آزمون‌های موضوعی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

موج آزمون ریاضی

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشر الگو

پیشگفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به‌ویژه در سال‌های پایانی دورهٔ متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. به همین دلیل، هر چند بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از مواجهه با پرسش‌های چهارگزینه‌ای نیست!

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژهٔ آمادگی برای کنکور است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های ریاضی ۱ سال دهم، حسابان ۱ سال یازدهم و حسابان ۲ سال دوازدهم است. در این کتاب، همهٔ موضوعات این درس‌ها را در بخش اول تنظیم کرده‌ایم. در هر آزمون، ۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای مربوط به همان موضوع را آورده‌ایم. در بخش دوم، چند آزمون جامع مربوط به هریک از مباحث آورده‌ایم. بخش سوم را به آزمون‌های جامع تألیفی اختصاص داده‌ایم. در این بخش، آزمون‌هایی شبیه کنکورهای سال‌های اخیر آورده‌ایم، که در نتیجه سطح دشواری آن‌ها مختلف و متنوع است. کنکورهای سال‌های اخیر را نیز در بخش چهارم قرار داده‌ایم.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی و فهیمه گودرزی، دکترین آریس آقانیانس و ابوالفضل علی‌بمانی، برای ویراستاری علمی کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی کتاب، خانم الهام اسماعیل‌زاده برای رسم شکل‌ها و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

بخش اول: آزمون‌های موضوعی

بازه و مجموعه

آزمون ۱: بازه ۲
آزمون ۲: مجموعه ۳

الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی

آزمون ۳: الگو و دنباله ۴
آزمون ۴: دنبالهٔ حسابی (۱) ۵
آزمون ۵: دنبالهٔ حسابی (۲) ۶
آزمون ۶: دنبالهٔ هندسی (۱) ۷
آزمون ۷: دنبالهٔ هندسی (۲) ۸
آزمون ۸: مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۹
آزمون ۹: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی ۱۰

توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

آزمون ۱۰: توان و ریشه ۱۱
آزمون ۱۱: اتحاد (۱) ۱۲
آزمون ۱۲: اتحاد (۲) ۱۳
آزمون ۱۳: تجزیه (۱) ۱۴
آزمون ۱۴: تجزیه (۲) ۱۵
آزمون ۱۵: گویا کردن مخرج‌های گنگ ۱۶
آزمون ۱۶: بخش‌پذیری و تقسیم ۱۷

معادله، تعیین علامت و نامعادله

آزمون ۱۷: حل معادلهٔ درجهٔ دوم ۱۸
آزمون ۱۸: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱) ۱۹
آزمون ۱۹: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۲) ۲۰
آزمون ۲۰: روابط بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ۲۱
آزمون ۲۱: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص ۲۲
آزمون ۲۲: معادله‌های گویا (۱) ۲۳
آزمون ۲۳: معادله‌های گویا (۲) ۲۴
آزمون ۲۴: تعیین علامت و نامعادله (۱) ۲۵
آزمون ۲۵: تعیین علامت و نامعادله (۲) ۲۶
آزمون ۲۶: معادله‌های گنگ (۱) ۲۷
آزمون ۲۷: معادله‌های گنگ (۲) ۲۸
آزمون ۲۸: حل هندسی معادله ۲۹

قدرمطلق و جزء صحیح

آزمون ۲۹: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۳۰
آزمون ۳۰: معادلات قدرمطلقی ۳۱
آزمون ۳۱: نامعادلات قدرمطلقی ۳۲
آزمون ۳۲: توابع شامل قدرمطلق ۳۳
آزمون ۳۳: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۱) ۳۴
آزمون ۳۴: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۲) ۳۵
آزمون ۳۵: توابع شامل جزء صحیح ۳۶

توابع نمایی و لگاریتمی

آزمون ۳۶: تابع نمایی (۱) ۳۷
آزمون ۳۷: تابع نمایی (۲) ۳۸
آزمون ۳۸: معادلات نمایی ۳۹
آزمون ۳۹: نامعادلات نمایی ۴۰
آزمون ۴۰: لگاریتم (۱) ۴۱
آزمون ۴۱: لگاریتم (۲) ۴۲
آزمون ۴۲: تابع لگاریتمی (۱) ۴۳
آزمون ۴۳: تابع لگاریتمی (۲) ۴۴
آزمون ۴۴: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۱) ۴۵
آزمون ۴۵: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۲) ۴۶

