باشید. (هم‌چنین ممکن است مثال نقضی تاکنون پیدا نشده باشد).

کار در کلاس

هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

اشتباهات متداول

متأسفانه بعضی از دانش‌آموزان برای اثبات مسائل از مثال عددی استفاده می‌کنند. این کار کاملاً غلط است. یادآوری می‌کنیم که مثال عددی فقط برای نشان دادن نادرستی یک مسئله بیان می‌شود.

(الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

نکته توجه کنید که همواره اعداد زوج را با نماد $2k$ و اعداد فرد را با نماد $2k+1$ یا $2k-1$ نشان می‌دهیم.

درست، دو عدد فرد $2k+1$ و $2k'+1$ را در نظر می‌گیریم. زوج $2(k+k'+1) = 2k'' = 2k+2k'+2 = (2k+1) + (2k'+1)$

(ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ نادرست

$$\left. \begin{aligned} x = 36 &\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{36} = 6 \\ y = 64 &\Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{64} = 8 \\ x + y = 100 &\Rightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{100} = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 + 8 \neq 10$$

(پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

یادآوری عددی را اول نامیم که فقط بر ۱ و خودش بخش پذیر باشد.

نادرست، برای $n = 6$ داریم: $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

۶۳ اول نیست زیرا بر ۳ بخش پذیر است.

(ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

یادآوری مجموعه اعداد گویا؛ مجموعه تمام اعداد کسری هستند که مخرج آن‌ها غیرصفر باشد.

$$Q = \left\{ \frac{M}{N}; M, N \in \mathbb{Z}, N \neq 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M &= \frac{a}{b}, & b &\neq 0 \\ N &= \frac{c}{d}, & d &\neq 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow M + N = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

درست، دو عدد گویای M و N را در نظر بگیرید:

چون a, b, c, d صحیح هستند، پس $ad + bc$ نیز صحیح است و چون d و b مخالف صفرند؛ پس $bd \neq 0$ ؛ در نتیجه عدد

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

یک عدد گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ ، آن گاه $B = C$.
 نادرست. باید مثال نقض بیاوریم. سه مجموعه A ، B و C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{1, 3, 5\} \\ C = \{2, 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}, \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$$

در نتیجه $A \cup B = A \cup C$ در حالی که $B \neq C$.

(ج) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $4k + 1$ مربع کامل است.

درست؛ دو عدد طبیعی متوالی n و $n + 1$ را در نظر می‌گیریم:

$$k = n(n+1) = n^2 + n \Rightarrow 4k + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = \text{مربع کامل}$$

تذکر عددی مربع کامل است که جذر کامل داشته باشد.

مثال صفحه ۴ کتاب درسی

مثال

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ ، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

حل: برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است. (چرا؟)

ب) اگر $a \neq 0$ ، آن گاه $a \times b = 0$. از طرفی از گزاره $p \vee q$ هرگاه حداقل یکی درست باشد، گزاره درست است. قرار می‌دهیم:

$$p: a = 0$$

$$q: b = 0$$

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته جدول ارزش: $p \vee q$

طبق جدول، $p \vee q$ زمانی درست که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشند. به بیان دیگر هرگاه p و q هر دو نادرست باشند، آن گاه $p \vee q$ نیز نادرست است.

حکم مسئله به صورت $p \vee q$ است که چون p صحیح است؛ پس $p \vee q$ نیز صحیح است.

(ب) اگر $a \neq 0$ در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = 0$ در a^{-1} داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

کار در کلاس صفحه ۵ کتاب درسی

کار در کلاس

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

چون ab فرد است، لذا a و b هر دو باید فرد باشند (اگر یکی از آن‌ها زوج باشد، آن گاه ضرب آن‌ها زوج می‌شود.) و در نتیجه:

$$a = (2k+1) \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$b = (2k'+1) \Rightarrow b^2 = (2k'+1)^2 = 4k'^2 + 4k' + 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4(k^2 + k + k'^2 + k') + 2 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k')}_{k''} = 2k'' = \text{زوج}$$

(ب) $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است و $n \in S$. اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n \in A$.

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = \text{فرد} \Rightarrow n = 1 \text{ غیر قابل قبول است.}$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{4 \times 9}{4} = 9 = \text{فرد} \Rightarrow n = 2 \text{ غیر قابل قبول است.}$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{9 \times 16}{4} = 36 = \text{زوج} \Rightarrow n = 3 \text{ قابل قبول است} \Rightarrow 3 \in A$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{16 \times 25}{4} = 100 = \text{زوج} \Rightarrow n = 4 \text{ قابل قبول است} \Rightarrow 4 \in A$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{25 \times 36}{4} = 225 = \text{فرد} \Rightarrow n = 5 \text{ غیر قابل قبول است.}$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{36 \times 49}{4} = 441 = \text{فرد} \Rightarrow n = 6 \text{ غیر قابل قبول است.}$$

a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم، a_1, a_2, a_3 را به ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و b_1, b_2, b_3 را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (5 - 8)(8 - 1)(1 - 5) = (-3)(7)(-4) = 84$$

اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس سه عامل $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ هم باید فرد باشند (چرا؟) زیرا حاصل ضرب سه عدد صحیح زمانی فرد است که هر سه عامل فرد باشند و در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است!

کار در کلاس

صفحه ۶ کتاب درسی

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

اشتباهات متداول

در اثبات به روش برهان خلف، اولین قدم این است که حکم را نقض کنیم (فرض خلف). بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه فرض مسئله را نقض می‌کنند و آن را فرض خلف در نظر می‌گیرند.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد (حکم را خلف کرده‌ایم)، پس گویا است. معکوس هر عدد گویای غیرصفر باز هم گویاست؛ پس:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow x = \text{گویا}$$

که این مطلب با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و $\frac{1}{x}$ گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد؛ در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = (f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

از طرفی f در $x = a$ پیوسته است؛ پس:

از تفاضل این دو رابطه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + g(a) - f(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \cancel{f(a)} + g(a) - \cancel{f(a)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

و رابطه آخر به معنای پیوسته‌بودن تابع g است که با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

مثال

صفحه ۶ کتاب درسی

ترکیب دوشروطی $(a, b) \in \mathbb{R}, a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ درست است ولی ترکیب دوشروطی $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ درست نیست (چرا؟)

در ترکیب دوشروطی $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ، ارزش گزاره‌های $a = b$ و $a^2 = b^2$ یکسان نیست، زیرا: $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \vee a = -b$ به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a \neq b, \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2$$

در نتیجه گزاره $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ همواره درست ولی گزاره $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ یک گزاره شرطی نادرست است.

کار در کلاس

صفحه ۷ کتاب درسی

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دوشروطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

نادرست زیرا دو گزاره $a < b$ و $a^2 < b^2$ هم‌ارزش نیستند یعنی ممکن است یکی درست و دیگری نادرست باشد. مثلاً:

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a < b$$

در حالی که $a^2 = 16$ و $b^2 = 4$ و $a^2 < b^2$ کم‌تر از b^2 نیست یعنی گزاره $a < b$ درست ولی گزاره $a^2 < b^2$ نادرست است.

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

درست است زیرا دو گزاره $a < b$ و $a^3 < b^3$ هم‌ارزش هستند یعنی یا هر دو درست هستند و یا این‌که هر دو نادرست هستند.

مثال صفحه ۷ کتاب درسی

اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

اگر $a > 0$ ، داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

این ترکیب دوشروطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم‌ارز هستند؟

نکته در اثبات به روش بازگشتی، کلیه روابط باید برگشت‌پذیر باشند به عبارتی دیگر بین هر دو عبارت باید علامت \Leftrightarrow برقرار باشد.

زیرا با توجه به $a > 0$ ، از درستی هر کدام از گزاره‌ها می‌توان درستی دیگری را نتیجه گرفت. اگر رابطه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ برای $a > 0$ درست

باشد آن‌گاه کل نامساوی را در a ضرب می‌کنیم (جهت عوض نمی‌شود):

و برعکس اگر رابطه $a^2 + 1 \geq 2a$ برای $a > 0$ درست باشد، آن‌گاه کل نامساوی را بر a تقسیم می‌کنیم (جهت عوض نمی‌شود):

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq \frac{2a}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

اثبات کدام یک ساده‌تر است؟ $a^2 + 1 \geq 2a$

$$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

هم‌چنین

$$a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

و در نهایت:

آخرین گزاره یعنی $(a - 1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است.

پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > 0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0. \text{ همواره برقرار است.}$$

صفحه ۸ کتاب درسی

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

بله، زیرا از درستی هر یک می‌توان درستی گزاره دیگر را نتیجه گرفت.

$$n = \text{زوج} \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k' = \text{زوج}$$

برعکس: اگر n^2 زوج باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم n نیز زوج است. به روش برهان خلف فرض می‌کنیم n فرد باشد: (حکم را خلف کرده‌ایم.)

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد}$$

یعنی n^2 نیز فرد است و این موضوع با فرض زوج بودن n^2 در تناقض است؛ در نتیجه فرض خلف باطل است و n زوج است.

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

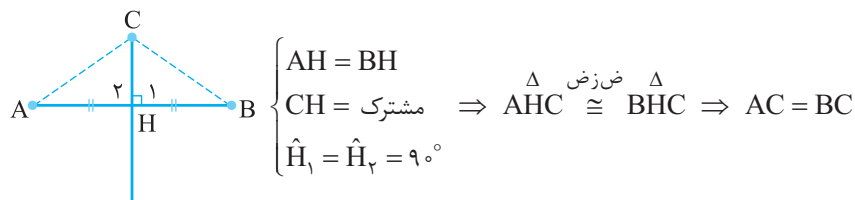
(۱) نقطه C روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

(۲) فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

بله زیرا از درستی هر یک می‌توان درستی گزاره دیگر را نتیجه گرفت.

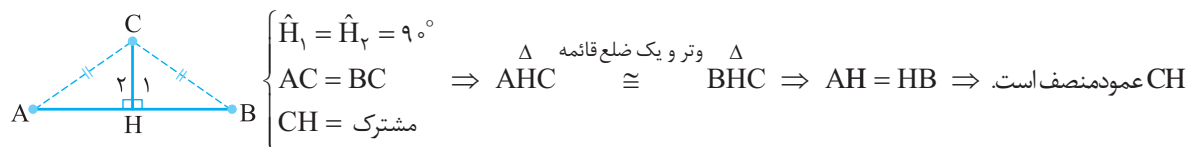
ابتدا فرض می‌کنیم نقطه C روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، با نوشتن هم‌نهشتی در دو مثلث ایجادشده به تساوی $AC = BC$

می‌رسیم.



برعکس فرض می‌کنیم نقطه C فاصله‌اش از A و B یکسان باشد پس $AC = BC$. از ارتفاع CH را بر AB رسم می‌کنیم. نشان

می‌دهیم CH عمودمنصف است.



۱- گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

اشتباهات متداول در مسائل هم‌ارزی، دقت کنید حکم مسئله به صورت دوشروطی است. اگر یک طرف آن درست نباشد کل مسئله نادرست خواهد بود.

نکته این سه تمرین که به روش بازگشتی اثبات می‌شوند از سوالات مهم امتحانی هستند و در هر سه در نهایت باید به اتحادهای مربع دوجمله‌ای برسیم.

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر و هم‌علامت) باشند، داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times xy} \frac{x^2 y}{y} + \frac{xy^2}{x} \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{اتحاد}} (x - y)^2 \geq 0$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2zx) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد}} (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2xy - 2x - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

۲- عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.

$$x = \frac{1}{3} \text{ آن گاه } x^3 = \frac{1}{27} \text{ و } x^2 = \frac{1}{9} \text{ در نتیجه } x^3 < x^2$$

۳- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\alpha - \beta$ گنگ نباشد؛ پس گویاست.

$$(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \text{گویا}$$

این مطلب با فرض مسئله مبنی بر گنگ بودن α در تناقض است. پس فرض خلف باطل و $\alpha - \beta$ گنگ است.

$$(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \Rightarrow \beta = \text{گویا}$$

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد پس گویاست.

و این مطلب با گنگ بودن β در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

۴- آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ ؟

بله، کافی است یکی از دو عدد صحیح x یا y را صفر در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 = y^2 \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 = x^2 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 = 0$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۵- آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

بررسی مستقیم گزاره $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ دشوار است و به کمک روش بازگشتی نشان می‌دهیم چنین a و b ای وجود ندارد.

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{b+a}{ab} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (a+b)^2 = ab \xrightarrow{\text{اتحاد}} a^2 + b^2 + 2ab - ab = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

اما گزاره آخر: $(a^2 + b^2 + ab = 0)$ را به فرم معادله درجه دوم $a^2 + b(a) + b^2 = 0$ بر حسب a بنویسیم، آن گاه:

$$\Delta = b^2 - 4(1)(b^2) = -3b^2$$

یعنی $\Delta < 0$ ؛ پس معادله جواب ندارد. پس a و b ای غیر صفر وجود ندارد که رابطه بالا برای آن‌ها برقرار باشد.

۶- گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

تذکر مربع به معنای توان ۲ و مکعب به معنای توان ۳ است.

درست است. عدد فرد $2k+1$ را در نظر می‌گیریم: فرد $= 2k'+1 = 2(2k'+1) + 1 = 4k'+2k'+1 = 4k'+2k'+1 = (2k'+1)^2 =$ مربع فرد

فرد $= 2k'+1 = 2(4k'+2k'+1) + 1 = 8k'+4k'+2k'+1 = 12k'+4k'+1 = (2k'+1)^3 =$ مکعب فرد

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

یادآوری اتحاد $(a \pm b)^3$ را مکعب دوجمله‌ای می‌نامیم.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

درست، پنج عدد متوالی $n+2$ و $n+1$ و n و $n-1$ و $n-2$ را در نظر می‌گیریم. عدد وسطی n است و میانگین آن‌ها برابر است

با مجموع آن‌ها تقسیم بر ۵. عدد وسطی $= \frac{(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2)}{5} = \frac{5n}{5} = n$

سوالات امتحانی

۱ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (۲)

الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$. (درست / نادرست)

ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$. (درست / نادرست)

پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، داریم $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$. (درست / نادرست)

ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است. (درست / نادرست)

۲ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (۲)

۳ به روش مستقیم ثابت کنید اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است. (۲)

۴ ثابت کنید اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است. (۲)

۵ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + 2\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 3\beta$ گنگ است. (۲)

فصل ۱

ریاضیات
گسسته

پاسخ سوالات امتحانی

۱ الف) نادرست (۵/۰)

$$(x=36, y=4 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \neq \sqrt{x+y} = \sqrt{40})$$

ب) درست (۵/۰)

پ) نادرست (۵/۰) (ابطه $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ نادرست است). برقرار نیست. $2 < -3 \Rightarrow 4 < 9$

$$a=2, a^2=4$$

$$b=-3, b^2=9$$

ت) نادرست (۵/۰) $(a=\sqrt{2}, b=1-\sqrt{2} \Rightarrow a+b=1 \in \mathbb{Q})$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (1) \text{ گزاره همیشه درست}$$

۳ دو عدد طبیعی متوالی n و $n+1$ را در نظر می‌گیریم:

$$k = n(n+1) = n^2 + n \quad (1) \Rightarrow 4k+1 = 4(n^2+n)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2 =$$
 مربع کامل (۵/۰)

۴ هر عدد فرد به صورت $2k+1$ است. (۵/۰)

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 4(2q) = 8q = 8$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است

۵ برهان خلف: اگر $\alpha + 3\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + 2\beta$ نیز عددی گویا

$$(\alpha + 3\beta) - (\alpha + 2\beta) = \beta \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

است. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه: (۱)

اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

درسنامه

رسم توابع را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

- ۱ رسم توابع چند جمله‌ای
- ۲ رسم توابع هموگرافیک

رسم توابع چند جمله‌ای

- ۱ دامنه را مشخص می‌کنیم. (\mathbb{R} هستند).
- ۲ محل تقاطع نمودار را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم. (به x صفر می‌دهیم تا y به دست آید و برعکس).
- ۳ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. (برای تعیین وضعیت صعودی و نزولی)
- ۴ نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را به دست می‌آوریم. (در صورت وجود)
- ۵ $f''(x)$ را به دست می‌آوریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. (برای تعیین تقعر)
- ۶ نقطه‌های عطف تابع را به دست می‌آوریم. (در صورت وجود)
- ۷ رفتار تابع را در $+\infty$ و $-\infty$ مشخص می‌کنیم.
- ۸ مجانب‌های قائم و افقی را به دست می‌آوریم.
- ۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات $f(x)$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ در آن، کشیدن تابع را راحت‌تر می‌کند.
- ۱۰ و خلاصه رسم تابع به کمک همه اطلاعات قبل.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

