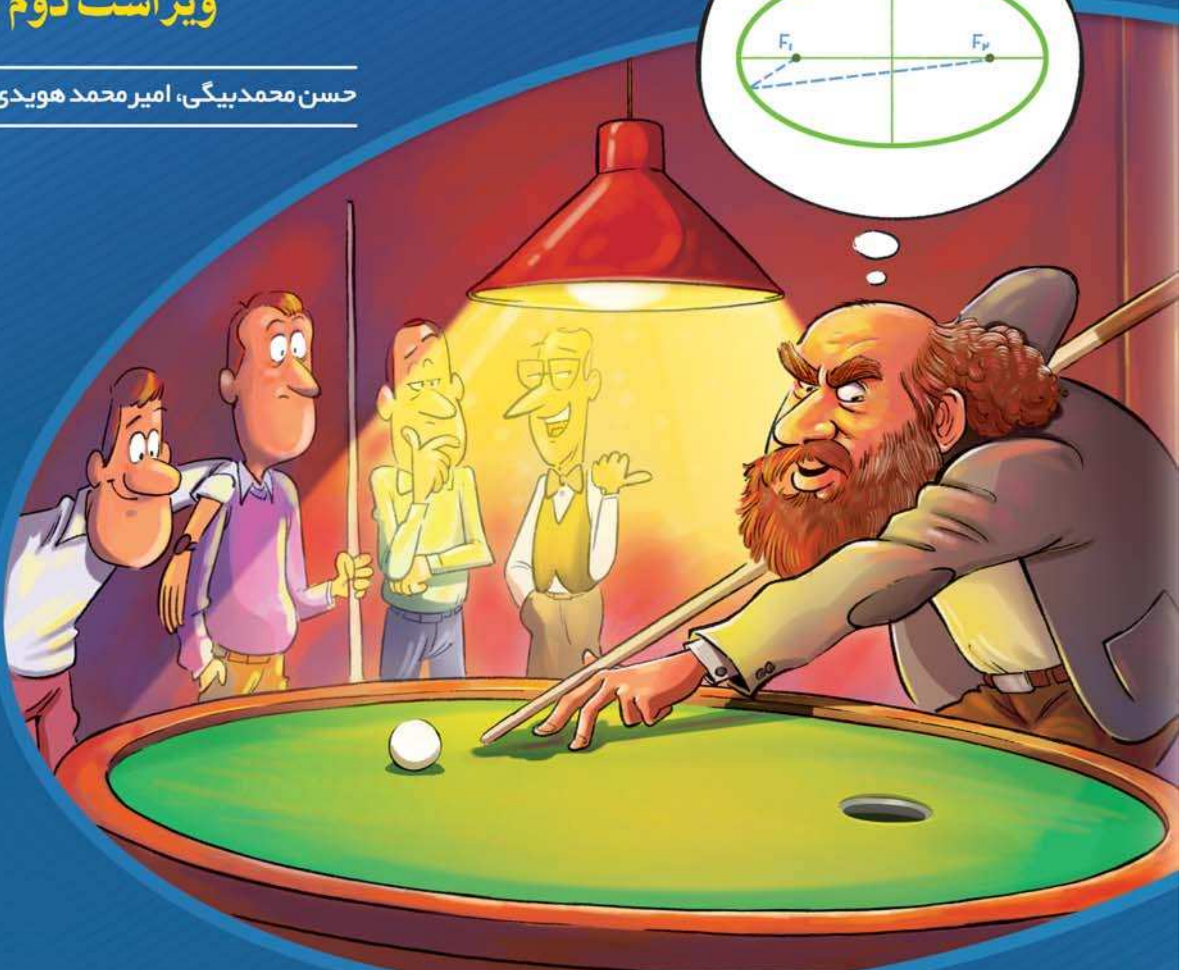
درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۳ (دوازدهم)

ویراست دوم

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی



نشر الگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را براســاس محتوای هندســهٔ سال دوازدهم نوشــته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است و هر درس از دو بخش تشکیل شده است:

۱. خلاصه درس: در این بخش، ضمن مرور مطالب کتاب درسی، نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای را هم حل کرده‌ایم، تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این‌گونه پرسش‌ها آشنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

۲. پرســش‌های چهارگزینه‌ای: در پایان هر درس مجموعه‌ای از پرســش‌های چهارگزینه‌ای مربوط به آن درس را آورده‌ایم. در این قســمت، از همهٔ مطالب کتاب درســی پرســش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرســش تألیفی به همراه پرسش‌های کنکورهای سال‌های قبل هم آورده‌ایم. راه‌حل همهٔ پرسش‌ها در فصل چهارم قرار دارد.

برای مطالعهٔ این کتاب، ابتدا باید خلاصهٔ درس را با دقت بخوانید و مطمئن شوید که روش‌های حل کردن پرسش‌های آن را یاد گرفته‌اید. ســپس به حل کردن پرســش‌های انتهای درس بپردازید. با این کار، علاوه بر این که مطالب درســی را به‌طور کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوید.

در این ویراست تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دستهٔ اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دستهٔ دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شوند. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دستهٔ اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دستهٔ سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرســش‌های دســتهٔ دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

به یاد داشته باشید که سرعت مطالعهٔ هندسه کمتر از درس‌های دیگر است. سعی کنید دربارهٔ آنچه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه این‌که سرسری مطالب را حفظ کنید. حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه‌حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشه کاغذ و قلم کنار خود داشته باشید و هرگاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از این‌که راه‌حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه‌حلش را ببینید.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درســی مســلط نیســتید، بهتر اســت پیش از مطالعهٔ هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «هندسهٔ ۳ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی، فهیمه گودرزی و آقای آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، راضیه صالحی برای صفحه آرایی و سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ۲

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان ۲۶

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۵۱

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی ۷۲

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۷۹

درس دوم: دایره ۸۳

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۰۳

درس سوم: بیضی و سهمی ۱۱۲

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۳۴

فصل سوم: بردارها

درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ ۱۵۰

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۹

درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها ۱۷۴

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۹

فصل چهارم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۰

فصل پنجم: پاسخنامهٔ کلیدی

پاسخنامهٔ کلیدی ۳۰۸

کنکور سراسری ۹۹

کنکور سراسری ۹۹ .... ۳۱۱

کنکور سراسری ۱۴۰۰

کنکور سراسری ۱۴۰۰ .... ۳۱۳

کنکور سراسری ۱۴۰۱

کنکور سراسری ۱۴۰۱ .... ۳۱۵

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

تعریف هر آرایش مستطیل شکل از عددهای حقیقی، که شامل تعدادی سطر و ستون است یک **ماتریس** است.
به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس یک **«درایهٔ»** آن ماتریس می‌گوییم.

درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور می‌کنیم و معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مرتبهٔ ماتریس

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریس از **مرتبهٔ** $m\times n$ (بخوانید m در n) است.

توجه حاصل‌ضرب $m\times n$ تعداد درایه‌های ماتریس را نشان می‌دهد.

ماتریس‌های هم‌مرتبه

اگر تعداد سطرهای دو ماتریس با هم و تعداد ستون‌های آن دو ماتریس نیز با هم برابر باشند، آن دو ماتریس را **هم‌مرتبه** می‌گوییم.

نمایش کلی درایه‌ها

در ماتریس دلخواه A، درایهٔ واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهیم.

نتیجه در حالت کلی، ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اغلب ماتریس بالا را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ می‌نویسیم ($1\le i\le m$ و $1\le j\le n$). به a_{ij} **درایهٔ عمومی** ماتریس A می‌گوییم.