هندسهٔ تحلیلی

آزمون ۴۶: خط راست (۱) ۴۷

آزمون ۴۷: خط راست (۲) ۴۸

تابع

آزمون ۴۸: مفاهیم اولیهٔ تابع ۴۹

آزمون ۴۹: توابع معروف ۵۰

آزمون ۵۰: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۱) ۵۱

آزمون ۵۱: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۲) ۵۲

آزمون ۵۲: دامنه و برد تابع و تساوی توابع ۵۳

آزمون ۵۳: مدل‌سازی با توابع ۵۴

آزمون ۵۴: جبر توابع (۱) ۵۵

آزمون ۵۵: جبر توابع (۲) ۵۶

آزمون ۵۶: ترکیب توابع (۱) ۵۷

آزمون ۵۷: ترکیب توابع (۲) ۵۸

آزمون ۵۸: ترکیب توابع (۳) ۵۹

آزمون ۵۹: تبدیل نمودار توابع (۱) ۶۰

آزمون ۶۰: تبدیل نمودار توابع (۲) ۶۲

آزمون ۶۱: توابع یک‌به‌یک ۶۴

آزمون ۶۲: توابع یکنوا (۱) ۶۵

آزمون ۶۳: توابع یکنوا (۲) ۶۶

آزمون ۶۴: تابع وارون (۱) ۶۷

آزمون ۶۵: تابع وارون (۲) ۶۸

آزمون ۶۶: تابع وارون (۳) ۶۹

مثلثات

آزمون ۶۷: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۷۰

آزمون ۶۸: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی ۷۱

آزمون ۶۹: اتحادهای مثلثاتی (۱) ۷۲

آزمون ۷۰: اتحادهای مثلثاتی (۲) ۷۳

آزمون ۷۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۷۴

آزمون ۷۲: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱) ۷۵

آزمون ۷۳: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲) ۷۶

آزمون ۷۴: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۱) ۷۷

آزمون ۷۵: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۲) ۷۸

آزمون ۷۶: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۱) ۷۹

آزمون ۷۷: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۲) ۸۰

آزمون ۷۸: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۳) ۸۱

آزمون ۷۹: تانژانت مجموع دو زاویه (۱) ۸۲

آزمون ۸۰: تانژانت مجموع دو زاویه (۲) ۸۳

آزمون ۸۱: توابع مثلثاتی (۱) ۸۴

آزمون ۸۲: توابع مثلثاتی (۲) ۸۵

آزمون ۸۳: معادلات مثلثاتی (۱) ۸۶

آزمون ۸۴: معادلات مثلثاتی (۲) ۸۷

آزمون ۸۵: معادلات مثلثاتی (۳) ۸۸

حد و پیوستگی

آزمون ۸۶: مفهوم حد و قضایای حد (۱) ۸۹

آزمون ۸۷: مفهوم حد و قضایای حد (۲) ۹۰

آزمون ۸۸: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (۱) .. ۹۱

آزمون ۸۹: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (۲) .. ۹۲

آزمون ۹۰: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ مثلثاتی (۱) ۹۳

آزمون ۹۱: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ مثلثاتی (۲) ۹۴

آزمون ۹۲: پیوستگی (۱) ۹۵

آزمون ۹۳: پیوستگی (۲) ۹۶

آزمون ۹۴: حد بی‌نهایت (۱) ۹۷

آزمون ۹۵: حد بی‌نهایت (۲) ۹۸

آزمون ۹۶: مجانب قائم ۹۹

آزمون ۹۷: حد در بی‌نهایت (۱) ۱۰۰

آزمون ۹۸: حد در بی‌نهایت (۲) ۱۰۱

آزمون ۹۹: مجانب افقی ۱۰۲

آزمون ۱۰۰: حالت‌های مبهم $\infty-\infty$ و $0\times\infty$ (خارج از کتاب درسی) ۱۰۳

