

قسمت اول

معادله درجه اول و روش‌های حل آن

یادآوری از اتحادها

مقدمات: اتحادهای معروف که در سال‌های قبل خوانده‌اید عبارتند از:

$$\text{اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای: } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{اتحاد مزدوج: } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\text{اتحاد یک جمله مشترک: } (\square + a)(\square + b) = \square^2 + (a + b) \times \square + ab$$

هر عبارتی می‌تواند باشد.

$$\text{اتحاد مکعب مجموع دوجمله‌ای: } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{اتحاد مکعب تفاضل دوجمله‌ای: } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{اتحاد چاق‌ولاغر (۱): } (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$\text{اتحاد چاق‌ولاغر (۲): } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها می‌نویسیم:

$$۱) \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{16}$$

$$۲) (2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$۳) (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$$

$$۴) \underbrace{(\Delta x - 1)(\Delta x + 6)}_{\text{جمله مشترک است}} = (\Delta x)^2 + (-1 + 6)(\Delta x) + (-1)(6) = 2\Delta x^2 + 5\Delta x - 6$$

$$۵) \left(\frac{1}{7} + \frac{m}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{m}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3 = \frac{1}{343} + \frac{m}{49} + \frac{m^2}{147} + \frac{m^3}{27}$$

$$۶) (z - 1)^3 = z^3 - 3(z)^2(1) + 3(z)(1)^2 - 1^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

$$۷) (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$$

در فصل اول کتاب امسال، لازم است برخی عبارتهای تجزیه کنیم. در تجزیه می‌خواهیم عبارتهای را به شکل حاصل ضرب دو یا چند عامل با درجه کم‌تر درآوریم، به همین منظور مختصری در مورد تجزیه صحبت می‌کنیم:

۱- روش فاکتورگیری: در این روش از ب.م.م. جملات، فاکتور می‌گیریم (منظور از ب.م.م. همان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است). مثلاً داریم:

$$\text{مثال ۱: } 10x^2y^4 - 30x^4yz = 10x^2y(y^3 - 3x^2z)$$

$$\text{مثال ۲: } 20x^5(x^2 + 1)^3 - 10x^3(x^2 + 1)^4 = 10x^3(x^2 + 1)^3[2x^2 - (x^2 + 1)] = 10x^3(x^2 + 1)^3(x^2 - 1)$$

۲- استفاده از اتحادها: به کمک اتحادهای خوانده‌شده می‌توانیم عبارتهای جبری را تجزیه کنیم فقط کافی است ۶ اتحادی را که کمی قبل برایتان نوشتیم از راست به چپ بخوانید، یعنی مثلاً داریم:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\text{مثال: } 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

حالا چند عبارت دیگر را تجزیه می‌کنیم:

مثال ۱: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
دوباره مزدوج تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

مثال ۲: $2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x(x^2 + 3x - 4) = 2x(x + 4)(x - 1)$
تجزیه به کمک اتحاد یک جمله مشترک فاکتور از $2x$

مثال ۳: $8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

معادله درجه اول و حل آن

معادله، یک تساوی شامل یک یا چند متغیر است که به ازای بعضی از مقادیر برای متغیرها، این تساوی برقرار است. حل یک معادله به دست آوردن همه آن مقادیری است که به ازای آن‌ها تساوی برقرار باشد، این مقادیر را جواب‌های معادله می‌گویند.

معادله‌ای که پس از ساده شدن به صورت $ax + b = 0$ درآید که در آن $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ ، یک معادله درجه اول نامیده می‌شود. قبلاً با حل این جور معادله‌ها آشنا شدید، همون که معلوم‌ها رو به طرف و مجهول‌ها رو به طرف دیگه می‌بریم و در نهایت جواب می‌شه، طرف معلوم، تقسیم بر ضریب مجهول.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

(آ) $2x + 12 = 3x + 2$ (ب) $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{4}$ (پ) $2x(x-4) = (2x-1)(x+2)$

پاسخ: (آ) معلوم‌ها رو به طرف و مجهول‌ها رو هم طرف دیگه می‌بریم و با هم جمع می‌کنیم، فقط به این نکته توجه می‌کنیم که هر عبارتی رو بابه‌ها می‌کنیم، قرینه می‌شه:

$2x + 12 = 3x + 2 \Rightarrow 2x - 3x = 2 - 12 \Rightarrow -x = -10$

$x = \frac{-10}{-1} = 10$

حالا مقدار x برابر است با طرف معلوم تقسیم بر ضریب مجهول:

(ب) روش اول: $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2(x+1) - 3(x-1)}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2x+2-3x+3}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{-x+5}{6} = \frac{x}{4}$

مخرج مشترک می‌گیریم.

$\Rightarrow \frac{-x+5}{6} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4(-x+5) = 6x \Rightarrow -4x+20 = 6x \Rightarrow -4x-6x = -20 \Rightarrow -10x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{-10} = 2$

روش دوم: می‌توانیم از همان اول دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم: (مخرج مشترک، همان ک.م.م مخرج‌هاست.)

$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\times 12} 4\left(\frac{x+1}{3}\right) - 6\left(\frac{x-1}{2}\right) = 3\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow 4(x+1) - 6(x-1) = 3x \Rightarrow 4x+4-6x+6 = 3x$

$\Rightarrow 4x - 6x - 3x = -4 - 6 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{-5} = 2$

(پ) $2x(x-4) = (2x-1)(x+2) \Rightarrow 2x^2 - 8x = 2x^2 + 4x - x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 2x^2 - 4x + x = -2$

$\Rightarrow -11x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-11} = \frac{2}{11}$

تست: جواب معادله $\frac{4x}{3} - \frac{7x}{12} = \frac{2x+1}{4} + \frac{1}{4}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: ک.م.م مخرج‌ها ۱۲ است، یعنی کوچک‌ترین عددی که بر تمام مخرج‌ها بخش‌پذیر باشد ۱۲ است، لذا تمام جملات را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$\frac{4x}{3} - \frac{7x}{12} = \frac{2x+1}{4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 12} 4(4x) - 7x = 3(2x+1) + 3$

$\Rightarrow 16x - 7x = 6x + 3 + 3 \Rightarrow 16x - 7x - 6x = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$ گزینه (۲) صحیح است.

نکته جواب‌های یک معادله در آن معادله صدق می‌کنند. یعنی اگر جواب (ریشه) یک معادله (درجه اول) داده شود، آن جواب را به جای متغیر معادله قرار می‌دهیم تا مجهول خواسته شده به دست آید.

مثال: اگر $x = 3k + 2$ ، جواب معادله $\frac{x-k}{2} + 4 = 2k - 3$ باشد، مقدار k و x را بیابید.

پاسخ: جواب معادله در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{x-k}{2} + 4 = 2k - 3 \xrightarrow{x=3k+2} \frac{3k+2-k}{2} + 4 = 2k - 3 \Rightarrow \frac{2k+2}{2} + 4 = 2k - 3$$

$$\Rightarrow \frac{2(k+1)}{2} + 4 = 2k - 3 \Rightarrow k + 1 + 4 = 2k - 3 \Rightarrow k - 2k = -3 - 5 \Rightarrow -k = -8 \Rightarrow k = \frac{-8}{-1} = 8 \Rightarrow x = 3k + 2 = 3(8) + 2 = 26$$

تست: اگر $x = -2$ جواب معادله $\frac{m+x}{2} = m + 5$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱۲ (۴)

-۸ (۳)

۸ (۲)

-۱۲ (۱)

پاسخ: جواب معادله در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{m+x}{2} = m + 5 \xrightarrow{x=-2} \frac{m-2}{2} = m + 5 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m - 2 = 2(m + 5)$$

$$\Rightarrow m - 2 = 2m + 10 \Rightarrow m - 2m = 10 + 2 \Rightarrow -m = 12 \Rightarrow m = -12 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

از معادله درجه اول در حل بسیاری از مسائل ریاضی استفاده می‌شود. به این شکل که مجهول مسئله را یک متغیر مثل x, y, t, \dots در نظر می‌گیریم و با توجه به صورت مسئله یک معادله درجه اول برای مسئله می‌نویسیم و با حل این معادله، مجهول مسئله به دست می‌آید. در انتها باید جواب به دست آمده را امتحان کنیم که آیا در شرایط اولیه مسئله صدق می‌کند یا خیر؟ اگر صدق نکرد آن را قبول نمی‌کنیم.