تست ۱

اگر $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$، مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

راه‌حل با توجه به اطلاعات سؤال درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7\end{bmatrix}$. اکنون می‌نویسیم

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A = 7-2+5+7=17$$

تست ۲

مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=[2i^2-3j]_{3\times3}$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

راه‌حل با توجه به تعریف، $a_{ij}=2i^2-3j$. بنابراین $a_{12}=2-6=-4$، $a_{22}=8-6=2$ و $a_{32}=18-6=12$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس } A = a_{12}+a_{22}+a_{32}=-4+2+12=10$$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس صفر** ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

مثال:

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳} , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳} , \quad \bar{O}=[۰]_{۱\times۱}=۰$$

۲) **ماتریس سطری** ماتریسی است که یک سطر دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس سطری به صورت $۱\times n$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر سطری‌اند.

$$A=[۴]_{۱\times۱} , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times۳} , \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & \pi & \sqrt{۲} \end{bmatrix}_{۱\times۴}$$

۳) **ماتریس ستونی** ماتریسی است که یک ستون دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس ستونی به صورت $m\times۱$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر ستونی‌اند.

$$A=[-۱]_{۱\times۱} , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱} , \quad C=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}_{۵\times۱}$$

۴) **ماتریس مربعی** ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

توجه اگر یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، به جای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$، می‌گوییم «ماتریس مربعی از مرتبهٔ n».

تذکر در ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ درایه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

$$a_{ij}\begin{cases} i=j \to \text{روی قطر اصلی است } a_{ij} \\ i<j \to \text{بالای قطر اصلی است } a_{ij} \\ i>j \to \text{پایین قطر اصلی است } a_{ij} \\ i+j=n+۱ \to \text{روی قطر فرعی است } a_{ij} \end{cases}$$

مثال: ماتریس‌های زیر مربعی‌اند.

$$A=[۴]_{۱\times۱} , \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲} , \quad C=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۵) **ماتریس قطری** ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است. به عبارت دیگر،

ماتریس قطری است. $A \Leftrightarrow A=[a_{ij}]_{n\times n} , \quad (i\neq j \Rightarrow a_{ij}=۰)$

توجه در ماتریس قطری درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

مثال: ماتریس‌های زیر قطری‌اند.

$$A=[۴], \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۶) **ماتریس اسکالر** ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

مثال: ماتریس‌های زیر اسکالرند.

$$A=[-۶]_{۱\times۱} , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} , \quad C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

۷) **ماتریس همانی (واحد)** ماتریس اسکالری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ است. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $\delta_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۰ & i\neq j\end{cases}$، آن‌گاه $I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$.

مثال: ماتریس‌های زیر همانی‌اند.

$$I_۱=\begin{bmatrix}۱\end{bmatrix}_{۱\times۱},\quad I_۲=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}_{۲\times۲},\quad I_۳=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس A و B **مساوی** هستند، اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند.
۲) درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

به عبارت دیگر، دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ مساوی هستند اگر

۱) $m=p$ و $n=q$.
۲) به‌ازای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$.

در این حالت می‌نویسیم $A=B$.

تست ۳

اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y&۹\\۲&z-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&x+y\\۲&۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ چقدر است؟

۱) -۱
۲) ۹
۳) ۱۵
۴) ۱۸

راه‌حل چون $A=B$، پس $z-۱=۵$، $x+y=۹$ و $x-y=۳$، بنابراین $z=۶$، $y=۳$ و $x=۶$، در نتیجه $x+y+z=۱۵$.

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر را با هم جمع یا از هم کم کنیم.

به عبارت دیگر، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، آن‌گاه

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}\quad,\quad A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

تست ۴

اگر $[i]_{۲\times۲}+\begin{bmatrix}m&-۶\\-۱&n\end{bmatrix}=[i^۲-۳j]_{۲\times۲}$، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -۶
۲) -۵
۳) -۷
۴) صفر

راه‌حل از تساوی داده شده به‌دست می‌آید $\begin{bmatrix}m&-۶\\-۱&n\end{bmatrix}=[i^۲-۳j]-[i]=[i^۲-i-۳j]$. اگر $A=\begin{bmatrix}m&-۶\\-۱&n\end{bmatrix}$، چون $a_{۱۱}=m$ و $a_{۲۲}=n$، پس $m=۱-۱-۳=-۳$ و $n=۴-۲-۶=-۴$، بنابراین $m+n=-۳-۴=-۷$.

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در ماتریس A، یعنی rA، یک ماتریس هم‌مرتبه با ماتریس A است، به طوری که اگر $rA=[d_{ij}]$، آن‌گاه $d_{ij}=ra_{ij}$. یعنی هر درایهٔ ماتریس rA از ضرب عدد حقیقی r در درایهٔ نظیرش در ماتریس A به‌دست می‌آید.

مثال:

- $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} = ۲\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۵ & \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

- $(-۱)\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ -۴ & -۵ & -۶ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$

- $\circ\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} = \bar{O}_{۳\times۳}$

- $\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ \circ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & \frac{۱}{۲} \\ \circ & \frac{۳}{۲} & \frac{۵}{۲} & \frac{۷}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

قرینهٔ یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. **قرینهٔ** A ماتریسی $m\times n$ است که از حاصل‌ضرب عدد -۱ در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A=(-۱)A$.

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد درماتریس

اگر A ، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)،

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$،

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$،

۷) $(rs)A=r(sA)$،

۸) $۱A=A$،

۹) $\circ A=\bar{O}$ و $r\bar{O}=\bar{O}$،

۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq\circ$، آن‌گاه $A=B$ و

۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

تست ۵

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & \circ \end{bmatrix}$ **و** $۲A-B=I$، **ماتریس** B **کدام است؟**

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & \circ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & \circ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

راه‌حل از برابری $۲A-B=I$ به‌دست می‌آید:

$B=۲A-I=۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & \circ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$.

تست ۶

اگر $A=[i-j]_{۲\times۲}$، $B=[i+j]_{۲\times۲}$ **و ماتریس‌های** X **و** Y **جواب‌های دستگاه** $\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}$ **باشند، مجموع درایه‌های ماتریس** $۲X+Y$ **چقدر است؟**

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا دو معادلهٔ داده شده را با هم جمع می‌کنیم: $۲X=A+B$. اکنون دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$۲Y=A-B \Rightarrow Y=\frac{A-B}{۲}$$

در نتیجه $۲X+Y=A+B+\frac{A-B}{۲}=\frac{۳A+B}{۲}$، یعنی $۲X+Y=[\frac{۳(i-j)+i+j}{۲}]_{۲\times۲}=[۲i-j]_{۲\times۲}$.

پس $۲X+Y=\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$. در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ برابر است با $۱+\circ+۳+۲=۶$.

ضرب ماتریس‌ها

شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس

ضرب ماتریس A در ماتریس B را به صورت AB نشان می‌دهیم. این ضرب زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد.

مرتبهٔ ماتریس AB

اگر A ماتریس $m\times n$ و B ماتریس $n\times p$ باشد، آن‌گاه $C=AB$ از مرتبهٔ $m\times p$ است: $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$.

تست ۷ **اگر A ماتریسی از مرتبهٔ ۳×۴، C ماتریسی از مرتبهٔ ۳×۵ باشد و $AB=C$، مرتبهٔ ماتریس B کدام است؟**

۱) ۳×۴ ۲) ۳×۵ ۳) ۵×۴ ۴) ۴×۵

راه‌حل چون ماتریس AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر است، یعنی تعداد سطرهای B برابر ۴ است. در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی را دارد.