مشتق

آزمون ۱۰۱: مفهوم مشتق (۱) ۱۰۴

آزمون ۱۰۲: مفهوم مشتق (۲) ۱۰۵

آزمون ۱۰۳: قواعد مشتق‌گیری (۱) ۱۰۶

آزمون ۱۰۴: قواعد مشتق‌گیری (۲) ۱۰۷

آزمون ۱۰۵: قواعد مشتق‌گیری (۳) ۱۰۸

آزمون ۱۰۶: مشتق تابع مرکب (۱) ۱۰۹

آزمون ۱۰۷: مشتق تابع مرکب (۲) ۱۱۰

آزمون ۱۰۸: مشتق تابع مرکب (۳) ۱۱۱

آزمون ۱۰۹: مشتق‌پذیری ۱۱۲

آزمون ۱۱۰: خط مماس بر نمودار تابع ۱۱۳

آزمون ۱۱۱: آهنگ تغییر ۱۱۴

آزمون ۱۱۲: مشتق دوم (۱) ۱۱۵

آزمون ۱۱۳: مشتق دوم (۲) ۱۱۶

آزمون ۱۱۴: قاعدهٔ هوپیتال (۱) ۱۱۷

آزمون ۱۱۵: قاعدهٔ هوپیتال (۲) ۱۱۸

کاربردهای مشتق

آزمون ۱۱۶: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۱) ۱۱۹

آزمون ۱۱۷: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۲) ۱۲۰

آزمون ۱۱۸: نقاط بحرانی ۱۲۱

آزمون ۱۱۹: اکسترمم‌های نسبی (۱) ۱۲۲

آزمون ۱۲۰: اکسترمم‌های نسبی (۲) ۱۲۳

آزمون ۱۲۱: اکسترمم‌های مطلق (۱) ۱۲۴

آزمون ۱۲۲: اکسترمم‌های مطلق (۲) ۱۲۵

آزمون ۱۲۳: بهینه‌سازی (۱) ۱۲۶

آزمون ۱۲۴: بهینه‌سازی (۲) ۱۲۷

آزمون ۱۲۵: جهت تقعر (۱) ۱۲۸

آزمون ۱۲۶: جهت تقعر (۲) ۱۲۹

آزمون ۱۲۷: نقطهٔ عطف (۱) ۱۳۰

آزمون ۱۲۸: نقطهٔ عطف (۲) ۱۳۱

آزمون ۱۲۹: رسم نمودار (۱) ۱۳۲

آزمون ۱۳۰: رسم نمودار (۲) ۱۳۳

بخش دوم: آزمون‌های فصلی

آزمون ۱۳۱: بازه و مجموعه ۱۳۶

آزمون ۱۳۲: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۱) ۱۳۷

آزمون ۱۳۳: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۲) ۱۳۸

آزمون ۱۳۴: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۳) ۱۳۹

آزمون ۱۳۵: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۴) ۱۴۰

آزمون ۱۳۶: الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۵) ۱۴۱

آزمون ۱۳۷: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۱) ۱۴۲

آزمون ۱۳۸: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۲) ۱۴۳

آزمون ۱۳۹: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۳) ۱۴۴

آزمون ۱۴۰: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۴) ۱۴۵

آزمون ۱۴۱: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم (۵) ۱۴۶

آزمون ۱۴۲: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۱) ۱۴۷

آزمون ۱۴۳: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۲) ۱۴۸

آزمون ۱۴۴: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۳) ۱۴۹

آزمون ۱۴۵: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۴) ۱۵۰

آزمون ۱۴۶: معادله، تعیین علامت و نامعادله (۵) ۱۵۱

آزمون ۱۴۷: قدرمطلق و جزء صحیح (۱) ۱۵۲

آزمون ۱۴۸: قدرمطلق و جزء صحیح (۲) ۱۵۳

آزمون ۱۴۹: قدرمطلق و جزء صحیح (۳) ۱۵۴

آزمون ۱۵۰: قدرمطلق و جزء صحیح (۴) ۱۵۵

آزمون ۱۵۱: توابع نمایی و لگاریتمی (۱) ۱۵۶

آزمون ۱۵۲: توابع نمایی و لگاریتمی (۲) ۱۵۷

آزمون ۱۵۳: توابع نمایی و لگاریتمی (۳) ۱۵۸

آزمون ۱۵۴: توابع نمایی و لگاریتمی (۴) ۱۵۹
آزمون ۱۵۵: توابع نمایی و لگاریتمی (۵) ۱۶۰
آزمون ۱۵۶: تابع (۱) ۱۶۱
آزمون ۱۵۷: تابع (۲) ۱۶۲
آزمون ۱۵۸: تابع (۳) ۱۶۳
آزمون ۱۵۹: تابع (۴) ۱۶۴
آزمون ۱۶۰: تابع (۵) ۱۶۵
آزمون ۱۶۱: تابع (۶) ۱۶۶
آزمون ۱۶۲: تابع (۷) ۱۶۷
آزمون ۱۶۳: مثلثات (۱) ۱۶۸
آزمون ۱۶۴: مثلثات (۲) ۱۶۹
آزمون ۱۶۵: مثلثات (۳) ۱۷۰
آزمون ۱۶۶: مثلثات (۴) ۱۷۱
آزمون ۱۶۷: مثلثات (۵) ۱۷۲
آزمون ۱۶۸: مثلثات (۶) ۱۷۳
آزمون ۱۶۹: مثلثات (۷) ۱۷۴
آزمون ۱۷۰: مثلثات (۸) ۱۷۵
آزمون ۱۷۱: مثلثات (۹) ۱۷۶
آزمون ۱۷۲: حد و پیوستگی (۱) ۱۷۷
آزمون ۱۷۳: حد و پیوستگی (۲) ۱۷۸
آزمون ۱۷۴: حد و پیوستگی (۳) ۱۷۹
آزمون ۱۷۵: حد و پیوستگی (۴) ۱۸۰
آزمون ۱۷۶: حد و پیوستگی (۵) ۱۸۱
آزمون ۱۷۷: حد و پیوستگی (۶) ۱۸۲
آزمون ۱۷۸: حد و پیوستگی (۷) ۱۸۳
آزمون ۱۷۹: حد و پیوستگی (۸) ۱۸۴
آزمون ۱۸۰: مشتق (۱) ۱۸۵
آزمون ۱۸۱: مشتق (۲) ۱۸۶
آزمون ۱۸۲: مشتق (۳) ۱۸۷
آزمون ۱۸۳: مشتق (۴) ۱۸۸
آزمون ۱۸۴: مشتق (۵) ۱۸۹
آزمون ۱۸۵: مشتق (۶) ۱۹۰
آزمون ۱۸۶: مشتق (۷) ۱۹۱
آزمون ۱۸۷: مشتق (۸) ۱۹۲
آزمون ۱۸۸: مشتق (۹) ۱۹۳
آزمون ۱۸۹: مشتق (۱۰) ۱۹۴
آزمون ۱۹۰: کاربردهای مشتق (۱) ۱۹۵
آزمون ۱۹۱: کاربردهای مشتق (۲) ۱۹۶
آزمون ۱۹۲: کاربردهای مشتق (۳) ۱۹۷
آزمون ۱۹۳: کاربردهای مشتق (۴) ۱۹۸
آزمون ۱۹۴: کاربردهای مشتق (۵) ۱۹۹
آزمون ۱۹۵: کاربردهای مشتق (۶) ۲۰۰
آزمون ۱۹۶: کاربردهای مشتق (۷) ۲۰۱
آزمون ۱۹۷: کاربردهای مشتق (۸) ۲۰۲
آزمون ۱۹۸: کاربردهای مشتق (۹) ۲۰۳