مثال: عددی را بیابید که:

آ) اگر از دو برابر آن سه واحد کم کنیم، حاصل برابر با ۲۵ گردد.

ب) اگر به دو برابر آن سه واحد اضافه کنیم، حاصل برابر ۱۵ گردد.

$$2x - 3 = 25 \Rightarrow 2x = 25 + 3 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{2} = 14$$

پاسخ: آ) آن عدد را x در نظر می‌گیریم، لذا خواهیم داشت:

$$2x + 3 = 15 \Rightarrow 2x = 15 - 3 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$$

ب) آن عدد را x در نظر می‌گیریم، پس خواهیم نوشت:

تست: طول و عرض یک مستطیل به نسبت ۳ به ۱ می‌باشند. اگر محیط این مستطیل ۵۶ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۷۰ (۴)

۱۴۷ (۳)

۲۴۳ (۲)

۱۷۵ (۱)

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3y$$

پاسخ: اگر طول و عرض را به ترتیب x و y بنامیم آن‌گاه طبق فرض سؤال خواهیم داشت:

$$\text{محیط} = 2(x + y) \Rightarrow 56 = 2(3y + y) \Rightarrow 56 = 2(4y) \Rightarrow 56 = 8y \Rightarrow y = \frac{56}{8} = 7 \Rightarrow x = 3y = 3 \times 7 = 21$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y = 21 \times 7 = 147 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

تست: مجموع سه عدد زوج متوالی برابر با ۴۲ می‌باشد، یکان عدد کوچک‌تر کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: آن سه عدد زوج را $x, x + 2$ و $x + 4$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$x + x + 2 + x + 4 = 42 \Rightarrow 3x + 6 = 42 \Rightarrow 3x = 42 - 6 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12 \Rightarrow \text{عدد کوچک‌تر } 12 \text{ است.}$$

بیشتر، مگه تلفته اعداد متوالین؟ پس نباید اونهارو به صورت $x + 20x + 10x$ فرض کنیم؟

پیر: بله گفته، اما گفته زوج متوالین! یعنی فاصله اون‌ها از هم دوتا دوتا است. آگه در متن سؤال، می‌گفت سه عدد طبیعی متوالی، حرف شما درست بود.



قسمت دوم

معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

Mathematics

فصل

۱

معادله درجه دوم

هر معادله که پس از ساده کردن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ باشد، یک معادله درجه دوم نام دارد. مانند:

$$3x^2 - x + 1 = 0, \quad 2x^2 = 1, \quad x^2 - x = 0$$

یک معادله درجه دوم می‌تواند حداکثر ۲ تا جواب داشته باشد، یعنی می‌تواند اصلاً جواب نداشته باشد یا یک جواب داشته باشد و یا ۲ تا جواب.

تست: به ازای کدام مقدار m ، $x = 1$ جوابی برای معادله $2x^2 - mx = m$ است؟

-۱ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: جواب معادله در معادله صدق می‌کند: (معادله په درجه اول باشه په درجه دوم، این موضوع برآش درسته.)

$$2x^2 - mx = m \xrightarrow{x=1} 2(1)^2 - m(1) = m \Rightarrow 2 - m = m \Rightarrow 2 = m + m \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

روش‌های حل معادله درجه دوم

برای حل معادله درجه دوم روش‌های مختلفی وجود دارد.

۱) روش تجزیه: در این روش از فاکتورگیری یا اتحادها کمک می‌گیریم تا معادله را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت تبدیل کنیم. در این جا از خاصیت عامل صفر استفاده می‌کنیم و تک تک عبارت‌ها را برابر صفر قرار داده و جواب‌های (ریشه‌های) معادله را به دست می‌آوریم.

$$B = 0 \quad \text{یا} \quad A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{یا} \quad B = 0$$

مثال: معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

پ) $x^2 + x - 56 = 0$

ب) $(x-1)^2 = 16$

آ) $x(x-1) = 2(x-1)$

ث) $x^2 + x + 1 = 0$

ت) $x(x-4) = -4$

پاسخ:

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x-1)} (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \quad \text{آ)}$$

$$(x-1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4^2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-1-4)(x-1+4) = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$x^2 + x - 56 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+8)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+8=0 \Rightarrow x=-8 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$x(x-4) = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad \text{ت)}$$

وقتی معادله درجه دوم فقط یک جواب داشته باشد، به آن جواب، ریشه مضاعف می‌گوییم.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \Rightarrow \text{تجزیه نشدنی} \quad \text{ث)}$$

وقتی یک معادله درجه دوم قابل تجزیه نباشد، می‌گوییم معادله ریشه ندارد.

تست: ریشه بزرگ‌تر معادله $(x+1)^2 + 3(x+1) - 4 = 0$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)

پاسخ: از تجزیه عبارت برای حل معادله کمک می‌گیریم: در این معادله $(x+1)$ و مربعش مشاهده می‌شوند پس $(x+1)$ جمله مشترک خواهد بود. حال دو عدد می‌خواهیم که ضربشان -4 و جمعشان $+3$ باشد که این دو عدد عبارتند از $+4$ و -1 حالا ادامه حل را ببینید.

$$(x+1)^2 + 3(x+1) - 4 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} [(x+1)-1][(x+1)+4] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1-1)(x+1+4) = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ریشه بزرگ‌تر: } x = 0 \\ x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 & \text{گزینه (۲) صحیح است.} \end{cases}$$



معزرت می‌فوم، روش ساده‌تری برای حل این پور معادله‌ها وجود نداره؟

دیپر: پرا وجود داره. یه روشی هست به نام روش تغییر متغیر، البته در کتاب درسی به اون اشاره‌ای نشده ولی سرعت حل بعضی معادلات رو سریع‌تر میکنه پس یار بگیری ضرر نداره. در این معادله $(x+1)$ و $(x+1)^2$ مشاهده می‌شه یعنی یک عبارت، دو بار تکرار شده حال $x+1$ رو مساوی با t در نظر می‌گیریم $x+1 = t$ پس در معادله اصلی، هر جا $(x+1)$ دیدیم به جاش t قرار می‌دیم تا معادله‌ای بدست بیاریم که راحت‌تر حل بشه:

$$(x+1)^2 + 3(x+1) - 4 = 0 \xrightarrow{x+1=t} t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t-1)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 & \xrightarrow{t=x+1} \begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ x = -4-1 = -5 \end{cases} \\ t = -4 \end{cases}$$

۲) روش ریشه‌گیری: بیان ساده این روش به این صورت است که اگر در یک معادله، دو طرف با یک طرف معادله‌ای توان ۲ داشت (مانند $x^2 = 10$ یا $25 = (x+6)^2$ یا $(x+1)^2 = (2x-3)^2$) و امثال آن‌ها) کافی است از دو طرف تساوی، جذر گرفته و به سمت راست، علامت‌های \pm بدهیم.

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = \pm B \quad \text{یا} \quad A^2 = B \Rightarrow A = \pm\sqrt{B}$$

مثال: معادلات زیر را به کمک ریشه‌گیری حل کنید.

- آ) $x^2 - 9 = 0$ ب) $4(x+1)^2 = 25$ پ) $3x^2 + 27 = 0$ ت) $(x-1)^2 = 4(x+1)^2$

پاسخ:

آ) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم.}} \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{3^2} \Rightarrow x = \pm 3$ (۱)

ب) $(x+1)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow (x+1) = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow x+1 = \pm\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \\ x+1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2} \end{cases}$ (ب)

پ) $3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -27 \Rightarrow x^2 = \frac{-27}{3} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$ (پ)
منفی نامنفی

توجه کنید که در روش ریشه‌گیری (جذرگیری) باید طرف دوم تساوی هم نامنفی باشد. به عبارت دیگر داریم:

$$A^2 = k \begin{cases} k < 0 & \text{معادله جواب ندارد.} \\ k = 0 & A = 0 \text{ (معادله ریشه مضاعف دارد.)} \\ k > 0 & A = \pm\sqrt{k} \text{ (معادله دو جواب دارد.)} \end{cases}$$

ت) $(x-1)^2 = 4(x+1)^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-1 = \pm 2(x+1) \Rightarrow x-1 = \pm(2x+2)$ (ت)

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x+2 \Rightarrow x-2x = 2+1 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3 \\ x-1 = -2x-2 \Rightarrow x+2x = -2+1 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

تست: در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ اگر $b = 0$ و $c < 0$ باشد، یکی از جواب‌های معادله کدام است؟

(۱) $\sqrt{-c}$ (۲) $-\sqrt{-c}$ (۳) $\sqrt{-c}$ (۴) جواب ندارد.