تست ۸ **اگر ضرب ماتریسی $A_{۲\times۳}(B_{m\times n}C_{۳\times۵})$ تعریف شده باشد، مقدار $m+n$ چقدر است؟**

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۸

راه‌حل برای تعریف شدن ماتریس BC باید $n=۳$. فرض کنید $D=BC$، در این صورت D ماتریسی $m\times۵$ است. از طرف دیگر، برای تعریف شدن ضرب ماتریسی $A_{۲\times۳}D_{m\times۵}$ باید $m=۳$. بنابراین $m+n=۳+۳=۶$.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}_{۱\times n}$ و $B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times۱}$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$AB=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱}\end{bmatrix}=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲\end{bmatrix}=۲\times۱+۳\times(-۱)+۴\times۲=۲-۳+۸=۷$$

تست ۹ **اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & m\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} m+۱ \\ ۳ \\ -۲\end{bmatrix}$ و $A\times B=-۷$، مقدار m کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱۲

راه‌حل بنابر تعریف بالا می‌نویسیم: $A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+۱ \\ ۳ \\ -۲\end{bmatrix}=m+۱-۶-۲m=-m-۵$. بنابر فرض مسئله $A\times B=-۷$. اکنون می‌نویسیم:

$$-m-۵=-۷\Rightarrow m=۲$$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی

حاصل‌ضرب ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ در ماتریس $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ماتریسی مانند $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ است که در آن درایهٔ c_{ij} از آن برابر است با ضرب سطر i ام A در ستون j ام B :

$$c_{ij}=[\text{سطر } i\text{ام } A]\times[\text{ستون } j\text{ام } B]=\begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

مثال: در ضرب زیر درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس حاصل‌ضرب را به‌دست آورده‌ایم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $=۲\times۱+۱\times۲+۳\times(-۲)=-۲$

تست ۱۰

اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=AB$ ، مقدار $c_{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۲۹ ۴) ۲۴

راه‌حل توجه کنید که $c_{۲۳}=[\text{سطر دوم } A][\text{ستون سوم } B]=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}=۲۸+۱=۲۹$.

تست ۱۱

اگر $A=[۲i-۳j]_{۳\times۳}$ و $B=[i+i^۲]_{۳\times۳}$ ، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس AB چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) −۱۵ ۳) ۱۸ ۴) −۳۰

راه‌حل فرض می‌کنیم $C=AB$. در این صورت

$$c_{۳۳}=[\text{سطر سوم } A][\text{ستون سوم } B]=\begin{bmatrix} a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۳} \\ b_{۲۳} \\ b_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۶ \\ ۱۲ \end{bmatrix}=۶+۰-۳۶=-۳۰$$

تست ۱۲

اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -۱ & b & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $C=AB=[c_{ij}]$ به‌طوری که $c_{۱۳}=-۲$ و $c_{۲۲}=۰$ ، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) −۵ ۲) −۶ ۳) ۶ ۴) ۵

راه‌حل چون $c_{۱۳}=-۲$ ، پس $-۲=۳a+۲-۱=\begin{bmatrix} a & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$. یعنی $a=-۱$. همچنین از $c_{۲۲}=۰$ به‌دست می‌آید $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}=۲b+۸=۰$. یعنی $b=-۴$. اکنون به‌دست می‌آید $a+b=-۱-۴=-۵$.

تست ۱۳

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \\ ۱ & -x & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) -۳　　۴) -۴

راه‌حل

ضرب‌های سمت چپ را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} -x+۱ & -۲x-۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱\end{bmatrix}=۰ \quad \frac{۱}{۲}$$

$$x(-x+۱)+۲(-۲x-۱)+۰=۰$$

یعنی

$$-x^۲-۳x-۲=۰$$

بنابراین $x_۱=-۲$ و $x_۲=-۱$، در نتیجه $x_۱+x_۲=-۳$.

تست ۱۴

اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۵ \\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱۰ \\ b & -۸\end{bmatrix}$ و $AB-BA=\bar{O}$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱۰　　۲) ۸　　۳) ۱۲　　۴) ۱۴

راه‌حل

از تساوی $AB-BA=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $AB=BA$. اکنون می‌نویسیم

$$AB=\begin{bmatrix} -۲a+۵b & ۱۰a-۴۰ \\ -۴+۳b & -۴\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix} -۲a+۲۰ & ۲۰ \\ ab-۱۶ & ۵b-۲۴\end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} ۱۰a-۴۰=۲۰ \\ ۵b-۲۴=-۴\end{cases}$$

بنابراین $a=۶$ و $b=۴$، پس $a+b=۱۰$.

تست ۱۵

اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ ۲ باشند، کدام گزینه می‌تواند $AB-BA$ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$

راه‌حل

فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q\end{bmatrix}$. در این صورت

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ p & q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bp & ay+bq \\ cx+dp & cy+dq\end{bmatrix}$$

و

$$BA=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ ap+cq & bp+dq\end{bmatrix}$$

چون مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB و BA با هم برابرند، پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $AB-BA$ برابر صفر است.
در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) این ویژگی را دارد.

تذکر اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه منظور از $A^۲$ یعنی $A\times A$، $A^۳$ یعنی $A^۲\times A$ و … .

تست ۱۶

اگر $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $x=y=-۱$ ۲) $x=-y=-۱$ ۳) $x=y=۱$ ۴) $x=-y=۱$

راه‌حل چون $A^۲=A\times A$، پس

$$A^۲=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^۲+y & xy-y \\ x-۱ & y+۱ \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر، چون $A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، پس $\begin{cases} x-۱=۰ \\ y+۱=۲ \end{cases}$، در نتیجه $x=۱$ و $y=۱$.

تست ۱۷

اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، حاصل $A^۳+A^۴$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) I ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) A

راه‌حل با محاسبهٔ ماتریس $A^۳$ به‌دست می‌آید $A^۳=\bar{O}$، پس $A^۴=\bar{O}$ و در نهایت، $A^۳+A^۴=\bar{O}+\bar{O}=\bar{O}$.

تست ۱۸

اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵$ چقدر است؟

۱) $-۳^۷$ ۲) $۳^۷$ ۳) $-۳^۶$ ۴) $۳^۶$

راه‌حل ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}=-۳A$$

دو طرف برابری $A^۲=-۳A$ را در A ضرب می‌کنیم: $A^۳=-۳A^۲=-۳(-۳A)=(-۳)^۲A$. به همین صورت می‌توان نتیجه گرفت $A^n=(-۳)^{n-۱}A$. در نتیجه

$$A^۵=(-۳)^۴A=۸۱A=\begin{bmatrix} -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \\ -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \\ -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید $-۳^۶=(-۸۱)\times۹=$ مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵$.

تست ۱۹

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱۴۴ & ۱۲۰ \\ -۱۲۰ & -۱۰۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۱۳۹۹}$ کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $۴A$

راه‌حل ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم: $A^۲=\begin{bmatrix} ۱۴۴ & ۱۲۰ \\ -۱۲۰ & -۱۰۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۴۴ & ۱۲۰ \\ -۱۲۰ & -۱۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$. بنابراین $A^{۱۳۹۹}=\bar{O}$.

تست ۲۰

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^{۶}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، **مقدار $a-b$ چقدر است؟**

۱) صفر **۲)** ۶ **۳)** ۱ **۴)** ۳۶

راه‌حل می‌نویسیم $A+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$. اکنون $(A+I)^{۲}$ و $(A+I)^{۳}$ را به‌دست می‌آوریم تا شاید بتوان از روی آن‌ها جواب را به‌دست آورد:

$$(A+I)^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix},\quad (A+I)^{۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

در تمام ماتریس‌های بالا اگر درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم را از درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول کم کنیم، حاصل برابر ۱ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که $a-b=۱$. توجه کنید که این استدلال برای تست به‌کار می‌رود و در مسئله‌های تشریحی جواب نمی‌دهد.

تست ۲۱

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ **و مجموع درایه‌های ماتریس** A^{n} **برابر ۱۳۹۹ باشد، مقدار n کدام است؟**

۱) ۱۳۹۵ **۲)** ۱۳۹۶ **۳)** ۱۳۹۷ **۴)** ۱۳۹۸

راه‌حل ابتدا ماتریس‌های $A^{۲}$ و $A^{۳}$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},\quad A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توان حدس زد که $A^{n}=\begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. بنابر فرض باید $n+۲=۱۳۹۹$، در نتیجه $n=۱۳۹۷$.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱) ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی در حالت کلی نمی‌توان گفت $AB=BA$.