ب) $g(x) = -x^4 + x$

پاسخ الف) نقاط برخورد با محورهای مختصات:

$D_f = \mathbb{R}, x=0 \Rightarrow y=0$

$2x^3 - 3x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1 \text{ یا } x=\frac{1}{2} \Rightarrow (0,0), (1,0), (\frac{1}{2},0)$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 1, \Delta = 36 - 4(6)(1) = 12$

مشتق تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{12} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

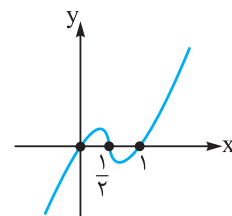
ریشه‌های مشتق اول:

$f''(x) = 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 3x^2 + x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty \end{cases}$

حالا جدول تغییرات را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow



ب) $g(x) = -x^4 + x, D_g = \mathbb{R}$

$x=0 \Rightarrow y=0$

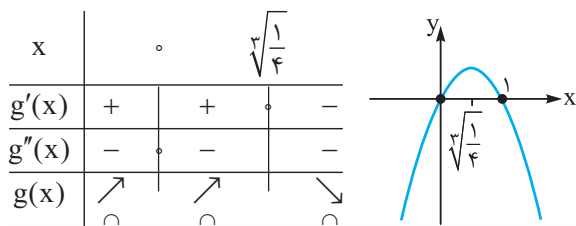
نقاط برخورد با محورهای مختصات:

$g(x) \Rightarrow -x^4 + x = 0 \Rightarrow x(-x^3 + 1) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } -x^3 = -1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (0,0), (1,0)$

$g'(x) = -4x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 4x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$g''(x) = -12x^2 = 0 \Rightarrow x=0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^4 + x = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^4 = -\infty$$

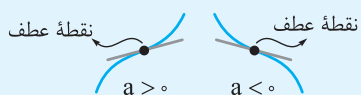


حالت‌های مختلف نمودار تابع درجه سوم

می‌توانیم با توجه به تعداد ریشه‌های مشتق تابع درجه سوم، آن‌ها را دسته‌بندی کنیم. می‌دانیم مشتق یک تابع درجه ۳، یک تابع درجه ۲ است و یک تابع درجه ۲ یا اصلاً ریشه ندارد یا یک ریشه مضاعف دارد یا دو ریشه دارد.

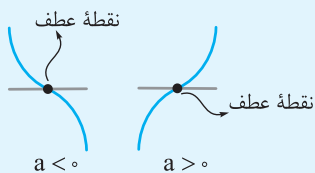
حالت اول: مشتق ریشه نداشته باشد:

در این حالت تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و تابع اکسترمم نسبی ندارد. خط مماس در نقطه عطف یک خط مایل است و نمودار آن یکی از دو حالت مقابل است: (a ضریب x^3 است.)



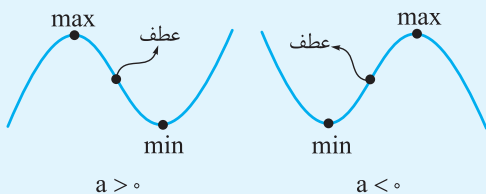
حالت دوم: مشتق ریشه مضاعف داشته باشد.

در این حالت تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است و اکسترمم نسبی ندارد. خط مماس در نقطه عطف در این حالت یک خط افقی است. در این حالت ریشه مشتق اول و مشتق دوم با هم برابر است و نمودار یکی از دو حالت مقابل است.



حالت سوم: مشتق دو ریشه داشته باشد.

در این حالت تابع دارای ماکزیمم و مینیمم نسبی است و نقطه عطف دقیقاً بین آن‌ها قرار دارد. در این حالت نقاط max، min و نقطه عطف در یک راستا قرار دارند. با توجه به علامت a نمودار یکی از حالت‌های مقابل است:



نکته در حالت کلی طول نقطه عطف یک تابع درجه ۳ به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ از رابطه $y = \frac{-b}{3a}$ محاسبه می‌شود.

رسم توابع هموگرافیک

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ را هموگرافیک می‌نامیم.

رسم این توابع دقیقاً مشابه با رسم توابع چندجمله‌ای است با این تفاوت که در این تابع همواره، یک مجانب افقی و یک مجانب قائم به صورت روبه‌رو داریم:

۱ $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \frac{a}{c}$ است. $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی $f(x)$ است.

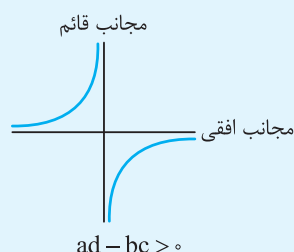
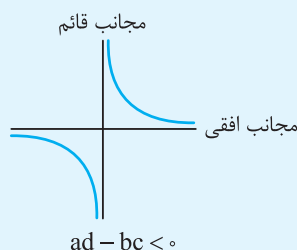
۲ $x \rightarrow -\frac{d}{c}$ (ریشه مخرج) $\Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$ است. $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم $f(x)$ است.

نکات تابع هموگرافیک

۱ مشتق تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است.

۲ در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $ad-bc > 0$ باشد، شاخه‌های نمودار صعودی و اگر $ad-bc < 0$ باشد، شاخه‌های نمودار نزولی هستند.

در حالت کلی شکل نمودار تابع هموگرافیک به صورت زیر است:



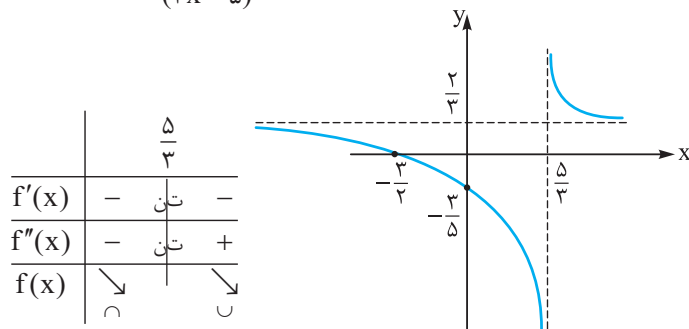
مثال نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$ را رسم کنید. پاسخ

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3} \right\} \quad x=0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}, y=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{3x-5} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \text{ (مجانب افقی)}$$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot 0 - 9}{(3x-5)^2} = \frac{-9}{(3x-5)^2} < 0, \text{ مجانب قائم: } x = \frac{5}{3}$$

$$f''(x) = \frac{-2(3x-5)(3)(-9)}{(3x-5)^3} = 0 \Rightarrow 114(3x-5) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$



صفحة ۱۴۴ کتاب درسی

تمرین

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

۱- جدول رفتار و نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ y=0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(2)(1) = 8 \Rightarrow x_1, x_2 = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

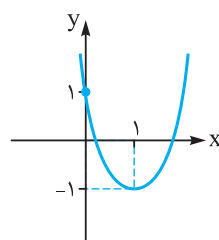
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = 2(\pm\infty)^2 = +\infty$$

$$f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 2 - 4 + 1 = -1 \Rightarrow (1, -1) \text{ اکسترمم نسبی}$$

$$f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow \text{تقعر رو به بالاست.}$$

پس نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f' = 4x - 4$	-	0	+
$f'' = 4$			
f	$+\infty \searrow$	-1	$\swarrow +\infty$



ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

$$D_f = \mathbb{R} \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=5 \\ y=0 \Rightarrow x=? \end{cases} \text{ نقطه } (0, 5) \text{ محل برخورد با محور } y \text{ هاست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3) \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} - 5 \sqrt{\frac{5}{3}} + 5 = -\frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} + 5$$

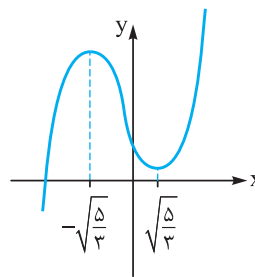
$$x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = -\frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} + 5 \sqrt{\frac{5}{3}} + 5 = \frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} + 5$$

پس نقاط $(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 5)$ و $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 5)$ اکسترمم نسبی اند.