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=0} x^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -c$$

پاسخ:

چون $c < 0$ ، پس $-c > 0$ و می‌توان از ریشه‌گیری کمک گرفت:

$$x^2 = -c \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm\sqrt{-c} \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

اما همیشه هم کار به این راحتی نیست و به این سرعت نمی‌شه از ریشه‌گیری جواب‌های معادله رو پیدا کنیم. بعضی وقت‌ها باید اول عبارتی با توان ۲ (مربع کامل) بسازیم تا بعد بتونیم از ریشه‌گیری کمک بگیریم. به این کار، روش مربع کامل کردن می‌گیم که الان باهاش آشنا میشوید.

(۳) روش مربع کامل: در این روش برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مثال: $3x^2 - 6x - 1 = 0$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0$$

(A) اگر ضریب x^2 یک نبود، دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = \frac{1}{3}$$

(B) عدد ثابت را به سمت راست تساوی می‌بریم:

$$\xrightarrow{+(\frac{-2}{2})^2=1} x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3} + 1$$

(C) نصف ضریب x را به توان ۲ می‌رسانیم و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

(D) در این مرحله سمت چپ تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به صورت یک عبارت مربع کامل می‌نویسیم و سمت راست معادله، یک عدد است.

حال از ریشه‌گیری برای محاسبه ریشه‌ها (جواب‌ها) استفاده می‌کنیم: (البته آگه عدد سمت راست، منفی شد معادله جواب ندراره.)

$$(x-1)^2 = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-1 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

مثال: معادلات زیر را با روش مربع کامل کردن حل کنید.

(پ) $2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$

(ب) $2x^2 - x - 2 = 0$

(آ) $x^2 + 2x + 3 = 0$

پاسخ:

(آ) معادله ریشه ندارد. $x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = -3 \xrightarrow{+(\frac{2}{2})^2=1} x^2 + 2x + 1 = -3 + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (x+1)^2 = -2 \xrightarrow{\text{منفی}}$

اینازه! پس باید هتماً تو مرحله آخر اون طرف تساوی مثبت باشه تا بتونیم از طرفین ریشه بگیریم؟

دیر، آخرین بانم! اما آگه صفرم باشه قبوله. تو این شرایط ریشه‌مون مضاعف می‌شه. (مثال پ رو ببین)

(ب) $2x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x = 1 \xrightarrow{+(\frac{-\frac{1}{2}}{2})^2 = \frac{1}{16}} x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16} \xrightarrow{\text{جذر}} (x - \frac{1}{4}) = \pm\sqrt{\frac{17}{16}} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ x - \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

(پ) $2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{4} \xrightarrow{+(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}} x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف:

تست: در حل معادله $3x^2 + 9x - 1 = 0$ به روش مربع کامل، کدام عدد را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم؟

- ۹ (۱) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۴)

پاسخ:

$$3x^2 + 9x - 1 = 0 \xrightarrow{+3} x^2 + 3x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = \frac{1}{3}$$

پس عدد $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ را باید به طرفین معادله اضافه کنیم، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۴) حل معادله درجه دوم به روش کلی (Δ)

در این روش از یک مبین به نام Δ استفاده می‌کنیم به این صورت که در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، عبارت Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

حال با توجه به علامت Δ حالت‌های زیر را داریم:

۱) $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه متمایز دارد.
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \xrightarrow{\text{به طور خلاصه}} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲) $\Delta = 0$: معادله یک ریشه (ریشه مضاعف) دارد.
$$x = \frac{-b}{2a}$$

۳) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

مثال: معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

- ۱) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (آ) ۲) $3x^2 - x + 2 = 0$ (ب) ۳) $4x(x-1) = -1$ (پ)

پاسخ:

۱)
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+1}{4} = 1 \\ x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 (آ)

۲)
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow$$
 معادله ریشه ندارد. (ب)

۳)
$$4x(x-1) = -1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$
 (پ)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$$
 ریشه مضاعف: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{1}{2}$

تست: مقدار m به طوری که معادله $4x^2 - 12x + m = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد، کدام است؟

- ۹ (۴) ۳ (۳) ۶ (۲) صفر (۱)

پاسخ:

$$4x^2 - 12x + m = 0$$

گزینه (۴) صحیح است.
$$\Delta = 0 \Rightarrow (-12)^2 - 4(4)(m) = 0 \Rightarrow 144 - 16m = 0 \Rightarrow 16m = 144 \Rightarrow m = \frac{144}{16} = 9$$

تست: اگر معادله $mx^2 - 4x + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد، بیشترین مقدار صحیح برای m کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴)

پاسخ:

$$mx^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{دو ریشه متمایز}} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4m(1) > 0 \Rightarrow 16 - 4m > 0 \Rightarrow 4m < 16$$

یعنی $\Delta > 0$

$$\Rightarrow m < \frac{16}{4} \Rightarrow m < 4 \Rightarrow m = 3 = \text{بیشترین مقدار صحیح}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ می‌توان بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های احتمالی را بیابیم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

نکته توجه کنید باید بررسی کنیم که معادله اصلاً جواب دارد یا نه، اگر جواب داشت می‌توانیم مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را پیدا کنیم. یعنی دل‌تایید منفی باشد. ضمناً $x_1 + x_2$ را با S و $x_1 x_2$ را با P هم نمایش می‌دهند.

مثال: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلات را به دست آورید. (در صورت وجود)

(آ) $3x^2 + 2x - 8 = 0$ (ب) $3x^2 + 2x + 8 = 0$

پاسخ:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

(آ) معادله دو ریشه متمایز دارد. $\Delta = 2^2 - 4(3)(-8) = 4 + 96 = 100 > 0 \Rightarrow$

(ب) معادله ریشه ندارد. $\Delta = 2^2 - 4(3)(8) = 4 - 96 < 0 \Rightarrow$

تست: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - x - 4 = 0$ باشند، مجموع معکوس ریشه‌ها کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

پاسخ:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-b}{c} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

گزینه (۴) صحیح است. \Rightarrow

تست: در معادله $mx^2 - (4m-1)x - 4m^2 = 0$ اگر مجموع ریشه‌ها برابر ۳ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- ۴ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

پاسخ:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{-(4m-1)}{m} = \frac{4m-1}{m} \Rightarrow \frac{4m-1}{m} = 3 \Rightarrow 4m-1 = 3m \Rightarrow 4m-3m = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4m^2}{m} = -4$$

گزینه (۱) صحیح است. \Rightarrow

نکته تستی: در معادله $ax^2 + bx + c = 0$

$\frac{c}{a}, 1$

(آ) اگر مجموع ضرایب برابر صفر باشد (یعنی $a + b + c = 0$)، آن‌گاه ریشه‌های معادله عبارتند از:

$-\frac{c}{a}, -1$

(ب) اگر $b = a + c$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله عبارتند از:

تست: یکی از جواب‌های معادله $0 = kx^2 - x - k + 1$ کدام است؟

(۴) $\frac{k+1}{k}$

(۳) $\frac{1-k}{k}$

(۲) $\frac{k-1}{k}$

(۱) -1

پاسخ:

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow \frac{1-k}{k} = \frac{-k+1}{k} = \frac{1-k}{k}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{-k+1}{k} = \frac{1-k}{k} \end{cases}$ $\Rightarrow k-1-k+1=0$ = مجموع ضرایب

نوشتن معادله درجه دوم با ریشه‌های α و β

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، آن‌گاه معادله مربوط به آن‌ها می‌تواند به شکل $0 = (x - \alpha)(x - \beta)$ یا هر ضریبی از آن نوشته شود. یعنی بی‌شمار معادله به فرم زیر داریم که α و β ریشه‌های آن‌هاست:

$0 = k(x - \alpha)(x - \beta)$; $(k \neq 0)$

پیشتر من نمی‌فهمم هر ضریبی از اون یعنی چی؟

دبیر: ببین مثلاً هم ریشه‌های معادله $0 = (x-1)(x-2)$ ، اعداد ۱ و ۲ اند و هم ریشه‌های معادله $0 = 3(x-1)(x-2)$ برابر ۱ و ۲ اند و هم ریشه‌های معادله $0 = 5(x-1)(x-2)$. یعنی با تغییر k معادلات برابری در میان ولی ریشه‌های همه اون‌ها ۱ و ۲ است. ضمناً آنگه فقط به معادله ازت فواسته شد می‌تونن k رو ننویسن.