بخش سوم: آزمون‌های جامع تألیفی

آزمون ۱۹۹: جامع (۱) ۲۰۶
آزمون ۲۰۰: جامع (۲) ۲۰۸
آزمون ۲۰۱: جامع (۳) ۲۱۰
آزمون ۲۰۲: جامع (۴) ۲۱۲
آزمون ۲۰۳: جامع (۵) ۲۱۴
آزمون ۲۰۴: جامع (۶) ۲۱۶
آزمون ۲۰۵: جامع (۷) ۲۱۸
آزمون ۲۰۶: جامع (۸) ۲۲۰
آزمون ۲۰۷: جامع (۹) ۲۲۲

بخش چهارم: آزمون‌های کنکور

آزمون ۲۰۸: کنکور ریاضی سال ۱۳۹۸ - داخل کشور ۲۲۶

آزمون ۲۰۹: کنکور ریاضی سال ۱۳۹۸ - خارج از کشور ... ۲۲۸

آزمون ۲۱۰: کنکور ریاضی سال ۱۳۹۹ - داخل کشور ۲۳۰

آزمون ۲۱۱: کنکور ریاضی سال ۱۳۹۹ - خارج از کشور ... ۲۳۲

آزمون ۲۱۲: کنکور ریاضی سال ۱۴۰۰ - داخل کشور ۲۳۴

آزمون ۲۱۳: کنکور ریاضی سال ۱۴۰۰ - خارج از کشور ... ۲۳۷

آزمون ۲۱۴: کنکور ریاضی سال ۱۴۰۱ - داخل کشور ۲۳۹

آزمون ۲۱۵: کنکور ریاضی سال ۱۴۰۱ - خارج از کشور ... ۲۴۱

آزمون ۲۱۶: کنکور ریاضی سال ۱۴۰۲ (نوبت اول) ۲۴۳

بخش پنجم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۲۴۵

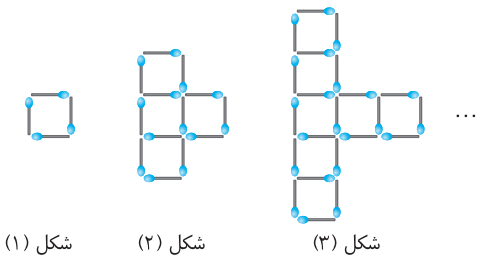
بخش ششم: پاسخنامهٔ کلیدی

پاسخنامهٔ کلیدی ۴۴۹

آزمون ۳ الگو و دنباله

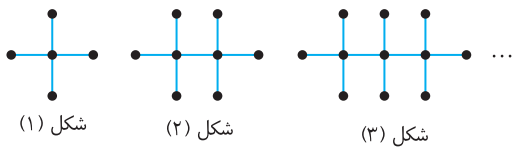
محل انجام محاسبات

۲۱- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل چهاردهم در الگوی مقابل چندتا است؟



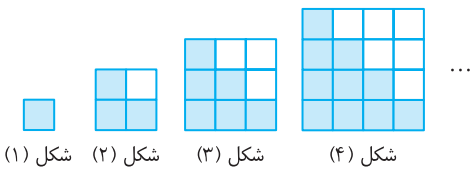
۱) ۱۰۳
۲) ۱۱۲
۳) ۱۲۱
۴) ۱۳۰

۲۲- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



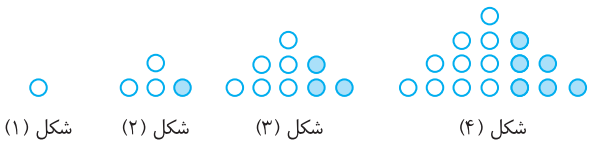
۱) ۶۰
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۴