نکته

۱) ماتریس‌های به شکل $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ **با هم جابه‌جایی دارند.** **۲) ماتریس‌های به شکل** $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ **با هم جابه‌جایی دارند.**

ویژگی ۲) برای سه ماتریس ضرب شوندهٔ A، B و C خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است یعنی $A(BC)=(AB)C$.

تست ۲۲

اگر $AB=A$ و $BA=B$، **ماتریس** $A^{۲}$ **کدام است؟**

۱) A **۲)** B **۳)** I **۴)** $\bar{O}$

راه‌حل می‌نویسیم $A^{۲}=AA=(AB)A=A(BA)=AB=A$.

نکته

اگر $ABC=D=[d_{ij}]$، آن‌گاه برای پیدا کردن درایهٔ واقع بر سطر i ام و ستون j ام ماتریس D به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$d_{ij}=[A \text{ سطر } i\text{ام}]\, B\, [C \text{ ستون } j\text{ام}]$$

تست ۲۳ اگر $A=[i-j]_{3\times 3}$، درایهٔ واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۲

راه‌حل ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم: $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. اکنون می‌نویسیم

$[A \text{ ستون سوم}] A [A \text{ سطر دوم}] = A^3$ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=4+2+0=6$$

ویژگی ۳) برای سه ماتریس ضرب‌شوندهٔ A، B و C خاصیت توزیع‌پذیری برقرار است:

$$A(B+C)=AB+AC\ ,\qquad (B+C)A=BA+CA$$

تست ۲۴ اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، $AB=B$ و $BA=A$، حاصل $A(A+B)^2B$ کدام است؟

۱) $4B$ ۲) $4A$ ۳) $4(A+B)$ ۴) A^3

راه‌حل از تساوی‌های $AB=B$ و $BA=A$ نتیجه می‌گیریم $B^2=B$:

$$AB=B \xrightarrow{B\times} BAB=B^2 \Rightarrow (BA)B=B^2 \xrightarrow{BA=A} AB=B^2$$

چون $AB=B$، پس $B=B^2$. به‌طور مشابه برای ماتریس A ثابت می‌شود $A^2=A$. اکنون می‌نویسیم

$$A(A+B)(A+B)B=(A^2+AB)(AB+B^2)=(A+B)(B+B)=2AB+2B^2=2B+2B=4B$$

ویژگی ۴) ماتریس همانی I را می‌توان به عنوان عضو خنثی در عمل ضرب ماتریس‌ها معرفی کرد: $I_nA=AI_n=A$.

تست ۲۵ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، ماتریس A^7 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

راه‌حل ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم: $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I$. اکنون می‌نویسیم

$$A^7=(A^2)^3A=(-I)^3A=-A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه دقت کنید که اگر r عددی حقیقی و A ماتریسی مربعی باشد، به ازای هر عدد طبیعی n می‌نویسیم: $(rA)^n=r^nA^n$.

تست ۲۶ اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$، ماتریس A^7-A^4 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

راه‌حل ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم: $A^2=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=I$. اکنون می‌نویسیم $A^6=(A^2)^3=I^3=I$

و $A^7=A^6A=I\times A=A$. در نهایت به‌دست می‌آید: $A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

تست ۲۷

اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و رابطهٔ $A^۴\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}=A^۵\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) -۴

راه‌حل

ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

در نتیجه $A^۴=(A^۲)^۲=I^۲=I$ و $A^۵=A^۴A=IA=A$. اکنون می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یعنی $\begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$، در نتیجه $b=-۴$ و $c=-۱$. پس $b+c=-۴-۱=-۵$.

تست ۲۸

اگر $A=\begin{bmatrix} \tan x & -۱ \\ \frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}$، حاصل $A^{۳۰}+A^{۲۰}+A^{۱۰}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $۳I$ ۳) $-I$ ۴) $-۳I$

راه‌حل

می‌دانیم $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$. بنابراین

$$A^۲=\begin{bmatrix} \tan x & -۱ \\ \frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tan x & -۱ \\ \frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tan^۲ x-\frac{۱}{\cos^۲ x} & ۰ \\ ۰ & \tan^۲ x-\frac{۱}{\cos^۲ x} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \tan^۲ x-۱-\tan^۲ x & ۰ \\ ۰ & \tan^۲ x-۱-\tan^۲ x \end{bmatrix}=-I$$

در نتیجه $A^{۳۰}=(A^۲)^{۱۵}=(-I)^{۱۵}=-I$، $A^{۲۰}=(A^۲)^{۱۰}=(-I)^{۱۰}=I$ و $A^{۱۰}=(A^۲)^۵=(-I)^۵=-I$. پس

$$A^{۳۰}+A^{۲۰}+A^{۱۰}=-I+I-I=-I$$

تست ۲۹

اگر $A^۲=A$ و $B^۲=B-I$، حاصل $A^۳+B^۳$ چقدر است؟

۱) $B-I$ ۲) $A+B-I$ ۳) $A+B$ ۴) $A-I$

راه‌حل

می‌نویسیم

$$A^۳+B^۳=AA^۲+BB^۲=AA+B(B-I)=A^۲+B^۲-B=A+B-I-B=A-I$$

ویژگی ۵) (فاکتورگیری در ماتریس‌ها) اگر بخواهیم در یک عبارت ماتریسی از یک ماتریس فاکتور بگیریم، حتماً باید ماتریس مورد نظر در همهٔ عبارت‌ها، از یک طرف ضرب شده باشد.

مثال:

- $AB+AC=A(B+C)$
- $AC+BC=(A+B)C$
- $AB+BC$ (در این عبارت نمی‌توان از B فاکتور گرفت)
- $AB+۲A=A(B+۲I)$
- $BA+۳A=(B+۳I)A$

تست ۳۰

اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ دو باشند به‌طوری که $AB=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $A\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

راه‌حل در عبارت داده شده از سمت چپ از A و از سمت راست از B فاکتور می‌گیریم:

$$A\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\right)B=A\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}B$$

$$=A(2I)B=2AB=2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ویژگی ۶) ضرب ماتریس‌ها خاصیت حذف ندارد. یعنی گزارهٔ زیر در حالت کلی درست نیست.

$$AB=AC\Rightarrow B=C$$

توجه عکس رابطهٔ بالا درست است. یعنی دو طرف تساوی $B=C$ را می‌توان در ماتریس A ضرب کرد. البته دقت کنید که جهت ضرب کردن A مهم است.

$$B=C \xrightarrow{A\times} AB=AC$$
$$B=C \xrightarrow{\times A} BA=CA$$

ویژگی ۷) ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر شود. به عبارت دیگر، اگر ضرب دو ماتریس برابر صفر شود، لزوماً هر دو یا حتی یکی از آن‌ها صفر نیست. اما عکس این مطلب درست است، یعنی

$$A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O}\Rightarrow AB=\bar{O}$$

مثال: در ضرب ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}=\bar{O}$ حاصل ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر شده است، اما هیچ یک از ماتریس‌های ضرب شونده، ماتریس صفر نیستند.

ویژگی ۸) حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس قطری است.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' & 0 \\ 0 & 0 & cc' \end{bmatrix}$$

نتیجه حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه خاصیت جابه‌جایی دارد.

نکته برای به توان رساندن یک ماتریس قطری کافی است درایه‌های قطر اصلی آن را به توان برسانیم.

مثال:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

نکته

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{2}=(a+d)A-(ad-bc)\,I_{2}$.

تست ۳۱

اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^{2}=\alpha A+\beta I_{2}$، دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(11,2)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,13)$

راه‌حل **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^{2} را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{2}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال،

$$A^{2}=\alpha A+\beta I_{2}\Rightarrow\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2\alpha+\beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha+\beta \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -2\alpha+\beta=9 \\ \alpha=2 \end{cases}\Rightarrow\beta=13$$

این مقادیر α و β در دو معادلهٔ $5\alpha=10$ و $4\alpha+\beta=21$ نیز صدق می‌کنند. پس زوج مرتب (α,β) برابر $(2,13)$ است.