مثال: با داشتن جواب‌های هر معادله، یک معادله برای آن‌ها بنویسید.

(پ) $x_1 = x_2 = 2$

(ب) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$

(آ) $x_1 = -1, x_2 = 2$

پاسخ:

(آ) $0 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x-(-1))$ $\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$ $\xrightarrow{\text{برانتزها را در هم ضرب می‌کنیم}}$

(ب) $0 = 2x^2 - x = x(x - \frac{1}{2}) = (x-0)(x - \frac{1}{2})$ $\Rightarrow x(x - \frac{1}{2}) = 0$ $\Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x = 0$ $\xrightarrow{\text{ضرب جملات در ۲ برای حذف مخرج}}$

(پ) $0 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ $\Rightarrow (x-2)(x-2) = 0$ $\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}$

تست: کدام گزینه می‌تواند معادله درجه دوم با ریشه‌های ۳ و $-\frac{1}{3}$ باشد؟

(۴) $0 = 3x^2 + 10x - 3$

(۳) $0 = 3x^2 - 8x - 3$

(۲) $0 = 3x^2 + 8x - 3$

(۱) $0 = 3x^2 - 10x - 3$

$0 = x^2 + \frac{1}{3}x - 3x - 3(\frac{1}{3}) = 0$ $\xrightarrow{\text{برانتزها را در هم ضرب می‌کنیم}}$ $\Rightarrow (x-3)(x - (-\frac{1}{3})) = 0$

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow 0 = 3x^2 - 8x - 3 = 0$ $\xrightarrow{\times 3}$ $\Rightarrow x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0$

استاد! چرا تمام جملات $0 = x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0$ رو در عدد ۳ ضرب کردین؟

دبیر: چون داریم این معادله، توی گزینه‌ها وجود نداره، پس اومدم معادله رو در ۳ ضرب کردم تا مخرج ۳ از بین بره.

نکته تستی: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده باشند، روش دیگر پیدا کردن معادله مربوط به این دو ریشه این است که S و P را پیدا

کرده (S یعنی جمع ریشه‌ها و P یعنی ضرب آن‌ها) و سپس در رابطه $0 = x^2 - Sx + P$ جایگذاری کنیم. مثلاً اگر ریشه‌های معادله درجه دومی $1 - \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}) = 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \underbrace{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 1^2 - \sqrt{3}^2 = 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

معادله مطلوب: $0 = x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + (-2) = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$



معادله درجه دوم

فصل ۱

قسمت اول: معادله درجه اول و روشهای حل آن

حل معادله درجه اول - صدق کردن جواب معادله در خود معادله

۱. مقدار x از تساوی $2x(x-1)+3 = (x+2)^2 + (x+1)^2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲. معادله $x(x^2 - 2) = x(x^2 + x + 1)(x - 1)$ دارای چند جواب است؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۳. اگر $x = 2$ جواب معادله $1 + \frac{x}{4} = mx + m - 1$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) -1 (۳) 1 (۴) $-\frac{1}{3}$

۴. اگر $a \neq 2b$ باشد، جواب معادله $a(x-1) - 2bx + 2b = 0$ کدام است؟ a و b را عدد فرض کنید.

- (۱) -1 (۲) a (۳) b (۴) 1

کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

۵. عرض یک مستطیل، نصف طول آن است. اگر محیط مستطیل ۱۵ واحد باشد، اختلاف طول و عرض آن چند واحد است؟

- (۱) 5 (۲) $5/5$ (۳) 2 (۴) $2/5$

۶. اضلاع یک مثلث به صورت $1-2x$ ، x و $x+4$ می‌باشند. اگر محیط این مثلث ۳۵ باشد، طول بزرگ‌ترین ضلع آن کدام است؟

- (۱) 12 (۲) 13 (۳) 15 (۴) 16

۷. طول اضلاع یک مثلث، سه عدد زوج متوالی می‌باشند. اگر محیط این مثلث ۲۴ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 12 (۳) 48 (۴) 24

۸. اندازه زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۷ و ۱۱ و ۱۸ می‌باشد. نوع مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه (۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین (۴) نامشخص

۹. اگر مساحت قسمت رنگی ۸ واحد مربع باشد، شعاع دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{2-\pi}$ (۲) $\frac{4}{\sqrt{4-\pi}}$ (۳) $\frac{2}{2-\pi}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{4-\pi}}$

۱۰. نقطه $A(2m-1, m+3)$ روی خط $y = -2x + 1$ قرار دارد. نقطه A در کدام ربع مختصاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۱. نگیب ۸ سال بزرگ‌تر از دو خواهر دو قلویی است. اگر مجموع سن هر سه دختر ۳۲ سال باشد، نگیب چند سال سن دارد؟

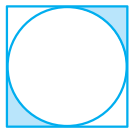
- (۱) 12 (۲) 18 (۳) 16 (۴) 20

۱۲. وقتی سیامک به دنیا آمد، پدرش ۳۰ ساله بود. اگر ۵ سال دیگر سن پدر سیامک سه برابر سن سیامک باشد، سیامک چند سال دارد؟

- (۱) 25 (۲) 5 (۳) 10 (۴) 15

۱۳. هنگام تولد ندا، پدرش ۲۶ ساله بوده است. اگر در سال ۱۳۷۵، مجموع سن آن‌ها ۴۲ سال بوده باشد، سال تولد ندا کدام است؟

- (۱) 1367 (۲) 1366 (۳) 1365 (۴) 1364



۱۴. ۵ سال دیگر مجموع سن رضا و مجید ۳۰ سال خواهد شد. اگر سال گذشته سن رضا دو برابر سن مجید بوده باشد، اختلاف سن آن‌ها کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۵
- ۱۵☆. نیکا تعدادی شکلات داشت که ثلث آن را به مادرش و نیمی از بقیه را به پدرش داد. اگر برای نیکا ۶ شکلات باقی مانده باشد، تعداد شکلات‌های اولیه نیکا چند تا بوده است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰
- ۱۶☆. نصف $\frac{3}{4}$ زمینی برای ساخت ساختمان مسکونی و $\frac{1}{3}$ باقی مانده برای حیاط و پارکینگ و بقیه به عنوان باغچه در نظر گرفته شده است. اگر مساحت باغچه ۴۰۰ متر مربع باشد، مساحت زمین چه قدر بوده است؟
 (۱) ۹۶۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۵۴۰
۱۷. سه شریک از یک پروژه ۹۰ میلیون تومان سود کسب می‌کنند. اگر سرمایه نفر اول سه برابر نفر دوم و سرمایه نفر دوم نصف نفر سوم بوده باشد، بیشترین سود مربوط به نفر چندم است و چقدر است؟
 (۱) اول - ۳۰ (۲) سوم - ۳۰ (۳) سوم - ۴۵ (۴) اول - ۴۵
- ۱۸☆. قیمت هر دفتر ۴ برابر قیمت هر مداد و قیمت هر مداد $\frac{5}{3}$ قیمت هر پاک‌کن است. اگر مجموع بهای ۴ دفتر، ۳ مداد و ۵ پاک‌کن ۵۵ هزار تومان باشد، قیمت هر مداد چند تومان است؟
 (۱) ۱۵۰۰ (۲) ۳۰۰۰ (۳) ۲۵۰۰ (۴) ۲۰۰۰
۱۹. قیمت کالایی پس از ۶۵ درصد تخفیف برابر ۷ هزار تومان است. قیمت این کالا پس از ۷۰ درصد تخفیف چقدر است؟
 (۱) ۵۰۰۰ (۲) ۶۵۰۰ (۳) ۵۵۰۰ (۴) ۶۰۰۰
۲۰. ۱۴ برابر عددی از ۸ برابر آن، ۴۵ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) ۸ (۴) $\frac{8}{5}$
۲۱. اگر از سه برابر عددی ۴ واحد کم شود، سپس به حاصل، نصف همان عدد اضافه گردد، عدد به دست آمده برابر با ۱۰ می‌گردد. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴) ۱۴
۲۲. ۵۵ درصد از ثلث عددی، ۷ واحد از $\frac{5}{11}$ آن عدد کم‌تر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵
- ۲۳☆. یک عدد، همان مقدار از ۵ کم‌تر است که از ۲ بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$
- ۲۴☆. مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۵۱ است. یکان عدد وسطی کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹
۲۵. مجموع چهار عدد فرد متوالی برابر ۵۶ می‌باشد. حاصل ضرب بزرگ‌ترین آن‌ها در کوچک‌ترین آن‌ها کدام است؟
 (۱) ۱۷۸ (۲) ۱۸۷ (۳) ۷۸۱ (۴) ۸۷۱