۲۳- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده در شکل سی‌اُم چندتاست؟



۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۲۴- در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با $\frac{۸}{۱۷}$ است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۷
۳) ۱۶
۴) ۱۵

۲۵- در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟

۱) ۱۷
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۴

۲۶- همهٔ جمله‌های دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۲n-k}{۵n+۳}$ با هم برابرند. مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $-\frac{۴}{۵}$
۳) $-\frac{۶}{۵}$
۴) $-\frac{۷}{۵}$

۲۷- کدام‌یک می‌تواند جملهٔ عمومی دنبالهٔ $۲,۳,۱۰,۱۵,\ldots$ باشد؟

۱) $n+۱$
۲) $n^۲-(-۱)^n$
۳) $۳n^۲-۸n+۷$
۴) $۲n^۲-۵n+۵$

۲۸- در یک دنباله با جملهٔ عمومی a_n، $a_۱=۱$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+۱}=\frac{n}{n+۱}a_n$ برقرار است. مقدار $a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹۹}$
۲) $\frac{۱}{۱۰۰}$
۳) $\frac{۱}{۱۰۱}$
۴) $\frac{۱}{۱۰۲}$

۲۹- اگر بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=-۳n^۲+۱۲n+c$ برابر ۸ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۱۲
۲) -۸
۳) ۲۰
۴) -۴

۳۰- چند جمله از ابتدای دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\log_۲\frac{n}{n+۱}$ را جمع کنیم تا حاصل برابر -۳ شود؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

آزمون ۴ — دنبالهٔ حسابی (۱)

محل انجام محاسبات

۳۱- در یک دنباله، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 1$، $a_n-a_{n+1}=2$. در این دنباله مقدار $\frac{a_{10}}{a_5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۲- اگر در دنباله‌ای حسابی $3a_4+4a_5-7a_9=124$، مقدار قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -6 ۴) -8

۳۳- در دنبالهٔ حسابی $4x-2, 3x-4, 3x-1, \ldots$ جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) -19 ۲) -22 ۳) -23 ۴) -25

۳۴- چندمین جمله از دنبالهٔ حسابی $-1, 2, 5, \ldots$ برابر ۲۱۸ است؟

۱) هفتاد و یکم ۲) هفتاد و چهارم ۳) هفتاد و پنجم ۴) هفتاد و هشتم

۳۵- در دنبالهٔ حسابی $2, 6, 10, \ldots$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۵۰۰ وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۸

۳۶- سه زاویهٔ مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌های این مثلث کدام است؟

۱) 45° ۲) 60° ۳) 75° ۴) 90°

۳۷- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه برابر 86° باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟

۱) 110° ۲) 115° ۳) 120° ۴) 130°

۳۸- در جدول زیر، بین دو عدد $\sqrt{3}-5$ و $\sqrt{3}+5$، چهار واسطهٔ حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟

$\sqrt{3}-5$					$\sqrt{3}+5$

۱) $\sqrt{3}-4$ ۲) $\sqrt{3}-3$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}-1$

۳۹- مجموع سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۴۰- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر قدرنسبت این دنباله است و حاصل‌ضرب نُه جملهٔ نخست این دنباله برابر $10^8\times 10!$ است. جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۱۰۰۰

آزمون ۵ دنبالهٔ حسابی (۲)

محل انجام محاسبات

۴۱- جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n=\frac{۵-۲n}{۳}$ است. قدرنسبت دنباله چقدر از جملهٔ اول کمتر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۴۲- در دنباله‌ای حسابی $a_۱+a_۳=۱۶$ و $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۳- جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a, ۲a-۱, ۱-۳a, \ldots$ کدام است؟

۱) $۱-\frac{n}{۲}$ ۲) $n-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}-n$ ۴) $\frac{n}{۲}+۱$

۴۴- اگر $a+b, a+c, b+c$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، کدام گزینه دنباله‌ای حسابی را نشان می‌دهد؟

۱) b, a, c ۲) b, c, a ۳) a, c, b ۴) a, b, c

۴۵- در دنبالهٔ حسابی $۱۹۶, ۱۹۲, ۱۸۸, \ldots$ نخستین جملهٔ کوچک‌تر از ۱۰ چندمین جمله است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۴۶- در دنباله‌ای حسابی، جملهٔ دهم ۳۲ واحد کمتر از دومین جمله است. اگر جملهٔ چهارم دنباله برابر ۱۵ باشد، چند جمله از دنباله مثبت هستند؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۴۷- اگر جواب‌های معادلهٔ $(x-a)(x^۲-۸x+۱۲)=۰$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، a چند مقدار مختلف ممکن است باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۸- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت طول ضلع بلندتر زاویهٔ قائمه به طول ضلع کوتاه‌تر زاویهٔ قائمهٔ این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۹- مجموع چهار جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۸۰ است. حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۲۷ ۳) -۳۶ ۴) -۴۵