راه‌حل دوم با توجه به نکتهٔ قبل، $A^{2}=(-2+4)A-(-8-5)I_{2}=2A+13I_{2}$. اکنون با مقایسهٔ این برابری با تساوی $A^{2}=\alpha A+\beta I_{2}$ به دست می‌آید: $\alpha=2$ و $\beta=13$.

تست ۳۲

اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{3}=\alpha A+\beta I$، مقدار $\alpha+\beta$ چقدر است؟

۱) -9 ۲) -8 ۳) 8 ۴) 9

راه‌حل با توجه به نکتهٔ قبل، $A^{2}=(3+1)A-(3+2)I=4A-5I$. دو طرف برابری را در A ضرب می‌کنیم: $A^{3}=4A^{2}-5A$. مقدار A^{2} را در این برابری قرار می‌دهیم: $A^{3}=4(4A-5I)-5A=16A-20I-5A=11A-20I$.

چون $A^{3}=\alpha A+\beta I$، پس $\alpha=11$ و $\beta=-20$. در نتیجه $\alpha+\beta=11-20=-9$.

تست ۳۳

اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^{4}=\alpha A+\beta I$، مقدار $\alpha+\beta$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

راه‌حل توجه کنید که $A^{2}=(1+0)A-(0+1)I=A-I$. دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^{4}=(A-I)(A-I)=A^{2}-A-A+I=A^{2}-2A+I$$

به جای A^{2} مقدار $A-I$ را قرار می‌دهیم:

$$A^{4}=(A-I)-2A+I=-A$$

یعنی $\alpha=-1$ و $\beta=0$. در نتیجه $\alpha+\beta=-1$.

بررسی اتحادها در ماتریس‌ها

در حالت کلی اتحادهای جبری برای ماتریس‌ها برقرار نیست.

مثال:

$$\begin{cases}(A+B)(A-B)\neq A^{2}-B^{2}\\(A+B)(A-B)=A^{2}-AB+BA-B^{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(A+B)^{2}\neq A^{2}+2AB+B^{2}\\(A+B)^{2}=(A+B)(A+B)=A^{2}+AB+BA+B^{2}\end{cases}$$

تست ۳۴ اگر $A^{2}=\begin{bmatrix}3&0\\3&3\end{bmatrix}$ ، $B^{2}=\begin{bmatrix}3&7\\7&9\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}$ ، ماتریس $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}6&6\\3&0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3&3\\\frac{3}{2}&3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}4&1\\2&5\end{bmatrix}$

راه‌حل می‌دانیم $(A+B)^{2}=A^{2}+AB+BA+B^{2}$ ، پس

$$AB+BA=(A+B)^{2}-A^{2}-B^{2}=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\3&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&7\\7&9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12&13\\13&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\3&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&7\\7&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\3&0\end{bmatrix}$$

نکته اگر دو ماتریس A و B جابه‌جا شونده باشند $(AB=BA)$ ، آن‌گاه اتحادها برای این ماتریس‌ها برقرار است.

مثال: اگر $AB=BA$ ، آن‌گاه

$$(A-B)(A+B)=A^{2}-B^{2}\ ,\quad (A-B)^{2}=A^{2}-2AB+B^{2}\ ,\quad (A+B)^{2}=A^{2}+2AB+B^{2}$$

توجه چون $AI=IA$ ، پس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش در اتحادها صدق می‌کند:

$$(A+I)^{3}=A^{3}+3A^{2}+3A+I\ ,\qquad (A+I)^{2}=A^{2}+2A+I\ ,$$

$$(A+I)(A^{2}-A+I)=A^{3}+I^{3}=A^{3}+I\ ,\qquad (A+I)(A-I)=A^{2}-I^{2}=A^{2}-I\ ,$$

تست ۳۵ اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، $A^{2}=A$ و $2A-B=I$ ، ماتریس $B^{2}-I$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $2I$ ۳) A ۴) $\bar{O}$

راه‌حل از تساوی $2A-B=I$ به‌دست می‌آید $B=2A-I$. دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $B^{2}=4A^{2}-4A+I$. چون $A^{2}=A$ ، پس $B^{2}=4A-4A+I=I$. اکنون به‌دست می‌آید $B^{2}-I=I-I=\bar{O}$.

تست ۳۶ A ماتریسی مربعی است به‌طوری که $A^{2}+A=-I$. حاصل A^{1401} کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\bar{O}$ ۴) $-A$

راه‌حل می‌نویسیم $A^{2}+A+I=\bar{O}$. دو طرف برابری را در $A-I$ ضرب می‌کنیم: $(A-I)(A^{2}+A+I)=(A-I)\times\bar{O}$. یعنی $A^{3}-I=\bar{O}$ ، پس $A^{3}=I$. اکنون به‌دست می‌آید $A^{1401}=(A^{3})^{467}=I^{467}=I$.

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ۱

۱- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}۵ & i>j\\ ۷ & i=j\\ -۲ & i<j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۲- درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i^۲+۲j & i\geq j\\ ۲j-i & i<j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۳- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i>j\\ ۷ & i=j\\ i^۲-۱ & i<j\end{cases}$ مفروض است. مقدار $۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}$ برابر کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۴- اگر در ماتریس $A_{۳\times۴}$ بدانیم $a_{ij}=\begin{cases}-i & i>j\\ ۰ & i=j\\ j & i<j\end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۸

۵- چند تا از ماتریس‌های زیر قطری هستند؟

$$\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ ۵ & ۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & -۴\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۹\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۵\\ ۰ & ۵ & ۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\end{bmatrix}$$

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- کدام‌یک از ماتریس‌های زیر ماتریس اسکالر نیست؟

۱) $\begin{bmatrix}۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۵\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۵ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

۷- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y & ۹\\ ۲ & z-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & x+y\\ ۲ & -۳\end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $\frac{x}{۲}-y+۲z$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) -۴

۸- اگر $\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ ۴ & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵ & b\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & -۵\\ d & ۱\end{bmatrix}$، مقدار $ac-bd$ برابر کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۱ ۳) ۸۱ ۴) ۷۹

۹- اگر $A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}$ و $B=[i^۲-۳j]_{۳\times۳}$، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۱۰- اگـر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، که در آن $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$، کـه در آن $b_{ij}=\begin{cases} j-i & i<j \\ i+j & i\geq j \end{cases}$، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۱

۱۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$، $B=[b_{ij}]_{۴\times۳}$ و $C=[c_{ij}]_{۳\times۵}$، کدام ضرب قابل تعریف است؟

۱) AB ۲) CB ۳) AC ۴) BA

۱۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱) حاصل‌ضرب دو ماتریس اسکالر، ماتریسی اسکالر است.
۲) حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، ماتریسی قطری است.
۳) حاصل‌ضرب یک ماتریس اسکالر و یک ماتریس قطری ماتریسی قطری است.
۴) حاصل‌ضرب یک ماتریس اسکالر و یک ماتریس قطری ماتریسی اسکالر است.