نقطهٔ $(0, 5)$ عطف تابع $f(x)$ است. $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ طول عطف $\Rightarrow f(0) = 5$

پس نمودار $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
$f''(x)$		-	-	+	+
f(x)	$-\infty$	\nearrow	max	\searrow	min
			5		$+\infty$



پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

$D_f = \mathbb{R}$ $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \text{می‌گذرد.} \\ y=0 \Rightarrow x=0, x=-2 \Rightarrow \text{می‌گذرد.} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x(x^2) \begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases}$

$f'(x) = -3x^2 - 4x - 4 \Rightarrow \Delta = 16, x = -2, x = -\frac{2}{3}$

$x = -2 \Rightarrow y = f(-2) = 0, x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(-\frac{2}{3} + 2)^2 = \frac{32}{27}$

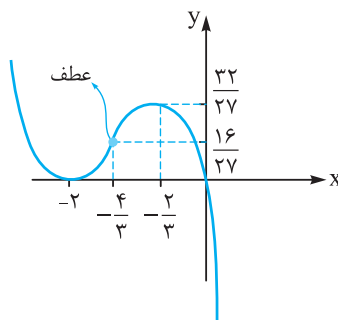
پس نقاط $(-2, 0)$ و $(-\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

$f''(x) = -6x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = f(-\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}(-\frac{4}{3} + 2)^2 = \frac{16}{27}$

پس نقطهٔ $(-\frac{4}{3}, \frac{16}{27})$ نقطهٔ عطف منحنی است.

پس نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'		-	+	+	-
f''		+	+	-	-
f	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	\searrow
			min		max
				$\frac{16}{27}$	$\frac{32}{27}$
				$\frac{27}{27}$	$-\infty$



ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} x=2^+: \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = +\infty \\ x=2^-: \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = -\infty \end{cases}$

$x=2$ مجانب قائم است.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ مجانب افقی است.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

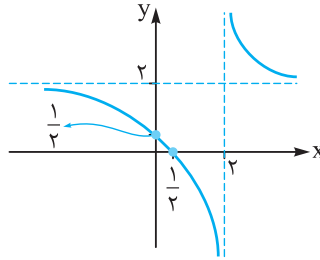
محل برخورد با محور yهاست. محل برخورد با محور xهاست.

مشتق، منفی است. $f'(x) = \frac{2x - 4 - 2x + 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x-2)(-3)}{(x-2)^4} = \frac{6}{(x-2)^3} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow \text{تقعر رو به بالا} \\ x < 2 \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
f'	-	-	-	-	-
f''					
f	2	\searrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	$-\infty + \infty$

پس نمودار تابع f(x) به صورت مقابل است:



ث) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x}{x+3} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow (-3)^+ \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow (-3)^- \rightarrow -\infty \end{cases}$$

پس $x = -3$ مجانب قائم است.

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

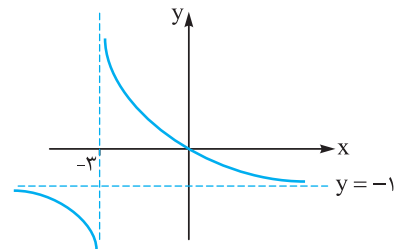
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow y = -1$ مجانب افقی است.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ از } (0,0) \text{ می‌گذرد.}$$

مشتق، منفی است. $f'(x) = \frac{-x-3+x}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2} \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{0 - 2(x+3)(-3)}{(x+3)^4} = \frac{6}{(x+3)^3} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \Rightarrow \text{تقعر } f \text{ رو به بالاست.} \\ x < -3 \Rightarrow \text{تقعر } f \text{ رو به پایین است.} \end{cases}$$

پس نمودار تابع f(x) به صورت زیر است:



x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
f'	-	-	-	-
f''				
f	-1	$-\infty + \infty$	\searrow	-1

ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$ محل برخورد با محور yها $\Rightarrow y = 1$
 $y = 0 \Rightarrow x = ?$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3) = 2(\pm\infty)^3 = \pm\infty$$

هنگامی که $f \rightarrow +\infty$ ، $x \rightarrow +\infty$ و وقتی که $f \rightarrow -\infty$ ، $x \rightarrow -\infty$

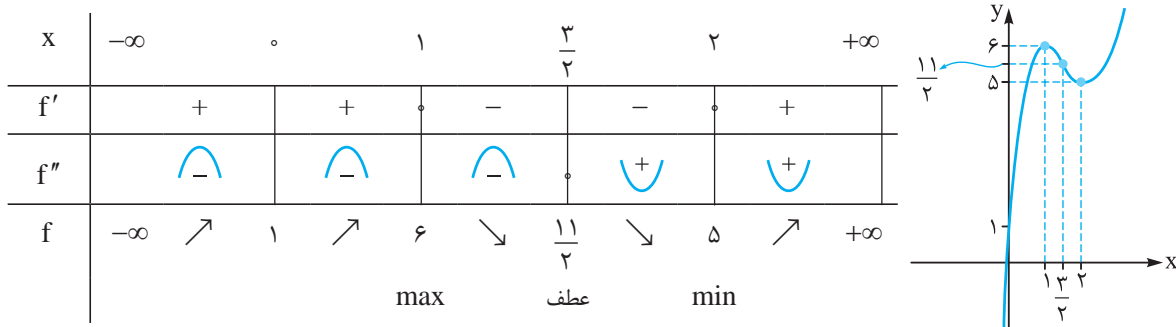
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow y = f(1) = 2 - 9 + 12 + 1 = 6 \Rightarrow (1, 6) \\ x = 2 &\Rightarrow y = f(2) = 16 - 36 + 24 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5) \end{aligned} \right\} \text{اکسترمم نسبی}$$

$$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{27}{8} - \frac{81}{4} + 18 + 1 = \frac{11}{2}$$

پس نقطه $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ نقطه عطف منحنی است.

پس نمودار تابع $f(x)$ به این صورت است:



۲- فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

$$0 = \frac{a(-1)+b}{c(-1)+d} \Rightarrow -a+b=0 \Rightarrow a=b$$

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد پس داریم:

از طرفی طول نقطه تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(2, 1)$ است، پس مجانب قائم تابع $x=2$ و مجانب افقی تابع $y=1$ است پس می‌توان نوشت:

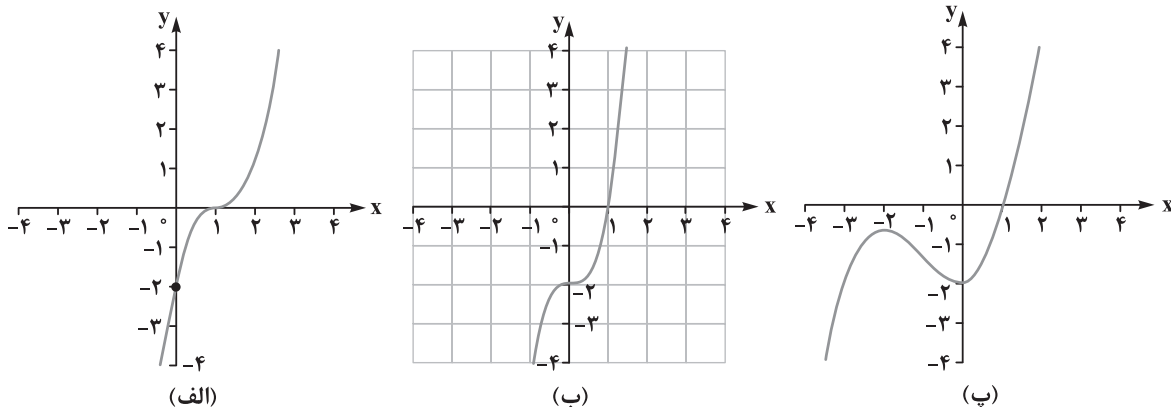
$$cx+d=0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = 2 \Rightarrow d = -2c$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a=c \xrightarrow{d=-2c} d = -2a$$

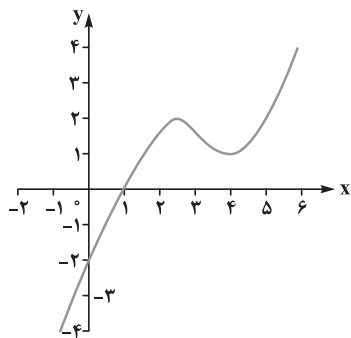
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+a}{ax-2a} = \frac{a(x+1)}{a(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

پس ضابطه تابع $f(x)$ را برحسب a می‌نویسیم و داریم:

۳- کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.



$$f(x) = x^3 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$



(ت)

مشتق تابع، مثبت است پس تابع $f(x)$ ، صعودی اکید است و در واقع نمودارهای (پ) و (ت) نادرست هستند.