۵۰- بین دو عدد $m^۲+۳m+۴$ و $m^۲+۴$، تعداد $m-۱$ عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد حاصل، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۶ — دنبالهٔ هندسی (۱)

محل انجام محاسبات

۵۱- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی a_n می‌دانیم $a_{n+1}=\frac{۳}{۲}a_n$. اگر $a_۳=۳$، مقدار $a_{۲۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$ ۲) $\frac{۳^{۲۸}}{۲^{۲۷}}$ ۳) $\frac{۳^{۲۹}}{۲^{۲۸}}$ ۴) $\frac{۳^{۳۰}}{۲^{۲۹}}$

۵۲- اگر $\sqrt{a}, \sqrt[۴]{۲}, \sqrt[۳]{۲}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی باشند، جملهٔ سیزدهم این دنباله کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۶]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[۶]{۲}$

۵۳- واسطهٔ حسابی جواب‌های معادله‌ای درجهٔ دوم ۴/۵ و واسطهٔ هندسی جواب‌های آن ۱/۵ است. این معادله کدام است؟

۱) $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$ ۲) $۴x^۲+۳۶x+۹=۰$ ۳) $x^۲-۱۸x+۹=۰$ ۴) $x^۲+۱۸x+۹=۰$

۵۴- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم $a_۱a_۶=۲۷$ و $a_۲a_۴=۹$. مقدار $a_۵$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۵۵- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $-\frac{۱}{۲}$، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات هفتم و هشتم است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۵۶- حاصل‌ضرب پنج جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۱۰۲۴ است. جملهٔ وسط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۵۷- بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و $۱۶\sqrt{۲}$ هفت واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول $\sqrt{۲}$ است). جملهٔ سوم دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $۶۴\sqrt{۲}$

۵۸- جملهٔ هشتادونهم دنبالهٔ حسابی $-۱۲, -\frac{۹۵}{۸}, \ldots$ با جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی $۲۴۳, \ldots$ برابر است. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵۹- اگر $a, ۸, b$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ای هندسی می‌سازند. مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۶۰- جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ای حسابی، سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

آزمون ۷ دنبالهٔ هندسی (۲)

محل انجام محاسبات

۶۱- در یک دنبالهٔ هندسی می‌دانیم $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$. مقدار $\frac{a_۷}{a_۳}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۸}$

۶۲- اگر $۲^{x-۴}, ۴^{۳x}, ۸^{۲-۳x}, \ldots$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۰}$

۶۳- اگر جملهٔ هفتم دنبالهٔ هندسی $\log_۴ a, \log_{۱۶} a, \ldots$ برابر $\frac{۱}{۳۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۶۴- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱، $a_۵-a_۱=۱۳۰$ و $a_۴-a_۲=۲۵$. مقدار $a_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

۶۵- بین اعداد مثبت a و b پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول a است). اگر چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کردیم، قدرنسبت دو برابر حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۶۶- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۶۴ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۷- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}}$

۶۸- اگر اعداد $x+۴$، $۲x+y$ و $۲y+x$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار $x+۲y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۶۹- جملات سوم، پنجم و ششم دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=a-n$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جملهٔ دهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۷۰- در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملات سوم، پنجم و هشتم به‌ترتیب جملات اول تا سوم یک دنبالهٔ هندسی‌اند. نسبت جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی به جملهٔ دوازدهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۲۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۶}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲۶}$

آزمون ۸ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

محل انجام محاسبات

۷۱- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر -۶ و جملهٔ آخر آن برابر ۳۰ است. اگر مجموع جمله‌های این دنبالهٔ حسابی ۱۲۰ باشد، تعداد جمله‌های آن چندتا است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۲- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جمله‌های هفتم و چهاردهم برابر ۶۰ است. مجموع بیست جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۶۵۰

۷۳- اگر $\frac{n-۲}{۲n}, \frac{n-۳}{۲n}, \frac{n-۴}{۲n}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع n جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{n-۳}{۲}$ ۲) $\frac{n-۲}{۴}$ ۳) $\frac{n-۳}{۴}$ ۴) $\frac{n-۱}{۴}$

۷۴- مجموع تعدادی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $۵۰, ۴۶, ۴۲, \ldots$ از ابتدا حداکثر کدام است؟