۱۳- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $AB-BA$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۱۴- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & ۴ \\ -۱ & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس AB ماتریسی قطری باشد، مقدار $۲a-b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) صفر ۳) -۵ ۴) ۱

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$، حاصل $A^۲+۲A-I$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $-I$ ۳) I ۴) A

۱۶- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس AB چگونه است؟

۱) ماتریس اسکالر ۲) ماتریس صفر ۳) ماتریس همانی ۴) ماتریس قطری

۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A^۵$ کدام است؟

۱) ۳۲۴ ۲) ۱۲۴ ۳) ۲۴۳ ۴) ۴۲۳

۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل $A^۳$ کدام است؟

۱) $۶A$ ۲) $۳۶A$ ۳) $۴۹A$ ۴) $۷A$

۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۷$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۳۲

۲۰- اگر $A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۹ \\ ۲۱ & ۱۰ \end{bmatrix}$ و $A^۲=۲A+۱۳I_۲$، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۲ ۳) -۸ ۴) ۲

۲۱- دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B در رابطهٔ $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$ صدق می‌کنند. کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $A=B=I$ ۲) $A=B=\bar{O}$ ۳) $AB=BA$ ۴) $AB=\bar{O}$

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ②

-۲۲ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض است. کدام‌یک از تعاریف زیر می‌تواند مشخص‌کنندهٔ این ماتریس باشد؟

۱) $a_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i<j \\ j+i & i\ge j \end{cases}$
۲) $a_{ij}=\begin{cases} j-i & i>j \\ i+۱ & i=j \\ ۲j+۱ & i<j \end{cases}$
۳) $a_{ij}=\begin{cases} j+۱ & i<j \\ j-۱ & i\ge j \end{cases}$
۴) $a_{ij}=\begin{cases} j+۱ & i\le j \\ i+j & i>j \end{cases}$

-۲۳ اگر $A=[۲i-j]_{۲\times ۲}$ ، $B=[۴i+۳j]_{۲\times ۲}$ ، $X+Y=A$ و $X-Y=B$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۴۵ ۳) ۳۰ ۴) ۵۲

-۲۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $mA-nB=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ ، زوج مرتب (m, n) کدام است؟

۱) $(-۳, -۲)$ ۲) $(۳, ۲)$
۳) $(۲, ۳)$ ۴) چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

-۲۵ اگر $A=\begin{bmatrix} a-۱ & m^۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -a & m+۱ \\ a & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ، $C=۲A-B$ ، $c_{۲۱}=۲c_{۳۲}$ و $c_{۱۱}=-c_{۲۲}$ ، مقدار $a-m$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

-۲۶ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^۲+C=AB$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس C برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

-۲۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & k \end{bmatrix}$ ، به‌ازای چند مقدار k تساوی ماتریسی $A^۲+۲A-I=\bar{O}$ درست است؟

۱) صفر ۲) نامتناهی ۳) ۱ ۴) ۲

-۲۸ اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $۲A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $B^۲$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۲

-۲۹ دو ماتریس $A=[a_{ij}]=[۲i-j]_{۲\times ۲}$ و $B=[b_{ij}]=[-۲i-j^۲]_{۲\times ۲}$ مفروض‌اند. حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $AB-B$ برابر کدام است؟

۱) ۱۰- ۲) ۲۰- ۳) ۳۰- ۴) ۴۰-

-۳۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ a & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ b & a & ۲ \\ ۳ & ۴ & -۵ \end{bmatrix}$ و $C=AB=[c_{ij}]$ ، $c_{۲۱}=۱۶$ و $c_{۲۲}=۰$ ، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۷- ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۱-

-۳۱ اگر $A=\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس B هم مرتبهٔ با A باشد به طوری‌که مجموع درایه‌های ستون‌های اول، دوم و سوم آن به‌ترتیب ۷، ۳ و ۵ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۵- ۳) ۱ ۴) ۱۵

۳۲- در تساوی $\begin{bmatrix} ۳ & x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۲ & -۴ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \\ x \end{bmatrix}=۰$، مجموع مقادیر x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۳- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & m & -۱ \\ a & ۵ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- ماتریس‌های A و B مربعی و هم‌مرتبه هستند. اگر $AB=BA$، کدام‌یک از تساوی‌های زیر به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است؟

۱) $A^nB=BA^n$ ۲) $(AB)^n=A^nB^n$ ۳) $(AB)^n=B^nA^n$ ۴) هر سه گزینه

۳۵- کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$.

۲) اگر $AB=AC$، آن‌گاه ماتریس‌های B و C مساوی‌اند.

۳) اگر $(A-I)^۲=\bar{O}$، آن‌گاه $A=I$.

۴) اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه $A^۳\times A^۲=A^۲\times A^۳$.

۳۶- اگر بدانیم $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۶ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$، درایهٔ سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۷- ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A^۳=I$، ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۳۸- اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۲۰}$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$

۳۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۲۰}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $A^{۱۳۹۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۴۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، در ماتریس $A^{۱۰۱}$ مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۸۶- اگر $A^{۲}-A+I=\bar{O}$، ماتریس $A^{۴۰۰}$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $-I$ ۴) I

۸۷- ماتریس مربعی A در برابری $A(I-A)=I$ صدق می‌کند. ماتریس $A^{۱۳۹۸}+A^{۶۰۸}$ برابر کدام است؟

۱) $۲I-A$ ۲) A ۳) $A^{۲}$ ۴) $۲A-I$

۸۸- اگر $A^{۵}=\begin{bmatrix} ۴\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & -۹\sqrt{۳} \end{bmatrix}$، حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۳}$ برابر کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۶}$ ۲) ۱۲ ۳) -۱۲ ۴) $-۶\sqrt{۶}$

۸۹- مجموع درایه‌های ماتریس $A=[i+۱]_{n\times n}$ برابر ۲۴۵ است. مرتبهٔ ماتریس A کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -\tan ۶۰^\circ & ۰ \\ ۰ & \cot ۶۰^\circ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & \sin ۳۰^\circ \\ ۰ & \cos ۳۰^\circ \end{bmatrix} A^{۱۲} \begin{bmatrix} ۰ & \cos ۳۰^\circ \\ ۰ & \sin ۳۰^\circ \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۴}$ ۴) $\sqrt{۳}+\frac{۱}{۴}$

۹۱- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۲b & a+c \\ b & ۲b+۱ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری و $A^{۲}$ ماتریسی اسکالر باشد، کمترین مقدار ممکن abc کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۹۲- ماتریس A در تساوی $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۴ & ۶ & -۲ \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ صدق می‌کند. حاصل $ac'-a'b$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶۴}}{۳}$ ۲) ۴۸ ۳) $\frac{۶۴}{۹}$ ۴) ۲۴

۹۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۱ & x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۲ & -۴ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \\ x \end{bmatrix}=۰$ باشند، مقدار $\alpha^{۲}+\beta^{۲}$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۹۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \\ ۱ & -x & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=-۱$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}$ برابر کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری

۹۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۳ & ۳ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی- ۹۲

۱) اسکالر غیرهمانی ۲) ماتریس صفر ۳) قطری و غیراسکالر ۴) همانی

۹۶- ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A^2-4A کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱) ۱۲　　۲) ۱۵　　۳) ۱۸　　۴) ۲۱

۹۷- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A\times A$ کدام است؟

تجربی - ۹۷

۱) ۳۶　　۲) ۴۰　　۳) ۴۲　　۴) ۴۴

۹۸- اگر $A=\begin{bmatrix}24 & 6 & 3 & 1\\ 8 & 2 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}4 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

ریاضی - ۹۷

۱) ۱۶　　۲) ۱۸　　۳) ۲۰　　۴) ۲۴

۹۹- از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}-1 & 2x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x کدام است؟

ریاضی - ۹۸

۱) $\frac{2}{9}$　　۲) $\frac{3}{8}$　　۳) $\frac{4}{9}$　　۴) $\frac{3}{5}$

۱۰۰- به‌ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & y\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & -1 & x\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۸

۱) $x=1$ و $y=-7$　　۲) $x=2$ و $y=-7$　　۳) $x=2$ و $y=-5$　　۴) $x=1$ و $y=-5$

فصل چهارم

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ **۴** بنابر تعریف درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$a_{۱۱}=۷,\quad a_{۱۲}=-۲,\quad a_{۱۳}=-۲$$
$$a_{۲۱}=۵,\quad a_{۲۲}=۷,\quad a_{۲۳}=-۲$$
$$a_{۳۱}=۵,\quad a_{۳۲}=۵,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ & -۲ \\ ۵ & ۷ & -۲ \\ ۵ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$۳(۵)+۳(۷)+۳(-۲)=۱۵+۲۱-۶=۳۰$$