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = -2$$

پس نقطه $(0, -2)$ عطف تابع $f(x)$ است و این یعنی پاسخ مسئله مورد (ب) است زیرا در مورد (الف) نقطه عطف نمودار $(1, 0)$ است.

سوالات امتحانی

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید. (۴)

الف) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

ب) $g(x) = x^4 - 4x^3 + 3$

۲ اگر $(2, 3)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax+1}{bx-4}$ باشد، a, b را بدست آورید. (۱)

پاسخ سوالات امتحانی

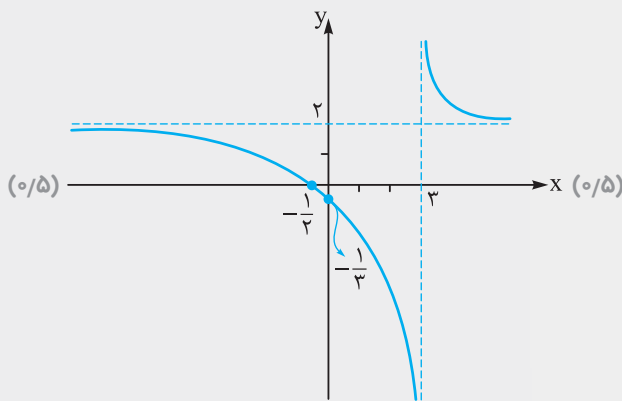
الف) $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{3}$, $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

$f'(x) = \frac{-6-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2} < 0$ نمودار نزولی (۰/۵)

$f''(x) = \frac{-2(x-3)(-7)}{(x-3)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{14}{(x-3)^3}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$: مجانب افقی: (۰/۵)
 $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$: مجانب قائم:

	۳	
$f'(x)$	- تن -	
$f''(x)$	- تن +	(۰/۵)
$f(x)$	↘ تن ↘	



۱

فصل ۵

کاربردهای مشتق

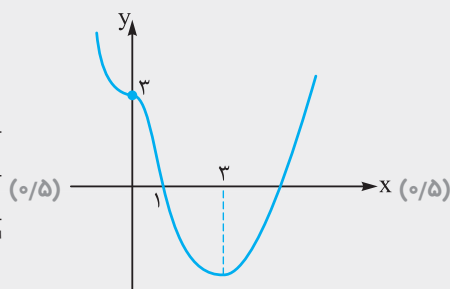
ب) $g(x) = x^4 - 4x^3 + 3 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$ $x = 0 \Rightarrow y = 3$

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$ (۰/۵)

$g''(x) = 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ (۰/۵)

x	۰	۲	۳	
$g'(x)$	-	-	-	+
$g''(x)$	+	-	+	+
$g(x)$	↘ ↘	↘ ↘	↘ ↘	↗ ↗



۲ خط $x = 2$ مجانب قائم و $y = 3$ مجانب افقی تابع هستند.

$$bx - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{b} \Rightarrow \frac{4}{b} = 2 \Rightarrow b = 2 \quad (0/25)$$

(0/25)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} = 3 \xrightarrow{b=2} a = 6 \quad (0/25)$$

آزمون جامع فصل

۱ کوتاه پاسخ دهید. (۱)

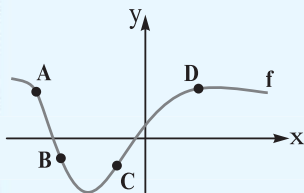
الف) طول نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 - 4x^2$ برابر چند است؟

ب) نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است چه نقطه‌ای است؟

پ) اگر $x = c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد، آن گاه مقدار

$f'(c)$ چه قدر است؟

ت) در کدام نقطه از نمودار مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو منفی است؟



۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (۱)

الف) در هر نقطه‌ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه عطف تابع است.

ب) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

پ) اگر علامت f' بر بازه‌ای مثبت باشد، آن گاه تابع f بر آن بازه اکیداً صعودی است.

ت) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

۳ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را در بازه $[-2, 0]$ در صورت وجود به دست آورید. (۲)

۴ در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$ صعودی و تقعر آن روبه پایین است؟ (۲/۵)

۵ جدول تغییرات و نمودار توابع زیر را رسم کنید. (۳/۵)

الف) $y = x^3 - 3x + 4$

ب) $y = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2}$

پاسخ آزمون جامع فصل

۱ الف) $\frac{4}{3}$ (۰/۲۵) ب) بحرانی (۰/۲۵) پ) صفر (۰/۲۵) ت) A (۰/۲۵) الف) نادرست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

۳

(0/25)

(0/25)

$$f(x) = x^3 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1 \quad (0/25)$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6 \quad (0/25)$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 4 = -8 + 6 + 4 = 2 \quad (0/25)$$

$$f(0) = 4 \quad (0/25)$$

بنابراین مینیمم مطلق نقطه $(-2, 2)$ و ماکزیمم مطلق نقطه $(-1, 6)$ است. (0/5)

(0/25)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 + x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x(x+3)(x-2) = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2, x = -3 \quad (0/75)$$

(0/25)

(0/25)

$$f''(x) = 3x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(3)(-6) = 76 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3} \quad (0/25)$$

	$-\infty$	-3	$\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$	0	$\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$	2	$+\infty$ (o/5)
$f'(x)$	-	+	+	-	-	+	
$f''(x)$	+	+	-	-	+	+	
$f(x)$	\searrow C	\nearrow C	\nearrow C	\searrow C	\searrow C	\searrow C	\nearrow C

تابع f در بازه $(\frac{-1-\sqrt{19}}{3}, 0)$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است. (o/5)

5

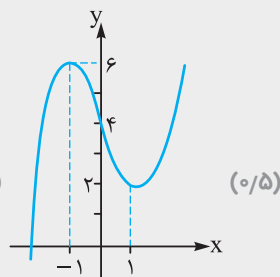
الف) $y = x^3 - 3x + 4 \quad D = \mathbb{R} \quad x = 0 \Rightarrow y = 4$

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (o/5) اکسترممها

$y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ (o/5) نقطه عطف

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x + 4 = \infty$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	-	+	
y''	-	-	+	+	(o/5)
y	$-\infty$	\nearrow C	\searrow C	\searrow C	\nearrow C



ب) $y = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2} \quad D = \mathbb{R} \quad x = 0 \Rightarrow y = 1$

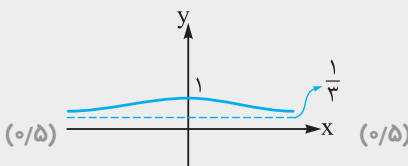
$y' = \frac{2x(3x^2 + 2) - (6x)(x^2 + 2)}{(3x^2 + 2)^2} \Rightarrow y' = \frac{6x^3 + 4x - 6x^3 - 12x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{-8x}{(3x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ (o/5)

$y'' = \frac{-8(3x^2 + 2)^2 - 2(3x^2 + 2)(6x)(-8x)}{(3x^2 + 2)^4} \Rightarrow y'' = \frac{-8(3x^2 + 2) + 96x^2}{(3x^2 + 2)^3} = \frac{-24x^2 - 16 + 96x^2}{(3x^2 + 2)^3}$

$= \frac{72x^2 - 16}{(3x^2 + 2)^3} = 0 \Rightarrow 72x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$ (o/5)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3}$ (o/5) مجانب افقی

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$+\infty$
y'	+	+	-	-	
y''	+	-	-	+	(o/5)
y	\nearrow C	\nearrow C	\searrow C	\searrow C	\searrow C



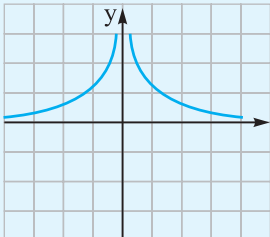
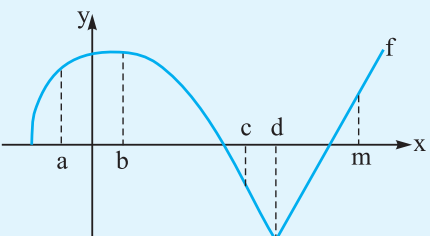
فصل 5

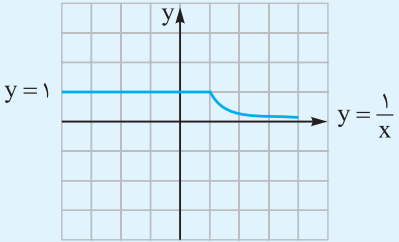
کاربردهای مشتق

جدول پارم بندی درس حسابان 2

فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
1	7	2/5	3/5
2	6	2	3
3	7	2/5	3
4	-	7	6
5	-	6	4/5
جمع	20	20	20