قسمت دوم: معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

حل معادله درجه دوم - صدق کردن جواب معادله در خود معادله

- ۲۶☆. به ازای کدام مقدار m ، یکی از جواب‌های معادله $x^2 - mx - m = 1$ برابر با ۴ است؟
 (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳
- ۲۷☆. اگر m جواب معادله $-3x^2 + x + 5 = 0$ باشد، حاصل $3m^2 - m + 1$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
۲۸. در معادله درجه دومی که مجموع ضرایب آن صفر است، کدام عدد همواره جواب معادله است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) صفر
- ۲۹☆. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^3 - (x+3)^3 = 7$ باشد، حاصل $x_1 - x_2$ با فرض $x_1 > x_2$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۳۰. جواب کوچک تر معادله $(x-1)(x+2) = (x-1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

۳۱. مجموع ریشه های حقیقی معادله $0 = 72 + (x^2 + x) - 18(x^2 + x)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۲. تفاضل جواب های معادله $25 = 9(x-1)^2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{6}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۳۳. در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $b = 0$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) اگر $ac < 0$ ، آن گاه معادله دارای دو جواب قرینه است. (۲) اگر $ac < 0$ ، آن گاه معادله یک جواب دارد.
(۳) اگر $ac > 0$ ، آن گاه معادله دارای دو جواب قرینه است. (۴) اگر $ac > 0$ ، آن گاه معادله یک جواب دارد.

۳۴. برای حل معادله درجه دوم $0 = x^2 - 3x - 8$ به روش مربع کامل کردن، در مرحله استفاده از خاصیت ریشه زوج، از کدام عدد جذر می گیریم؟

- (۱) $\frac{19}{2}$ (۲) $\frac{41}{4}$ (۳) $\frac{23}{6}$ (۴) ۱۷

۳۵. برای حل معادله درجه دوم $3 = 2x(x-2)$ به روش مربع کامل، کدام مقدار را باید به طرفین تساوی اضافه کنیم؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) صفر

(سراسری خارج از کشور - ۹۲)

۳۶. تعداد جواب های معادله $0 = x^4 + 10x^2 + 9$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۷. به ازای کدام مقدار a ، معادله $x(3x+4) = a$ دارای ریشه مضاعف است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

(سراسری خارج از کشور - ۸۶)

۳۸. اگر در معادله درجه دوم $0 = ax^2 - 12x + 9$ ، تفاضل دو جواب برابر صفر باشد، یک جواب این معادله کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۳۹. ریشه مضاعف معادله $0 = mx^2 + mx + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) $-\frac{1}{2}$

(سراسری - ۹۱)

۴۰. معادله درجه دوم $a = x(2x-5)$ ، به ازای یک مقدار a دارای جواب مضاعف است. مقدار این جواب کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۴۱. تفاضل ریشه های معادله $0 = ax^2 + 6x + 1$ برابر صفر است. ریشه بزرگ تر معادله $0 = x^2 - ax + 20$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -۵

۴۲. به ازای چه مقدار n ، معادله درجه دوم $0 = m^2x^2 - 6mx + 2m + n$ دارای ریشه مضاعف $\frac{3}{4}$ است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

(سراسری خارج از کشور - ۹۱)

۴۳. به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $0 = 3x^2 + ax - 3$ دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) هر مقدار a (۲) هیچ مقدار a (۳) $a = \pm 6$ (۴) $a > 6$

۴۴. تعداد جواب های کدام معادله، از بقیه کم تر است؟

- (۱) $\frac{x^2}{5} = x$ (۲) $2x^2 - 32 = 0$ (۳) $(3x-4)^2 - 16 = 0$ (۴) $2x^2 + 200 = 0$

۴۵. بزرگ ترین جواب معادله $0 = x(2x+5) + 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۴۶. معادله $0 = x^2 - x - 1$ دارای چند جواب گویا است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداقل یکی

۴۷ ☆ در معادله درجه دوم $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$ ، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟ (سراسری - ۸۷)

- (۱) $4 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۴۸. اگر یکی از ریشه‌های معادله $a^2x^2 - 4ax + 4 = 0$ برابر ۱ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) وجود ندارد. (۳) -۱ (۴) ۲

۴۹ ☆ یکی از جواب‌های معادله $ax^2 + (-2a+b)x + a-b = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{a-b}{a}$ (۲) $\frac{a+b}{a}$ (۳) $-\frac{b}{a}$ (۴) $\frac{b}{a}$

۵۰ ☆ یکی از ریشه‌های معادله $(2-3x)^2 + 1 = 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{9}$ (۲) -۱ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) ۲

۵۱. اگر در معادله $ax^2 - bx + c = 0$ ، رابطه $b = a + c$ برقرار باشد. کدام گزینه همواره ریشه‌ای برای معادله است؟ (آزمون‌های گاج)

- (۱) صفر (۲) $-\frac{c}{a}$ (۳) -۱ (۴) ۱

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

۵۲ ☆ مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $(2x-1)^2 = (2-x)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) ۱

۵۳ ☆ مجموع ریشه‌های معادله $(m-1)x^2 + (m+1)x + m + 2 = 0$ برابر صفر است. مقدار m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) صفر و -۱

۵۴ ☆ در معادله درجه دوم $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر ۱۰ است. ریشه بزرگ‌تر کدام است؟ (سراسری - ۸۴)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۵. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 4 = 0$ ، به ازای یک مقدار a ، مجموع دو ریشه حقیقی برابر $-\frac{9}{4}$ است، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (سراسری خارج از کشور - ۹۰)

۵۶. در معادله درجه دوم $4x^2 + kx = 21$ ، اگر مجموع دو ریشه برابر (-۲) باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۷)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۵۷. در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه مثبت آن کدام است؟ (سراسری - ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۵۸ ☆ در معادله درجه دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۴)

- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۹ ☆ به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یک‌دیگرند؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۰ ☆ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های $2x^2 + (m-1)x + 2m = 0$ با هم برابرند. مقدار m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) -۱

۶۱ ☆ یکی از جواب‌های معادله $(2m+1)x^2 + 7x + 2m = 0$ برابر -۲ است. جواب دیگر کدام است؟

- (۱) $-\frac{17}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{17}{2}$

۶۲ ☆ یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - kx + 5 = 0$ برابر ۵ است. k و جواب دیگر معادله به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

- (۱) ۹ و $\frac{1}{2}$ (۲) ۱۱ و $\frac{1}{2}$ (۳) ۹ و ۲ (۴) ۱۱ و ۲

۶۳. اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟ (سراسری - ۸۳)

- (۱) $-0/4$ (۲) $-0/3$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

۶۴. اگر یکی از جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + x - 2 = 0$ برابر (-1) می‌باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۶۵☆. در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها، از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۶۶☆. اگر یک ریشه معادله $2x^2 + 9x + a = 0$ دو برابر ریشه دیگر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) -3

۶۷☆. در معادله درجه دوم $4x^2 - 4x + a = 0$ ، به ازای کدام مقدار a ، یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیش‌تر از جواب دیگر است؟ (سراسری - ۸۶)

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) ۱ (۴) ۳

۶۸. به ازای یک مقدار m ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۵)

- (۱) $-1/5$ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۳

نوشتن معادله با داشتن ریشه‌ها

۶۹. در کدام معادله مجموعه جواب‌ها به صورت $\{3, -\frac{1}{3}\}$ است؟

- (۱) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (۲) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ (۳) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ (۴) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(سراسری - ۹۱)

۷۰☆. جواب‌های کدام معادله به صورت $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ است؟

- (۱) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (۲) $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ (۳) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 2x + 1 = 0$

قسمت سوم: کاربردهای معادله درجه دوم

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل توصیفی

۷۱☆. حاصل ضرب اعداد طبیعی قبل و بعد عددی طبیعی برابر ۱۲۰ است. مجموع ارقام این عدد کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۹

۷۲. چند عدد صحیح وجود دارد که با قرینه مربع‌اش برابر باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۷۳☆. مربع تفاضل نصف عددی از ۳، برابر ۹ است. آن عدد کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۷۴☆. مربع عددی طبیعی از دو برابر آن عدد ۱۵ واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۷۵. تفاضل ۳ برابر کدام عدد حقیقی از مربع‌اش، برابر ۴ است؟