۱) ۳۳۰ ۲) ۳۳۴ ۳) ۳۳۸ ۴) ۳۴۴

۷۵- در دنبالهٔ حسابی $۳, ۷, ۱۱, \ldots$ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۳۰۰ شود؟

۱) یازده جمله ۲) دوازده جمله ۳) سیزده جمله ۴) چهارده جمله

۷۶- در یک دنبالهٔ حسابی ۲ واحد از قدرنسبت کم می‌کنیم. برای اینکه مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، چقدر باید به جملهٔ اول اضافه کنیم؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۷۷- در دنباله‌ای حسابی و n جمله‌ای، $a_۱ = -۷$، $a_۲ = -۳$ و $S_n - a_n = ۵۶$. مقدار n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۷۸- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۸۰ است. اگر مجموع تمام جمله‌ها برابر ۳۰۰ باشد، تعداد جمله‌های دنباله کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۷۹- اگر اعداد سمت چپ معادلهٔ $۱+۴+۷+\cdots+x = ۱۴۵$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۱

۸۰- در یک دنبالهٔ حسابیِ $۲k+۱$ جمله‌ای، نسبت مجموع $k+۱$ جملهٔ با ردیف فرد به مجموع k جملهٔ با ردیف زوج کدام است؟

۱) $\frac{۲k}{۲k+۱}$ ۲) $\frac{۴k+۳}{۲k+۱}$ ۳) $\frac{۴k+۳}{۴k+۲}$ ۴) $\frac{k+۱}{k}$

آزمون ۹ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

محل انجام محاسبات

۸۱- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر ۲ است. مجموع n جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) $۲a_n - a_۱$ ۲) $۳a_n - a_۱$ ۳) $۲a_n + a_۱$ ۴) $۳a_n + a_۱$

۸۲- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = \frac{۴}{۳}(۳^n - ۱)$ به‌دست می‌آید. جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۲۴ ۴) ۲۷۰

۸۳- در دنباله‌ای هندسی $a_۲ = ۳$ و $a_۷ = ۹۶$. مقدار $S_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۰۴۹}{۲}$ ۲) $\frac{۳۰۵۷}{۲}$ ۳) $\frac{۳۰۶۹}{۲}$ ۴) $\frac{۳۰۷۱}{۲}$

۸۴- در دنبالهٔ هندسی $۱, \sqrt[۳]{۳}, \sqrt[۳]{۹}, \ldots$ مجموع شش جملهٔ دوم چند برابر مجموع شش جملهٔ اول است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۸۵- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, aq, aq^۲, \ldots$ چند برابر مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^۲}, \ldots$ است؟

۱) q^n ۲) $q^{n-۱}$ ۳) $q^{n+۱}$ ۴) $q^{n+۲}$

۸۶- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت با جمله‌های مثبت $S_۶ = ۲۱S_۲$. قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۷- در دنباله‌ای هندسی، مجموع ده جملهٔ اول ۳۳ برابر مجموع پنج جملهٔ اول است. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۶ ۴) ۷۲۹

۸۸- دربارهٔ دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots$ می‌دانیم $S_n = ۲^n - ۱$. حاصل $a_۱^۲ + \cdots + a_n^۲$ کدام است؟

۱) $(۲^n - ۱)^۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}(۲^n - ۱)$ ۳) $۴^n - ۱$ ۴) $\frac{۱}{۳}(۴^n - ۱)$

۸۹- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

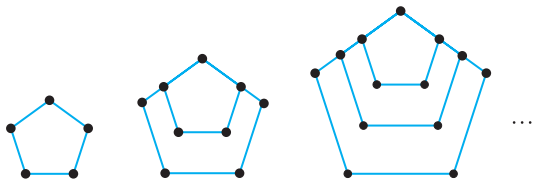
۹۰- حاصل $\frac{t^{۱۱} + t^{۱۰} + t^۹ + \cdots + t + ۱}{t^۹ + t^۶ + t^۳ + ۱}$ به‌ازای $t = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}$ کدام است؟

۱) $۳ + \sqrt{۵}$ ۲) $۳ - \sqrt{۵}$ ۳) $۲ + \sqrt{۵}$ ۴) $۴ - \sqrt{۵}$

محل انجام محاسبات

آزمون ۱۳۲ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۱)

۱۳۱۱- تعداد نقاط روی شکل چندم از الگوی مقابل برابر ۶۱ است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۱) چهاردهم
۲) پانزدهم
۳) شانزدهم
۴) هفدهم

۱۳۱۲- در دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = ۹۵n - n^۲$ چند جملهٔ مثبت وجود دارد؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۴ ۳) ۹۰ ۴) ۸۹

۱۳۱۳- اگر $\log_۲(۱۶a)$، $\log_۲(۳a+۴)$ و $\log_۲ a$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۳۱۴- جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۲ - ۳n$ را ۴ واحد کاهش و قدرنسبت را ۶ واحد افزایش می‌دهیم. جملهٔ بیست‌ویکم دنبالهٔ حسابی جدید کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۲ ۳) ۵۵ ۴) ۵۷