رشته ریاضی فیزیک		حسابان ۲	
نمره	نوبت اول پایه دوازدهم دوره متوسطه دوم	مدت آزمون: ۸۰ دقیقه	ردیف
۲	<p>نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به دست آورید.</p>	۱	
۱/۵		با رسم نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $[-1, 1]$: الف) نمودار $f^{-1}(x)$ را رسم کنید. ب) وضعیت یکنوایی $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.	۲
۱/۵		جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر عبارت $P(x) = mx^6 + (n-1)x + 3$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد، مقدار $2m + n$ برابر است. ب) تجزیه عبارت $125x^3 + 8$ برحسب عامل $5x + 2$ به صورت است. پ) نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی تابع $y = f(x)$ است. مختصات نقطه نظیر A روی تابع $y = -f(x-1)$ به صورت است.	۳
۲		مجموعه جواب نامعادلات زیر را به دست آورید. الف) $\log_{3/2} \frac{2x+1}{2} < 1$ ب) $5^{x^2-3x} < \frac{1}{25}$	۴
۱/۵		دوره تناوب و مقدار مینیمم و ماکزیمم تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $y = 2\sin(-\pi x) + 1$ ب) $y = -3\cos(2x) + 1$	۵
۱/۵		ضابطه تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$ بنویسید که مشخصات زیر را داشته باشد. الف) $T = \frac{\pi}{6}$, $\min = -1$, $\max = 5$ ب) $T = 4$, $\min = -3$, $\max = 3$	۶
۲		هر یک از معادلات زیر را حل کنید. الف) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ ب) $\cos 2x + 3\sin x = 2$	۷
۱		طول نقطه برخورد منحنی $y = \sin 2x$ و $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را در بازه $[0, \pi]$ به دست آورید.	۸
۲		حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{[2x] - 1}{2x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + 4 - \frac{1}{x^2}}$ پ) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - t + t^4}{2t^4 + t^3 + t}$ ت) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \tan x$	۹
۱		اگر خط‌های $x = 3$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+ax+b}$ باشند، a و b را به دست آورید.	۱۰
۱		آیا تابع $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ مجانب افقی دارد؟ چرا؟	۱۱
۱		نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد. الف) $f(-1) = f(2) = 0$ ب) مجانب افقی تابع، خط $y = 2$ است. پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ باشد. ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ باشد.	۱۲
۲		مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$ را به دست آورید.	۱۳
۲۰	جمع نمره		

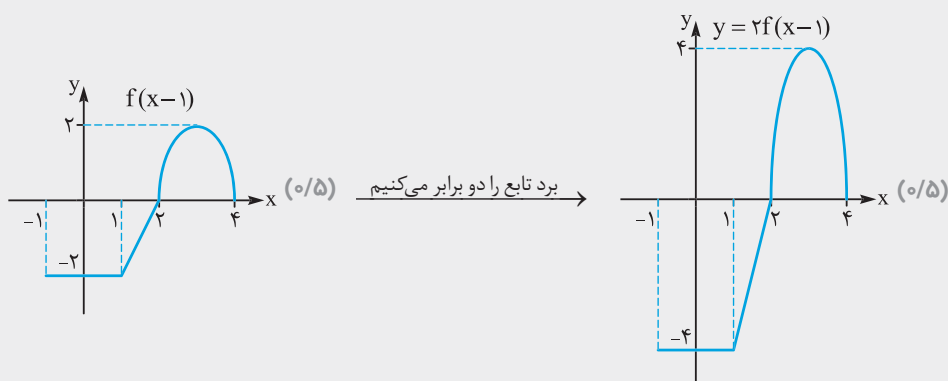
رشتهٔ ریاضی فیزیک		حسابان ۲	
نمره	امتحان نهایی پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم خرداد ۱۴۰۰	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ردیف
۱	 <p>جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم. ب) برد تابع تانژانت $(y = \tan x)$ برابر است. پ) با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{ x }$ در نقطهٔ $x = 0$ برابر است با ت) اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a است.</p>		۱
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) اگر تابع f در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود. ب) تابع صعودی اکید، نقطهٔ عطف ندارد. پ) اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آن‌گاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است. ت) در نقطهٔ عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.</p>		۲
۰/۷۵	نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.		۳
۰/۷۵	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد.		۴
۰/۷۵	باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارتهای $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.		۵
۰/۷۵	ضابطهٔ تابع مثلثاتی سینوس با دورهٔ تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ بنویسید.		۶
۱	معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید.		۷
۱	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{ x-2 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2}$		۸
۱/۲۵	مجاانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.		۹
۱/۵	معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطهٔ $A(1, f(1))$ به دست آورید.		۱۰
۰/۷۵	 <p>با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید. ب) طول نقطهٔ «گوشه‌ای» را بنویسید. پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.</p>		۱۱
۱	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. مطلوب است: الف) سرعت متوسط در بازهٔ $[1, 2]$ ب) سرعت لحظه‌ای در زمان $t = 3$</p>		۱۲

۱		۱۳ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم‌شده زیر، مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $A(1,1)$ بررسی کنید.
۲/۵	الف) $f(x) = (\sqrt{3x} + 1)(2x^3 - 1)$ ب) $g(x) = 3 \tan^2 x + \cos x^2$ پ) $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{\Delta x}$	۱۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست).
۱/۵		۱۵ اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.
۱		۱۶ اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف منحنی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.
۵/۲		۱۷ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.
۲۰	جمع نمره	

پاسخ آزمون نوبت اول حسابان ۲

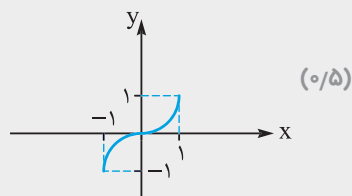
ردیف

۱ برای رسم نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ از روی تابع $y = f(x)$ ، ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا نمودار تابع $f(x-1)$ به دست آید، سپس برد تابع را دو برابر می‌کنیم ($2f(x-1)$)؛ پس داریم:

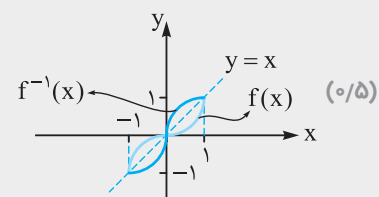


همان‌طور که از روی نمودار تابع رسم‌شده دیده می‌شود، دامنه و برد تابع $y = 2f(x-1)$ به صورت زیر می‌باشند:
 $(\text{د/م}) = [-4, 4]$ برد، $(\text{م/د}) = [-1, 4]$ دامنه

۲ نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $[-1, 1]$ به صورت مقابل است:



الف) برای رسم تابع $f^{-1}(x)$ از روی تابع $f(x)$ ، باید نمودار $f(x) = x^3$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، پس داریم:



ب) با توجه به نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ دیده می‌شود که هر دو تابع در دامنه‌شان صعودی اکید هستند. (م/د)