- (۱) -4 (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۶☆. چهار برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۷۷. کدام عدد طبیعی از سه برابر معکوسش، دو واحد بزرگ‌تر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۷۸☆. ربع عدد دیگر است. اگر حاصل ضرب این دو عدد متمایز دو برابر مجموع آن‌ها باشد، تفاضل آن‌ها چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) $7/5$ (۳) ۶ (۴) $6/5$

۷۹☆. حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچک‌تر ۱۲ واحد بیش‌تر است. مجموع آن دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۱ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵



معادله درجه دوم

پاسخ فصل ۱

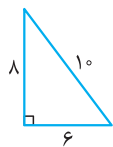
۸۹

۱ ۲ ۳ ۴

اضلاع مثلث: $x, x+2, x+4$

$$\text{محیط} = x + x + 2 + x + 4 = 24 \Rightarrow 3x + 6 = 24$$

$$\Rightarrow 3x = 24 - 6 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$$

مثلث قائم الزاویه است. $10^2 = 6^2 + 8^2$ اضلاع مثلث: $6, 8, 10$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

من نفهمیدم چرا گفتین مثلث، قائم الزاویه است؟



دیده؛ کلاً آکه x, y و r سه ضلع به مثلث دلفواه باشن و r بزرگترین ضلع باشه اون وقت آکه رابطه فیثاغورث یعنی $r^2 = x^2 + y^2$ برقرار باشه می فهمیم که مثلث، قائم الزاویه است ضمناً آکه این مثلث، قائم الزاویه باشه مساحتش برابر با $\frac{x \times y}{2}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴

زوایای مثلث را $7x, 11x$ و $18x$ در نظر می گیریم. از آن جا که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است، داریم:

$$7x + 11x + 18x = 180^\circ \Rightarrow 36x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{36} = 5^\circ$$

مثلث قائم الزاویه است. $\underbrace{7(5)}_{35^\circ} + \underbrace{11(5)}_{55^\circ} + \underbrace{18(5)}_{90^\circ}$ اندازه زوایا

اما چون زاویه های برابری وجود ندارد، لذا متساوی الساقین نیست.

۱ ۲ ۳ ۴

اگر شعاع دایره را r در نظر بگیریم، ضلع مربع برابر با قطر دایره یعنی $2r$ است و داریم:

نصف مساحت بین مربع و دایره = مساحت رنگی

$$\Rightarrow \frac{1}{4}((2r)^2 - \pi r^2) = 8$$

مساحت دایره - مساحت مربع

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(4r^2 - \pi r^2) = 8 \xrightarrow{\times 4} (4r^2 - \pi r^2) = 16$$

$$\Rightarrow (4 - \pi)r^2 = 16 \Rightarrow r^2 = \frac{16}{4 - \pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{16}{4 - \pi}} = \frac{4}{\sqrt{4 - \pi}}$$

۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا معادله را تا حد امکان ساده می کنیم:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = 2x(x-1) + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 2x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + 5 = 2x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 2x^2 + 2x = 3 - 5 \Rightarrow 8x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴

اتحاد چاق و لاغر

$$(x-1)(x^2+x+1) = x(x^2-2) \Rightarrow x^3-1 = x^3-2x$$

$$\Rightarrow x^3 - x^3 + 2x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴

جواب معادله در معادله صدق می کند:

$$mx + m - 1 = 1 + \frac{x}{2} \xrightarrow{x=2} 2m + m - 1 = 1 + \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow 3m - 1 = 2 \Rightarrow 3m = 2 + 1 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{3} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴

$$a(x-1) - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow ax - a - 2bx + 2b = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{ax - 2bx}_{\text{فاکتور از } x} = a - 2b \Rightarrow (a - 2b)x = a - 2b$$

$$\xrightarrow{a-2b \neq 0} x = \frac{a-2b}{a-2b} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴

طول مستطیل را x در نظر می گیریم، بنابراین عرض مستطیل برابر با $\frac{x}{2}$ است و داریم:

$$\text{محیط} = 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2}x = 3x$$

$$\xrightarrow{\text{محیط} = 15} 3x = 15 \Rightarrow \text{طول} : x = \frac{15}{3} = 5$$

$$\Rightarrow \text{عرض} = \frac{x}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\text{طول} - \text{عرض} = 5 - 2.5 = 2.5$$

۱ ۲ ۳ ۴

$$\text{محیط} = (x+4) + x + (2x-1) = 35 \Rightarrow 4x + 3 = 35$$

$$\Rightarrow 4x = 35 - 3 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$$

$15 =$ بزرگترین ضلع $\Rightarrow \underbrace{2(8)}_{15} - 1, 8, \underbrace{8}_{12} + 4$ اضلاع مثلث



معادله درجه دوم



قسمت اول: معادله درجه اول و روش‌های حل آن

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{2x-3}{3} + \frac{2x+1}{4} = \frac{1}{6} \quad (\text{پ}) \qquad \frac{3}{5}(3x-2) = x+1 \quad (\text{ب}) \qquad \frac{2x+1}{x-1} = 0.1 \quad (\text{آ})$$

۲. اگر $x=1$ جواب معادله $x+a=3-ax$ باشد،

(آ) مقدار a را بیابید.

(ب) معادله $ax+3a=1-\frac{x}{4}$ را حل کنید.

۳. نصف دانش‌آموزان سال دهم یک دبیرستان انسانی و $\frac{5}{8}$ باقی‌مانده تجربی‌اند. اگر ۱۵ دانش‌آموز رشته ریاضی باشند آن‌گاه:

(آ) تعداد کل دانش‌آموزان را بیابید.

(ب) چند نفر انسانی‌اند؟

(پ) چند نفر تجربی‌اند؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۴. یک واحد بیش‌تر از ثلث عددی، با نصف آن عدد برابر است. آن عدد را بیابید.

۵. نصف ثلث عددی را از آن عدد کم می‌کنیم، سپس ۲ واحد به آن اضافه می‌کنیم. حاصل برابر با ۷۷ می‌گردد، آن عدد کدام است؟

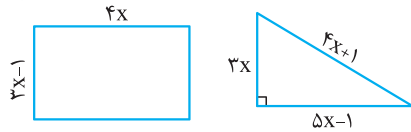
(برگرفته از کتاب درسی)

۶. اگر محیط مثلث و مستطیل مقابل با هم برابر باشند آن‌گاه:

(آ) مقدار x را بیابید.

(ب) مساحت مثلث و مستطیل را به‌دست آورید.

(برگرفته از کتاب درسی)



۷. علی از محمد پرسید که تعداد بچه‌های کلاس شما چند تاست؟ محمد جواب داد:

«ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی جملگی ۱۲۲ شویم. دانش‌آموزان کلاس محمد چند نفر هستند؟»

۸. سن شخصی $\frac{2}{3}$ تعداد سال‌هایی است که تا ۱۲۰ سالگی او مانده است. سن شخص را بیابید.

۹. در یک امتحان اگر هر سؤال در ۹ دقیقه حل شود، ۱۰ دقیقه زمان، اضافه می‌آید و اگر هر سؤال در ۱۱ دقیقه حل شود، ۱۰ دقیقه وقت کم می‌آید. تعداد سؤالات و زمان امتحان را بیابید.

۱۰. در یک صندوق مقداری پول موجود است. روز اول مقداری از آن را برمی‌داریم. روز دوم، نصف روز اول، روز سوم نصف روز دوم و روز چهارم نصف روز سوم برمی‌داریم و پول صندوق تمام می‌شود.

(برگرفته از کتاب درسی)

(آ) اگر پول اولیه صندوق ۱۵۰ هزار تومان باشد، روز اول چقدر برداشته‌ایم؟

(ب) اگر روز اول ۷۰۰۰ تومان بیش‌تر از روز چهارم برداشته باشیم، پول اولیه صندوق چقدر بوده است؟

۱۱. قیمت هر دفتر سه برابر قیمت هر مداد و $\frac{4}{3}$ قیمت هر خودکار است. علی برای خرید ۳ دفتر، ۴ مداد و ۵ خودکار ۹۷ هزار تومان پرداخت می‌کند.