۲ **۴** ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۳,\quad a_{۱۲}=۳,\quad a_{۱۳}=۵$$
$$a_{۲۱}=۶,\quad a_{۲۲}=۸,\quad a_{۲۳}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}$. اکنون به‌دست می‌آید

مجموع درایه‌های ماتریس $A=۳+۳+۵+۶+۸+۴=۲۹$

۳ **۱** با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A،

$$a_{۲۴}=۲^۲-۱=۳,\quad a_{۳۱}=۳+۱=۴,\quad a_{۳۳}=۷$$

بنابراین

$$۲a_{۲۴}-۳a_{۳۱}+۴a_{۳۳}=۲(۳)-۳(۴)+۴(۷)=۲۲$$

۴ **۱** درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=۰,\quad a_{۱۲}=۲,\quad a_{۱۳}=۳,\quad a_{۱۴}=۴$$
$$a_{۲۱}=-۲,\quad a_{۲۲}=۰,\quad a_{۲۳}=۳,\quad a_{۲۴}=۴$$
$$a_{۳۱}=-۳,\quad a_{۳۲}=-۳,\quad a_{۳۳}=۰,\quad a_{۳۴}=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ & ۴ \\ -۳ & -۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲ است.

۵ **۴** ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. پس ماتریس‌های $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$ قطری هستند و بقیه قطری نیستند.

۶ **۲** ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند. پس ماتریس گزینهٔ (۲) ماتریس اسکالر نیست.

۷ **۴** دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی‌اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. چون $A=B$، پس

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۱۲ \Rightarrow x=۶,\ y=۳$$
$$z-۱=-۳ \Rightarrow z=-۲$$

بنابراین $\frac{x}{۲}-y+۲z=\frac{۶}{۲}-۳-۴=-۴$.

۸ **۲** در دو ماتریس مساوی درایه‌های نظیر هم مساوی‌اند، پس

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۵ & b \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -۵ \\ d & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۳+b \\ ۷ & a-۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -۵ \\ d & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} c=۳ \\ ۳+b=-۵ \Rightarrow b=-۸ \\ d=۷ \\ a-۴=۱ \Rightarrow a=۵ \end{cases}$$

بنابراین $ac-bd=(۵)(۳)-(-۸)(۷)=۷۱$.

۹ **۴** با تعریف ماتریس‌های A و B درایه‌های این دو ماتریس را تعیین می‌کنیم:

$$A=[۲ij-۱]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix},\quad B=[i^۲-۳j]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۶ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $۲A-B=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۷ & ۱۱ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۷ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۲ & -۵ & -۸ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۶ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$. فقط ستون دوم ماتریس $۲A-B$ را لازم داریم، پس $۲A-B=\begin{bmatrix} ? & ۱۱ & ? \\ ? & ۱۶ & ? \\ ? & ۱۹ & ? \end{bmatrix}$.

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $۲A-B$ برابر است با

$$۱۱+۱۶+۱۹=۴۶$$

۱۰ **۱** ابتدا درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_{۱۲}=۱-۲=-۱ \\ a_{۱۳}=۱-۳=-۲ \\ a_{۲۳}=۲-۳=-۱ \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} & -۱ & -۲ \\ ? & & -۱ \\ ? & ? & \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{۱۲}=۲-۱=۱ \\ b_{۱۳}=۳-۱=۲ \\ b_{۲۳}=۳-۲=۱ \end{cases} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} & ۱ & ۲ \\ ? & & ۱ \\ ? & ? & \end{bmatrix}$$

پس $A+B=\begin{bmatrix} & ۰ & ۰ \\ ? & & ۰ \\ ? & ? & \end{bmatrix}$.

بنابراین مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر صفر است.

۱۱ **۳** ضرب دو ماتریس در صورتی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. در اینجا ماتریس A ماتریسی 2×3 و ماتریس C ماتریسی 3×5 است، پس ماتریس AC قابل تعریف و از مرتبهٔ 2×5 است. سایر گزینه‌ها این ویژگی را ندارند و ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست.

۱۲ **۴** ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر و ماتریس $B=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. اکنون ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس AB یک ماتریس اسکالر نیست، پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱۳ **۳** ابتدا ماتریس‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4\\4&4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-14\\1&2\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB-BA=\begin{bmatrix}1&-4\\4&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-14\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&10\\3&2\end{bmatrix}$$

۱۴ **۱** ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a&-8+2a\\b-3&-2b-2\end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، پس

$$\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow a=4\\ b-3=0\Rightarrow b=3\end{cases}$$

پس $2a-b=8-3=5$.

۱۵ **۲** **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&4\\-2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-8\\4&8\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^2+2A-I=\begin{bmatrix}-4&-8\\4&8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2&4\\-2&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

راه‌حل دوم اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$.

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\-2&-4\end{bmatrix}\Rightarrow A^2+2A=\bar{O}$$

در نتیجه $A^2+2A-I=\bar{O}-I=-I$.

۱۶ **۲** **راه‌حل اول** ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&-2\\-1&2&-2\\-1&2&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+1+0&2-2+0&-2+2+0\\-2+1+1&4-2-2&-4+2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

پس AB ماتریس صفر است.

راه‌حل دوم ماتریس A از مرتبهٔ 2×3 و ماتریس B از مرتبهٔ 3×3 است، پس ماتریس AB از مرتبهٔ 2×3 است، پس AB ماتریس مربعی نیست. بنابراین AB نمی‌تواند ماتریس اسکالر یا همانی یا قطری باشد، زیرا این ماتریس‌ها مربعی هستند. پس تنها گزینهٔ (۲) می‌تواند درست باشد.

۱۷ **۳** توجه کنید که

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\6&6\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}3&3\\6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&9\\18&18\end{bmatrix}$$

$$A^5=A^2\times A^3=\begin{bmatrix}3&3\\6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&9\\18&18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}81&81\\162&162\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس A^5 برابر $81+162=243$ است.

۱۸ **۳** ابتدا $A\times A$ را پیدا می‌کنیم:

$$A\times A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&14\\21&42\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}=7A$$

پس

$$A^3=\underbrace{A\times A}_{7A}\times A=7\,\underbrace{A\times A}_{7A}=7(7A)=49A$$

۱۹ **۳** A ماتریس قطری است و می‌دانیم حاصل‌ضرب ماتریس‌های قطری یک ماتریس قطری است. بنابراین

$$A^7=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^7=\begin{bmatrix}(1)^7&0&0\\0&(-1)^7&0\\0&0&2^7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2^7\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^7 برابر $2^7=128$ است.

۲۰ (۱) بنابر فرض سؤال،

$$A^2=2A+13I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}=2A+13\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9&2\\10&21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}13&0\\0&13\end{bmatrix}=2A\Rightarrow\begin{bmatrix}-4&2\\10&8\end{bmatrix}=2A\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-2&1\\5&4\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر $-2+1+4+5=8$ است.

۲۱ (۳) ماتریس $(A-B)^2$ را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم در ماتریس‌ها نمی‌توان از اتحادهای جبری استفاده کرد. پس

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

بنابر فرض $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$، بنابراین

$$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$$

$$-AB-BA=-2AB\Rightarrow AB=BA$$

توجه کنید از اتحادهای جبری در ماتریس‌ها در صورتی می‌توانیم استفاده کنیم که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی داشته باشد.