۳	<p>الف) عبارت $P(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x=1, x=-1$</p> $\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow m(1)^n + (n-1)(1) + 3 = 0 \Rightarrow m+n-1+3=0 \Rightarrow m+n = -2 & (1) \\ P(-1) = 0 \Rightarrow m(-1)^n + (n-1)(-1) + 3 = 0 \Rightarrow m-n+1+3=0 \Rightarrow m-n = -4 & (2) \end{cases}$ <p>از حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) داریم: پس حاصل $2m+n = -6+1 = -5$ است. (۰/۵)</p> <p>ب) اتحاد زیر را در نظر بگیرید: $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + a^{n-1})$ (ن فرد): پس تجزیه عبارت $125x^3 + 8$ به صورت زیر خواهد بود: $(5x)^3 + (2)^3 = (5x+2)(25x^2 - 10x + 4)$ (۰/۵) مطلوب مسئله</p> <p>ب) نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی تابع $y = f(x)$ است. حالا می‌خواهیم ببینیم نقطه نظیر A روی تابع $y = -f(x-1)$ به چه صورتی است؟ می‌دانیم برای رسم تابع $y = -f(x-1)$ از روی تابع $f(x)$ باید نمودار $f(x)$ را ابتدا یک واحد به راست ببریم یعنی $\alpha+1$ تبدیل می‌شود و سپس تابع به دست آمده را نسبت به محور xها قرینه کنیم یعنی β به $-\beta$ تبدیل می‌شود پس مختصات نقطه نظیر $A(\alpha, \beta)$ به صورت $B(\alpha+1, -\beta)$ است. (۰/۵)</p>
۴	<p>الف) می‌دانیم تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x}$ یک تابع نزولی اکید است (۰/۲۵) زیرا مبنای آن عددی بین صفر و یک است، پس طبق خواص تابع لگاریتم و تعریف تابع نزولی داریم: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x} < 1 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} > (\frac{1}{2})^1 \Rightarrow 2x+1 > 0/2 \Rightarrow 2x > -0/8 \Rightarrow x > -0/4$ (۰/۵)</p> <p>از طرفی عبارت جلوی \log باید همواره مثبت باشد پس می‌توان نوشت: $\frac{2x+1}{x} > 0 \Rightarrow 2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ از اشتراک محدوده‌های به دست آمده، جواب مسئله به صورت $x > -0/4$ به دست می‌آید. ب) $5^{x^2-3x} < \frac{1}{25} \Rightarrow 5^{x^2-3x} < 5^{-2}$ (۰/۲۵) حالا چون تابع $y = 5^x$ تابعی صعودی اکید است (۰/۲۵) پس می‌توان نوشت: $x^2 - 3x < -2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$ (۰/۲۵)</p>
۵	<p>الف) $y = 2\sin(-\pi x) + 1, T = \frac{2\pi}{ -\pi } = 2$ (۰/۲۵), $\max = 2 + 1 = 3$ (۰/۲۵), $\min = - 2 + 1 = -1$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $y = -3\cos(2x) + 1, T = \frac{2\pi}{ 2 } = \pi$ (۰/۲۵), $\max = -3 + 1 = 4$ (۰/۲۵), $\min = - -3 + 1 = -2$ (۰/۲۵)</p>
۶	<p>الف) برای این اطلاعات ضابطه $y = a \sin bx + c$ را در نظر می‌گیریم پس داریم: $T = \frac{\pi}{6}: \frac{2\pi}{ b } = \frac{\pi}{6} \Rightarrow b = 12 \Rightarrow b = \pm 12$ (۰/۲۵) ($b = 12$ را در نظر می‌گیریم.) $a = 3$ را در نظر می‌گیریم.) $\max = 5: \begin{cases} a + c = 5 \\ - a + c = -1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 4 \Rightarrow c = 2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = 3$ (۰/۲۵) پس ضابطه تابع به صورت $y = 3\sin(12x) + 2$ می‌باشد.</p> <p>ب) برای این اطلاعات ضابطه $y = a \cos bx + c$ را در نظر می‌گیریم پس داریم: $T = 4: \frac{2\pi}{ b } = 4 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{2}$ (۰/۲۵) ($b = \frac{\pi}{2}$ را در نظر می‌گیریم.) $a = 3$ را در نظر می‌گیریم.) $\max = 3: \begin{cases} a + c = 3 \\ - a + c = -3 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 0 \Rightarrow c = 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = 3 \Rightarrow a = \pm 3$ (۰/۲۵) پس ضابطه تابع به صورت $y = 3\cos(\frac{\pi x}{2})$ می‌باشد.</p>

۷ با فرض $\cos x = t$ به حل معادله داده شده می پردازیم:

الف) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \xrightarrow[\text{(o/25)}]{b=a+c} \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \text{ (o/25)} \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ (o/25)} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \text{ (o/25)} \end{cases} \end{cases}$$

ب) $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

طبق روابط مثلثات که در سال های قبل با آن آشنا شده ایم می دانیم که:

$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$ (o/25)

پس می توان نوشت:

حالا با فرض $\sin x = t$ داریم:

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0 \xrightarrow[\text{(o/25)}]{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (o/25)} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ (o/25)} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ (o/25)} \end{cases} \end{cases}$$

۸ منظور از نقطه برخورد منحنی $y = \sin 2x$ و $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ در بازه $[0, \pi]$ حل معادله $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ در این بازه است پس داریم:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \text{ (o/25)} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \text{ (o/25)} \end{cases}$$

در جواب های کلی به دست آمده باید به دنبال جواب های خصوصی در بازه $[0, \pi]$ باشیم پس داریم:

$x = k\pi + \frac{\pi}{8}$:

k	0	1
x	$\frac{\pi}{8}$	$\pi + \frac{\pi}{8}$
	✓	x

 (o/25), $x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$:

k	0	1
x	$\frac{3\pi}{8}$	$\pi + \frac{3\pi}{8}$
	✓	x

 (o/25)

پس معادله داده شده دو جواب به صورت $x = \frac{3\pi}{8}$ و $x = \frac{\pi}{8}$ دارد.

۹ الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{[2x] - 1}{2x - 1}$

برای حل حد بالا ابتدا باید تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم:

$x \rightarrow (\frac{1}{2})^- \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0$ (o/25)

پس حد بالا به صورت مقابل تبدیل می شود:

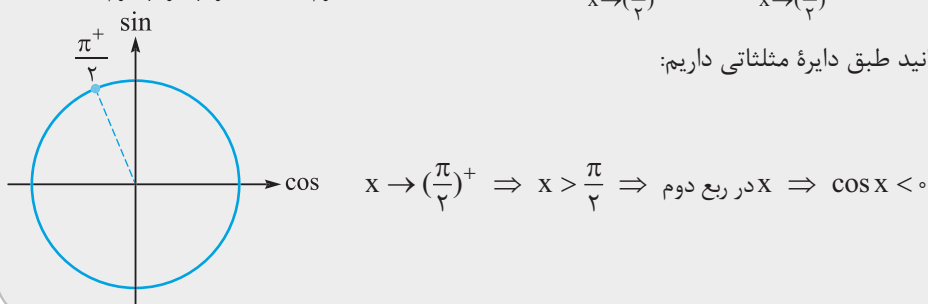
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{0 - 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{-1}{2x - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \text{ (o/25)}$$

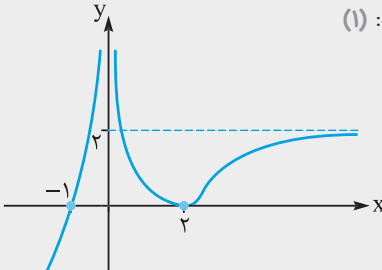
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + 4 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-3 - \frac{1}{-\infty} + \frac{1}{(-\infty)^2}}{\frac{2}{-\infty} + 4 - \frac{1}{(-\infty)^2}} = \frac{-3 - 0 + 0}{0 + 4 - 0} = \frac{-3}{4}$ (o/5)

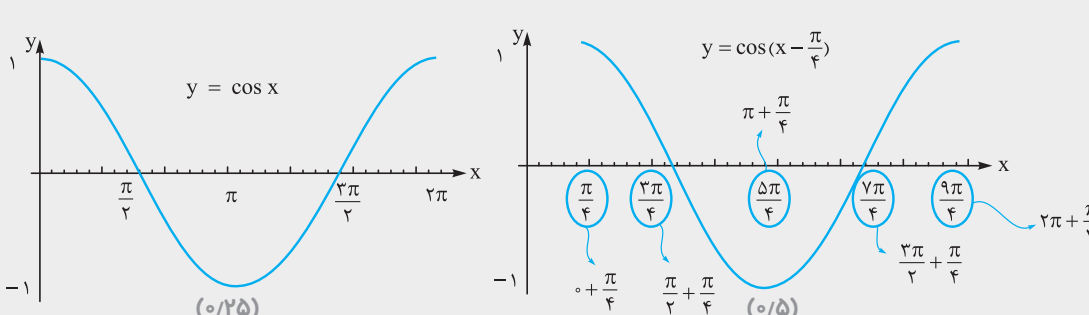
پ) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - t + t^4}{2t^4 + t^2 + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$ (o/5)

ت) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (o/5)

همان طور که می دانید طبق دایره مثلثاتی داریم:



<p>خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+ax+b}$ هستند، پس $x = -1$ و $x = 3$ ریشه‌های مخرج کسر هستند؛ (۵/۰) پس می‌توان نوشت:</p> $\begin{cases} b-a = -1 \\ 3a+b = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} a-b = 1 \\ 3a+b = -9 \end{cases} \rightarrow a = -2, b = -3 \text{ (۵/۰)}$	<p>۱۰</p>
<p>خیر، این تابع فاقد مجانب افقی است. (۵/۲) زیرا شرط اولیه برای داشتن مجانب افقی این است که X بتواند به سمت بی‌نهایت برود. این در حالی است که دامنه تابع $f(x)$ از هر دو طرف محدود است و X نه می‌تواند به $+\infty$ و نه می‌تواند به $-\infty$ برود: (۵/۰)</p> $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} : 4-x^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \text{ (۵/۲)}$	<p>۱۱</p>
<p>نمودار تابعی که همه شرایط (الف) تا (ت) را داشته باشد به صورت مقابل است: (۱)</p> 	<p>۱۲</p>
<p>$f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-1} : x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1 \text{ (۵/۲)}$</p> <p>برای آن که متوجه شویم $x=1$ مجانب قائم $f(x)$ است یا نه، باید $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آوریم:</p> $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^3-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3} \text{ (۵/۰)}$ <p>حاصل حد، عدد $\frac{1}{3}$ شد پس $x=1$ مجانب قائم تابع $f(x)$ نیست. (۵/۲) هم‌چنین برای به دست آوردن مجانب افقی باید حد تابع را در بی‌نهایت به دست آوریم:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ (۵/۲)}$ <p>پس خط $y=0$ مجانب افقی تابع $f(x)$ است. (۵/۲)</p>	<p>۱۳</p>

ردیف	پاسخ آزمون امتحان نهایی حسابان ۲ خرداد ۱۴۰۰
۱	<p>(الف) یکنوا (۵/۲) (ب) \mathbb{R} (۵/۲) (پ) $+\infty$ (۵/۲) (ت) پیوسته (۵/۲)</p>
۲	<p>(الف) درست (۵/۲) (ب) نادرست (۵/۲) (پ) درست (۵/۲) (ت) درست (۵/۲)</p>
۳	<p>ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده، سپس به اندازه $\frac{\pi}{4}$ بر روی محور x‌ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.</p> 

	<p>۴ ابتدا در بازه $-1 < x < 0$ تابع خطی $y = -3x$ را رسم می‌کنیم، سپس در بازه $[0, +\infty)$ تابع $y = x^2$ را رسم می‌کنیم.</p> <p>اکیداً نزولی $(-1, 0]$ $(0/25)$ اکیداً صعودی $[0, +\infty)$ $(0/25)$</p> <p>$(0/25)$</p>
<p>۵</p> <p>باقی‌مانده $P(x)$ و $q(x)$ بر $(x+2)$ برابر شده است، یعنی $P(-2) = q(-2)$</p> <p>$\begin{cases} P(-2) = -2a - 7 & (0/25) \\ q(-2) = 11 & (0/25) \end{cases} \Rightarrow -2x - 7 = 11 \Rightarrow a = -9 \quad (0/25)$</p>	
<p>۶</p> <p>می‌دانیم در توابع به فرم $y = a \sin bx + c$، مقدار ماکزیمم $a + c$ و مقدار مینیمم $- a + c$ و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{ b }$ هست.</p> <p>$T = 3 \Rightarrow \frac{2\pi}{ b } = 3 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3} \quad (0/25) \Rightarrow b = \pm \frac{2\pi}{3}$</p> <p>$\begin{cases} a + c = 5 \\ - a + c = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2c = 8 \Rightarrow c = 4, a = 1 \xrightarrow{(0/25)} a = \pm 1 \Rightarrow y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 4 \quad (0/25)$</p> <p>هر کدام از ضابطه‌های $y = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}x\right) + 4$، $y = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}x\right) + 4$ و $y = -\sin\left(-\frac{2\pi}{3}x\right) + 4$ قابل قبول است.</p>	
<p>۷</p> <p>$2 \cos^2 x = \sin x - 1 \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} 2(1 - \sin^2 x) = \sin x - 1 \Rightarrow 2 - 2 \sin^2 x = \sin x - 1$</p> <p>$\Rightarrow \underbrace{2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0}_{(0/25)} \xrightarrow{\sin x = t} 2t^2 + t - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب برابر صفر}} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} & (0/5) \\ \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غیر قابل قبول} & (0/5) \end{cases}$</p>	
<p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{ x-2 } = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad (0/5)$</p>	<p>ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2} = \frac{3+0}{0-2} = -\frac{3}{2} \quad (0/5)$</p>
<p>۹</p> <p>برای پیدا کردن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم (ریشه‌های مخرج در صورتی که ریشه‌های صورت نباشند، مجانب قائم هستند).</p> <p>$x^2 - 1 = 0 \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ مجانب قائم است.} & (0/25) \\ x = -1 \text{ مجانب قائم است.} & (0/25) \end{cases}$</p> <p>برای پیدا کردن مجانب افقی، حد تابع را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ می‌یابیم.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad (0/25) \Rightarrow y = -2$ مجانب افقی $(0/25)$</p>	
<p>۱۰</p> <p>برای یافتن معادله خط مماس ابتدا مشتق تابع را در $x = 1$ محاسبه کرده و سپس معادله خط را تشکیل می‌دهیم:</p> <p>$f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \quad (0/5) \quad f(1) = -1 \quad (0/25)$</p> <p>معادله خط مماس: $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 2 \quad (0/75)$</p>	
<p>الف) $x = b \quad (0/25)$</p>	<p>ب) $x = d \quad (0/25)$</p> <p>پ) $x = c \quad (0/25)$</p>

<p>سرعت متوسط: $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \frac{(-20 + 10) - (-5 + 40)}{2 - 1} = \frac{60 - 35}{1} = 25$ (۰/۵)</p> <p>سرعت لحظه‌ای: $h'(t) = -10t + 40 \xrightarrow{t=3} h'(3) = -30 + 40 = 10$ (۰/۵)</p>	<p>۱۲</p>																
<p>ضابطه تابع را می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم:</p> $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ (۰/۵) <p>$f'_-(1) = 0, f'_+(1) = -1 \Rightarrow f'_-(1) \neq f'_+(1)$ (۰/۲۵)</p> <p>چون مشتق چپ و راست برابر نشد، پس این تابع مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)</p>	<p>۱۳</p>																
<p>الف) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^3 - 1) + (\sqrt{3x} + 1)(6x^2)$ (۰/۷۵)</p> <p>ب) $g'(x) = 6 \tan x(1 + \tan^2 x) + 2x(-\sin x^2)$ (۱)</p> <p>پ) $h'(x) = \frac{(2x - 3)(\Delta x) - (\Delta)(x^2 - 3x)}{(\Delta x)^2}$ (۰/۷۵)</p>	<p>۱۴</p>																
<p>ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم، سپس مقدار تابع در اول و آخر بازه و نقطه بحرانی را محاسبه می‌کنیم:</p> $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases}, \begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow \max(0, 1) \\ f(-1) = -3 \Rightarrow \min(-1, -3) \\ f(1) = -1 \end{cases}$ (۰/۲۵) <p>(۰/۵) (۰/۵)</p>	<p>۱۵</p>																
<p>نقطه $A(-1, 1)$، روی تابع است، پس در آن صدق می‌کند و همچنین چون نقطه عطف تابع هم هست پس $f''(-1) = 0$ می‌باشد.</p> $f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3, f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, f''(x) = 6x + 2a, f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0$ (۰/۲۵) <p>$\Rightarrow a = 3, b = 0$ (۰/۵)</p>	<p>۱۶</p>																
<p>مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ (۰/۲۵) و $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ مجانب قائم (۰/۲۵)</p> $y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, y'' = \frac{-2(x+1) \times 3}{(x+1)^4} = \frac{-6}{(x+1)^3}$ (۰/۲۵) <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div data-bbox="263 1400 550 1693"> <p>(۰/۵)</p> </div> <div data-bbox="598 1433 1061 1693"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>-1</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f''(x)$</td> <td>⊕</td> <td></td> <td>⊖</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>↗ ۲</td> <td>↗ $+\infty$</td> <td>↘ $-\infty$</td> </tr> </tbody> </table> <p>(۱)</p> </div> </div>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$f'(x)$		+	+	$f''(x)$	⊕		⊖	f(x)	↗ ۲	↗ $+\infty$	↘ $-\infty$	<p>۱۷</p>
x	$-\infty$	-1	$+\infty$														
$f'(x)$		+	+														
$f''(x)$	⊕		⊖														
f(x)	↗ ۲	↗ $+\infty$	↘ $-\infty$														