(برگرفته از کتاب درسی)

قیمت هر دفتر، هر مداد و هر خودکار چند تومان است؟

۱۲. سارا از اول ماه شروع به دویدن کرده به‌طوری که هر روز دو برابر روز قبل دویده است. اگر سارا در روز هشتم، ۱۹۲ دقیقه دویده باشد آن‌گاه:

(برگرفته از کتاب درسی)

(آ) روز اول چند دقیقه دویده است؟

(ب) در این ۸ روز مجموعاً چند دقیقه دویده است؟

۱۳. برای بافت یک قالی به ابعاد $2/1 \times 2/8$ متر (۶ متری) به تعداد 5850000 گره استفاده شده است. (استفاده از ماشین حساب مجاز است).
 (ا) اگر یک قالی باف برای بافت این قالی 900 روز زمان بگذارد، او به طور متوسط هر روز چند گره زده است؟
 (ب) اگر برای بافت این قالی در مجموع 87750 متر نخ به کار رفته باشد، برای هر گره چند سانتی متر نخ به کار رفته است؟
۱۴. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس ۴ برابر یک کارگر و $\frac{2}{5}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۵ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ کارگر دارد. اگر برای این قسمت، ماهانه 100 میلیون تومان پرداخت شود، حقوق یک کارگر در ماه چقدر است؟
 (برگرفته از کتاب درسی)

قسمت دوم: معادله درجه دوم و روشهای حل آن

۱۵. اگر یکی از جوابهای معادله $ax^2 - 2x = 2a + 4$ برابر با -1 باشد،
 (ا) مقدار a را بیابید.
 (ب) جواب دیگر معادله را به دست آورید.
۱۶. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.
 (ا) $\frac{x^2}{5} = x$
 (ب) $(x + 5)(x - 7) = x - 7$
 (پ) $25x^2 - 20x + 4 = 0$
 (ت) $x^2 - 18x - 19 = 0$
 (ث) $3a^2 - a - 3 = a(3 - a)$
 (ج) $(2x + 1)^2 + 5(2x + 1) + 6 = 0$
 (چ) $4x^2 - 8x + 3 = 0$
 (خ) $(x + 1)^2 = 4$
 (ح) $25x^2 - 30x + 9 = 0$
 (د) $x^4 - 4x^2 = 0$
 (ز) $4x^2 - (2 - x)^2 = 0$
۱۷. معادله درجه دومی بنویسید که دارای ریشههای $\frac{1}{4}$ و $\frac{-3}{4}$ باشد. چند معادله با این شرایط می‌توانید بنویسید؟
 (ب) معادله درجه دومی بنویسید که دارای ریشه مضاعف -2 باشد. آیا جواب منحصر به فرد است؟
۱۸. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشد. آیا منحصر به فرد است؟
۱۹. معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.
 (ا) $(x - 1)^2 = 9$
 (ب) $4x^2 - 1 = 0$
 (ت) $(1 - x)^2 = (5 + 2x)^2$
 (ث) $(3x + 1)^2 - 25 = 0$
۲۰. در معادله $(x + 1)^2 = k$
 (ا) دو مقدار برای k مثال بزنید که به ازای آن، معادله دو ریشه داشته باشد.
 (ب) دو مقدار برای k مثال بزنید که معادله فاقد ریشه باشد.
 (پ) آیا مقداری برای k وجود دارد که به ازای آن معادله دارای ریشه مضاعف باشد؟
۲۱. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.
 (ا) $x^2 - 6x + 1 = 0$
 (ب) $x^2 + x = \frac{1}{4}$
 (ت) $4x^2 + 4x + 3 = 0$
 (ث) $x(x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$
۲۲. معادلات زیر را به روش کلی (Δ) حل کنید.
 (ا) $5x^2 - 2x - 3 = 0$
 (ب) $3x^2 + \sqrt{3}x + \frac{1}{4} = 0$
 (ت) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3} = x$
 (ث) $(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 5 = 0$
۲۳. معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید.
 (ا) $x(6x + 5) = 1$
 (ب) $x(x - 2) - 2(x + 1) = 0$
 (ت) $(x + 1)^2 = 4(2x - 1)^2$
 (پ) $2(x + 1)(2x - 1) = (x - 2)(2x + 1)$
 (ث) $\frac{x^2}{2} = \frac{x}{3}$
 (ج) $(1 + x)^2 = 6 - (1 + x)^2$
۲۴. معادله درجه دومی مثال بزنید که ریشه نداشته باشد. سپس معادله درجه دومی مثال بزنید که یک ریشه داشته باشد.
 (برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۵. تعداد ریشه‌های هر معادله را به ازای مقدار دلخواه k به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & x^2 - kx - 1 = 0 \\ \text{ب)} \quad & x^2 + x - k^2 = 0 \\ \text{پ)} \quad & kx^2 + x - k = 0 \end{aligned}$$

۲۶. در معادله درجه دوم $mx^2 + (1 - 2m)x + m = 0$ ،آ) m را طوری بیابید که معادله فاقد جواب باشد.ب) m را طوری بیابید که معادله دارای ریشه مضاعف باشد. آن ریشه را بیابید.پ) m را طوری بیابید که معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز باشد.

۲۷. بدون حل معادلات زیر، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0 \\ \text{ب)} \quad & 3x(x-1) = 2 + 3x \end{aligned}$$

۲۸. اگر یکی از جواب‌های معادله $4x^2 + 4x + m = 0$ برابر -2 باشد، مقدار m و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۹. در معادله درجه دوم $4x^2 - (k-1)x + 3k = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها قرینه یکدیگرند. مقدار k را بیابید.۳۰. اگر مجموع ریشه‌های معادله $(m+2)x^2 + 5mx - 1 = 0$ برابر $2/5$ باشد، مقدار m و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.۳۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بدون حل معادله بیابید.

$$\begin{aligned} \text{آ)} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{ب)} \quad & x_1 x_2 \\ \text{پ)} \quad & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{ت)} \quad & x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 \\ & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \end{aligned}$$

۳۲. اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله $mx^2 + (-3m-1)x + 6 = 0$ برابر با ۳ باشد،

آ) مجموع ریشه‌ها را بیابید.

ب) ریشه‌های معادله را به دست آورید.

۳۳. در معادله $-3x^2 + 2x + m - 1 = 0$ مقدار m را طوری بیابید که:

آ) معادله دو ریشه متمایز داشته باشد. مجموع این ریشه‌ها چقدر است؟

ب) معادله دارای ریشه مضاعف باشد. آن ریشه را بیابید.

پ) معادله فاقد ریشه باشد.

ت) معادله دارای ریشه صفر باشد.

ث) معادله دارای دو ریشه معکوس و قرینه باشد.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۴. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ (ویژه علاقمندان)آ) اگر $a + b + c = 0$ باشد، یکی از ریشه‌ها برابر ۱ است. ریشه دیگر را بیابید.ب) اگر $b = a + c$ باشد، یکی از ریشه‌ها برابر -1 است. ریشه دیگر را به دست آورید.

قسمت سوم: کاربردهای معادله درجه دوم

۳۵. یک واحد کم‌تر از مربع ثلث عددی صحیح برابر با نصف آن عدد است. آن عدد را بیابید.

۳۶. اگر تفاضل عددی از معکوس آن برابر با $\frac{5}{6}$ باشد، آن عدد را به دست آورید.۳۷. مجموع معکوس دو عدد طبیعی فرد متوالی برابر با $\frac{1}{15}$ است. به کمک حل معادله درجه دوم این دو عدد را بیابید.۳۸. مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی برابر 130 است. آن دو عدد را بیابید.

۳۹. وقتی آراد متولد شد پدر او ۳۴ سال داشت. اگر حاصل ضرب سن فعلی آن‌ها ۲۴۰ باشد، سن آراد و پدرش را بیابید.

۴۰. مساحت و محیط یک مستطیل به ترتیب ۱۴ و ۱۸ می‌باشد. طول اضلاع آن را بیابید.

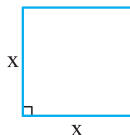
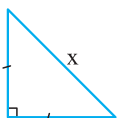
۴۱. مستطیلی به ابعاد $x+1$ و $x+3$ دارای قطری به طول $2x$ است. مقدار x و مساحت مستطیل را به دست آورید.

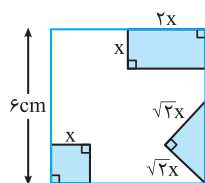
(برگرفته از کتاب درسی)

۴۲. اگر مساحت مثلث از مساحت مربع ۱ واحد کم‌تر باشد:

آ) مقدار x را بیابید.

ب) مساحت هر دو شکل را به دست آورید.