۲۲ (۴) در گزینهٔ (۱)، درایهٔ a_{12} از رابطهٔ $i+1$ به‌دست می‌آید، پس $a_{12}=2$، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

در گزینهٔ (۲)، درایهٔ a_{12} از رابطهٔ $2j+1$ به‌دست می‌آید، پس $a_{12}=5$، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

در گزینهٔ (۳)، درایهٔ a_{11} از رابطهٔ $j-1$ تعیین می‌شود، پس $a_{11}=0$ که در ماتریس A این درایه برابر ۲ است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۳ (۳) ابتدا ماتریس $2X+Y$ را برحسب ماتریس‌های A و B به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}X+Y=A\\X-Y=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{A+B}{2}\\Y=\dfrac{A-B}{2}\end{cases}\Rightarrow 2X+Y=A+B+\frac{A-B}{2}\quad(1)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A+B=[2i-j]_{2\times2}+[4i+3j]_{2\times2}=[6i+2j]_{2\times2}\quad(2)$$

$$A-B=[2i-j]_{2\times2}-[4i+3j]_{2\times2}=[-2i-4j]_{2\times2}\quad(3)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$2X+Y=[6i+2j]_{2\times2}+[-i-2j]_{2\times2}=[5i]_{2\times2}=\begin{bmatrix}5&5\\10&10\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ برابر $5+5+10+10=30$ است.

۲۴ (۴) ماتریس‌های A و B را در معادلهٔ زیر قرار می‌دهیم:

$$mA-nB=\begin{bmatrix}-3&-4\\5&0\end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix}0&-2\\1&2\end{bmatrix}-n\begin{bmatrix}1&0\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-4\\5&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-n&-2m\\m+n&2m-3n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-4\\5&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-n=-3\Rightarrow n=3\\-2m=-4\Rightarrow m=2\\m+n=5\\2m-3n=0\end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به‌دست آمده در معادلهٔ چهارم صدق نمی‌کنند، پس $m=2$ و $n=3$ قابل‌قبول نیست.

۲۵ (۲) ابتدا درایه‌های ماتریس $C=2A-B$ را به‌دست می‌آوریم:

$$C=2A-B=2\begin{bmatrix}a-1&m^2\\3&-1\\2&m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-a&m+1\\a&2\\4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a-2&2m^2-m-1\\6-a&-4\\0&2m+1\end{bmatrix}$$

اکنون بنابر فرض سؤال،

$$c_{11}=-c_{22}\Rightarrow 3a-2=-(-4)\Rightarrow 3a-2=4\Rightarrow a=2$$

$$c_{21}=2c_{32}\Rightarrow 6-a=2(2m+1)\Rightarrow 4m+a=4$$

$$\xrightarrow{a=2}4m+2=4\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

بنابراین $a-m=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

۲۶ (۱) ابتدا ماتریس‌های $(A+B)^2$ و AB را پیدا می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\2&0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=\begin{bmatrix}0&-1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

در ضمن،

$$AB=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$C=AB-(A+B)^2=\begin{bmatrix}-3&1\\2&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس C برابر است با $-1+1+2+1=3$.

۲۷ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1-k\\2+2k&-2+k^2\end{bmatrix}$$

پس

$$A^2+2A-I=\bar{O}$$

$$\begin{bmatrix}-1&-1-k\\2+2k&-2+k^2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\begin{bmatrix}0&-k-3\\2k+6&k^2+2k-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-k-3=0\Rightarrow k=-3\\2k+6=0\Rightarrow k=-3\\k^2+2k-3=0\Rightarrow(k+3)(k-1)=0\Rightarrow k=-3 \text{ یا } k=1\end{cases}$$

بنابراین $k=-3$ که در هر سه معادله صدق می‌کند قابل قبول است. پس به‌ازای یک مقدار k تساوی ماتریسی داده شده برقرار است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&k\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=(k+1)A-(k+2)I$$

طبق فرض $A^2=I-2A$، بنابراین $(k+1)A-(k+2)I=I-2A$. در نتیجه

$$\begin{cases}k+1=-2\Rightarrow k=-3\\-(k+2)=1\Rightarrow k=-3\end{cases}$$

پس فقط یک مقدار برای k به دست می‌آید.

۲۸ (۲) ابتدا ماتریس B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2A+B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \\ -2\quad A+B=\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \\ -2A-2B=\begin{bmatrix}-4&-4\\-2&-2\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} -B=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&2\end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix}3&2\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$B^2=B\times B=\begin{bmatrix}3&2\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\-1&2\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس B^2 برابر $7+2+2-1=10$ است.

۲۹ (۴) ابتدا ماتریس‌های A و B را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3&-6\\-5&-8\end{bmatrix}$$

پس $AB=\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-6\\-5&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-6\\-19&-34\end{bmatrix}$. بنابراین

$$AB-B=\begin{bmatrix}-3&-6\\-19&-34\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3&-6\\-5&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\-14&-26\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $AB-B$ برابر -40 است.

۳۰ (۱) چون $c_{21}=16$، پس

$$\begin{bmatrix}a&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\\3\end{bmatrix}=a+2b+6=16$$

یعنی $a+2b=10$. همچنین از $c_{22}=0$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}a&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\a\\4\end{bmatrix}=-a+2a+8=0$$

پس $a=-8$. از برابری $a+2b=10$ به‌دست می‌آید $-8+2b=10$، یعنی $b=9$. اکنون می‌نویسیم $a-b=-8-9=-17$.

۳۱ (۴) فرض می‌کنیم $B=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}$. در این صورت ماتریس BA برابر است با

$$BA=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&-4&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a&-4b&-3c\\6d&-4e&-3f\\6g&-4h&-3k\end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال $a+d+g=7$، $b+e+h=3$ و $c+f+k=5$. بنابراین

مجموع درایه‌های ماتریس BA

$$=6a+6d+6g-4b-4e-4h-3c-3f-3k$$

$$=6(a+d+g)-4(b+e+h)-3(c+f+k)=6(7)-4(3)-3(5)=15$$

۳۲ (۱) ابتدا حاصل‌ضرب را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}3&x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&-2\\-2&-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+x&-1&7-2x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&-2\\-2&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\\x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+x&-1&7-2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+x-10+7x-2x^2\end{bmatrix}$$

حاصل به‌دست آمده را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$4+x-10+7x-2x^2=0\Rightarrow 2x^2-8x+6=0$$

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1,\quad x=3$$

پس مجموع مقادیر x برابر ۴ است.

۳۳ (۱) برای به‌دست آوردن درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB، باید سطر دوم ماتریس A را در ستون سوم ماتریس B ضرب کرد:

$$\begin{bmatrix}3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\1\\2\end{bmatrix}=6\Rightarrow 3m+1+2=6\Rightarrow m=1$$

۳۴ (۴) همهٔ گزینه‌ها با فرض $AB=BA$ درست هستند. درستی هر سه حکم را به‌ازای $n=3$ بررسی می‌کنیم. با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب می‌نویسیم:

گزینهٔ (۱)

$$A^3B=AAAB=AA(AB)=AA(BA)=A(AB)A$$

$$=A(BA)A=(AB)AA=(BA)AA=BA^3$$

گزینهٔ (۲)

$$(AB)^3=(AB)(AB)(AB)=A\underbrace{(BA)}_{AB}\underbrace{(BA)}_{AB}B$$

$$=AA\underbrace{(BA)}_{AB}BB=AAABBB=A^3B^3$$

گزینهٔ (۳)

$$(AB)^3=(BA)^3=(BA)(BA)(BA)=B\underbrace{(AB)}_{BA}\underbrace{(AB)}_{BA}A$$

$$=BB\underbrace{(AB)}_{BA}AA=BBBAAA=B^3A^3$$

به همین ترتیب برای مقادیر دیگر n می‌توانیم درستی این تساوی‌ها را ثابت کنیم.

۳۵ (۴) در ضرب ماتریس‌ها قانون حذف برقرار نیست، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. در ضمن اگر $AB=\bar{O}$، آن‌گاه لزومی ندارد A یا B ماتریس صفر باشند و اگر $A^n=\bar{O}$، آن‌گاه لازم نیست $A=\bar{O}$.

برای رد گزینهٔ (۳) به عنوان مثال، اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه

$$A-I=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow (A-I)^2=\bar{O}$$

ولی $A\neq I$. پس گزینهٔ (۴) درست است، زیرا می‌توان نوشت

$$A^k=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k-1}\times A=A^{k-1}\times A=A\times A^{k-1}$$