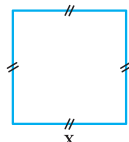




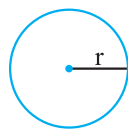
۴۳. از مربعی به ضلع 6cm ، سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده‌شده (x) چقدر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۴. اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



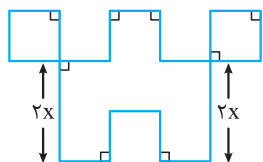
(۱)



(۲)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

۴۵. در شکل روبه‌رو، طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده، برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید. (برگرفته از کتاب درسی)



۴۶. هزینه اولیه یک کارگاه ۴۴ میلیون و هزینه تولید هر واحد کالا ۶۰۰ هزار تومان است. اگر قیمت تعیین شده برای هر واحد کالا در این کارگاه نسبت به تعداد کالای فروخته‌شده به صورت $x(100 - 0.5x)$ میلیون تومان باشد، (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.) (برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

ا) رابطه‌های هزینه و سود این کارگاه را بنویسید.

ب) به ازای تولید چه مقدار کالا کارگاه نه سود می‌کند و نه زیان؟

۴۷. هزینه یک کارگاه به کمک رابطه $C(x) = 640 + 12x$ میلیون تومان به ازای تولید x واحد کالا به دست می‌آید. اگر معادله تقاضای این کالا با قیمت p به صورت $p = 100 - x$ باشد، آن‌گاه: (برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

ا) رابطه درآمد و سود را (برحسب x) بنویسید.

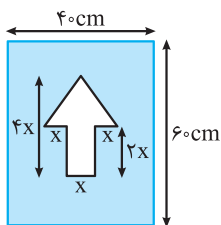
ب) اگر کارگاه هیچ کالایی نفروشد، چقدر ضرر می‌کند؟

پ) نقاط سربه‌سر برای تولید این کارگاه را بیابید.

ت) به ازای تولید چه تعداد کالا، سود کارگاه، ماکسیمم خواهد شد؟

ث) بیش‌ترین مقدار سود این کارگاه را تعیین کنید.

۴۸. برای ساخت تابلوی مقابل، از برجسب‌های سفید و قرمز استفاده شده است. هزینه 1cm^2 برجسب سفید ۳۰ تومان و هزینه 1cm^2 برجسب قرمز ۱۰ تومان است. مجموع هزینه برجسب‌های سفید و قرمز ۲۷۰۰۰ تومان شده است. مقدار x را به دست آورید. (برگرفته از کتاب درسی)



(برگرفته از کتاب درسی)

۴۹. معادلات گویای زیر را حل کنید.

پ) $\frac{5}{x-1} - \frac{x}{x-1} = x+1$

ب) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

ا) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$

ج) $\frac{2x+2}{x^2+x} + \frac{3x-2}{x} = 1$

ث) $\frac{x+3}{3x-2} = 1 - \frac{1}{x+4}$

ت) $\frac{2x^2+4}{2x+1} = x$

خ) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{6}{x^2-9}$

ح) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x-3}$

چ) $\frac{3x+1}{x+1} + \frac{2x+7}{x+4} = 5$

ر) $\frac{2x}{x+1} - \frac{6}{x^2-x-2} = \frac{x+1}{x-2}$

ذ) $\frac{7}{x-4} - \frac{5}{x-2} = \frac{1}{2}$

د) $\frac{x}{5} + \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{2x+2}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۰. به ازای چه مقدار a معادله $\frac{2x}{a-x} + \frac{a-x}{2x} = \frac{2a}{x}$ دارای جواب $x=1$ است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۱. اگر $x=4$ جواب معادله $\frac{x-2}{5x} = \frac{1}{k} - \frac{4}{15x}$ باشد، مقدار k و جواب دیگر معادله را در صورت وجود بیابید.

۵۲. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x-1}{2x-1} = \frac{3}{x+3}$ را بیابید.

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۳. مجموع معکوس عددی با آن عدد برابر a است. برای مقادیر مختلف a ، آن عدد را بیابید.

ا) $a = 1$ ب) $a = 2$ پ) $a = -2\sqrt{2}$

۵۴. دو حسابدار با هم کار حسابرسی یک اداره را در ۶ ساعت کاری انجام می‌دهند. اگر این حسابدارها به تنهایی کار حسابرسی را انجام دهند، یکی از آن‌ها ۵ ساعت زودتر از حسابدار دیگر کار حسابرسی را تمام می‌کند. هر یک از حسابدارها به تنهایی چند ساعت کار حسابرسی انجام می‌دهند؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۵. مادری تعدادی شکلات بین خودش و اعضای خانواده‌اش به‌طور مساوی تقسیم می‌کند. اما برای این که به هر نفر تعداد بیشتری شکلات برسد، سهم خودش را می‌بخشد و این بار همه شکلات‌ها را بین همه اعضای خانواده‌اش به‌طور مساوی تقسیم می‌کند تا سهم هر نفر $\frac{1}{6}$ بیش‌تر شود. تعداد اعضای خانواده چند تاست؟

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۶. در ساخت یک آلیاژ، از دو فلز آلومینیم و آهن به نسبت ۵ به ۱ استفاده شده است (یعنی نسبت وزن آلومینیم به آهن برابر ۵ است). اگر این آلیاژ را ذوب کنیم و ۵۰۰ گرم آلومینیم به آن اضافه کنیم، $\frac{1}{4}$ وزن آلیاژ را آهن تشکیل می‌دهد. وزن آلیاژ قبل از ذوب شدن چقدر است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ فصل ۱ معادله درجه دوم

$\Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{5}{8} \left(\frac{x}{2} \right) + 15 \Rightarrow x - \frac{x}{2} - \frac{5}{16}x = 15$

ضرب تمام جملات در ۱۶
برای از بین بردن مخرج‌ها $\Rightarrow 16x - 8x - 5x = 240$

$\Rightarrow 3x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{3} = 80$

انسانی $= \frac{x}{2} = \frac{80}{2} = 40$ (ب)

تجربی $= \frac{5}{8} \times \frac{x}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{80}{2} = 25$ (پ)

۴

۱ واحد بیش‌تر از ثلث عدد

$\frac{1}{3}x + 1 = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = -1$

ضرب تمام جملات در ۶ $\Rightarrow 2x - 3x = -6 \Rightarrow -x = -6 \Rightarrow x = 6$

۵

نصف ثلث عدد $\Rightarrow x - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} \right) + 2 = 77 \Rightarrow x - \frac{1}{6}x + 2 = 77$

$\Rightarrow x - \frac{1}{6}x = 77 - 2 \Rightarrow x - \frac{1}{6}x = 75$

$\times 6 \Rightarrow 6x - x = 450 \Rightarrow 5x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{5} = 90$

۶

محیط مستطیل $= 2(\frac{7x-1}{2} + 3x - 1) = 2(7x - 1) = 14x - 2$

محیط مثلث $= 3x + 5x - 1 + 4x + 1 = 12x$

۱ (آ) $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{10} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 10(2x+1) = x-1$

$\Rightarrow 20x + 10 = x - 1 \Rightarrow 20x - x = -1 - 10$

$\Rightarrow 19x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{19}$

ب) $\frac{3}{5}(3x-2) = x+1 \xrightarrow{\times 5} 3(3x-2) = 5(x+1)$

$\Rightarrow 9x - 6 = 5x + 5 \Rightarrow 9x - 5x = 5 + 6 \Rightarrow 4x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$

پ) $\frac{2x-3}{3} + \frac{2x+1}{4} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 12} 4(2x-3) + 3(2x+1) = 2$

$\Rightarrow 8x - 12 + 6x + 3 = 2 \Rightarrow 14x - 9 = 2 \Rightarrow 14x = 2 + 9$

$\Rightarrow 14x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{14}$

۲

(آ) جواب معادله در معادله صدق می‌کند:

$x + a = 3 - ax \xrightarrow{x=1} 1 + a = 3 - a \Rightarrow a + a = 3 - 1$

$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1$

ب) $ax + 3a = 1 - \frac{x}{2} \xrightarrow{a=1} x + 3 = 1 - \frac{x}{2}$

$\Rightarrow x + \frac{x}{2} = 1 - 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$

۳

(آ) تعداد کل دانش‌آموزان دهم را x در نظر می‌گیریم، داریم:

$15 = \text{ریاضی} + \frac{5}{8} \left(x - \frac{x}{2} \right) + \text{تجربی} + \frac{x}{2}$