۱۳۱۵- در یک دنبالهٔ حسابی با n جمله، مجموع سه جملهٔ اول برابر $۶ - \sqrt{۲}$ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر $۶ + \sqrt{۲}$ است. مجموع جملهٔ اول و جملهٔ آخر دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۳۱۶- حاصل‌ضرب پانزده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \ldots$ کدام است؟

۱) $۲^{۳۰}$ ۲) $۲^{۶۰}$ ۳) $۲^{۷۵}$ ۴) $۲^{۹۰}$

۱۳۱۷- اگر عددهای $۳x-۱$، $۲x+۳$ و $y-۹$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و هندسی باشند، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۳۱۸- اگر x, y, z, t جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، $x+z=۲۰$ و $y+t=۶۰$، قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۱۹- در دنباله‌ای هندسی $a_۵ - a_۳ = ۹۶$ و $a_۸ - a_۶ = ۱۲$. جملهٔ پنجم این دنباله چقدر است؟

۱) -۶۴ ۲) -۱۶ ۳) -۳۲ ۴) -۸

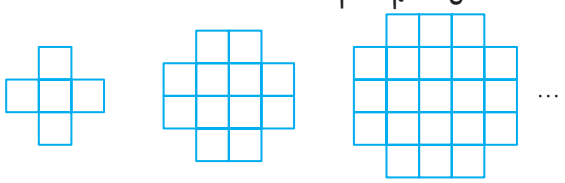
۱۳۲۰- در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۸ و مجموع ده جملهٔ اول برابر ۲۶۴ است. جملهٔ هفتم دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۳۲}{۳۱}$ ۲) $\frac{۱۲۸}{۳۱}$ ۳) $\frac{۲۵۶}{۳۱}$ ۴) $\frac{۵۱۲}{۳۱}$

محل انجام محاسبات

آزمون ۱۳۳ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۲)

۱۳۲۱- الگوی مقابل از مربع‌های ۱×۱ ساخته شده است. مساحت شکل هشتم کدام است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۱) ۶۴
۲) ۶۰
۳) ۹۶
۴) ۱۰۰

۱۳۲۲- بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = -2n^2 + 19n + 1$ چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸

۱۳۲۳- اگر جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ باشد، چند جملهٔ این دنباله در بازهٔ $(\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۲۴- در دنباله‌ای حسابی $a_3 + a_7 = 0$ و $a_3^2 + a_7^2 = 128$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ± 3 ۲) ± 2 ۳) ± 4 ۴) ± 6

۱۳۲۵- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع جملهٔ اول و جملهٔ بیستم دنباله چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۱۳۲۶- اگر x واسطهٔ حسابی $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$ و y واسطهٔ هندسی $\tan^2\alpha$ و $\cot^2\alpha$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟ $(y>0)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۲۷- اگر عددهای جدول زیر جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

x	$\frac{1}{2}$	y	z	۳۲

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۳۲۸- جمله‌های اول، دوم و چهارم یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی عددی مثبت باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

۱۳۲۹- مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی a, b, c برابر ۱۵ است. اگر $a+8, b+6, c+4$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار ac کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۳۳۰- مربعی به طول ضلع a مفروض است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب این کار را ادامه می‌دهیم. حداقل چند مرحله باید رنگ‌آمیزی کنیم تا بیش از ۹۹/۹ درصد مساحت مربع اولیه رنگ شود؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

آزمون ۱۳۴ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۳)

محل انجام محاسبات

۱۳۳۱- چند جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=-(\log n)^2+3\log n-2$ مثبت‌اند؟

۱) ۸۸ ۲) ۸۹ ۳) ۹۰ ۴) ۹۱

۱۳۳۲- در یک دنباله با جملهٔ عمومی a_n، $a_1=5$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+1}a_n=2$ برقرار است. حاصل‌ضرب بیست و یک جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۱۲۰ ۳) ۶۱۸۰ ۴) ۶۹۰۰

۱۳۳۳- در مورد دنبالهٔ با جملهٔ عمومی a_n می‌دانیم $a_1=5$ و به‌ازای هر عدد طبیعی n، $a_{n+1}=9-a_n$. مجموع بیست جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۸۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰

۱۳۳۴- مجموع بیست جملهٔ نخست دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=n-2[\frac{n}{2}]$ چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۳۳۵- جملات دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=n^2-n$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد دو برابر شمارهٔ آن دسته عدد وجود داشته باشد. جملهٔ اول دستهٔ بیستم کدام است؟

۱) ۱۹۰×۱۹۱ ۲) ۳۸۰×۳۸۱ ۳) ۳۸۱×۳۸۲ ۴) ۱۸۹×۱۹۰

۱۳۳۶- عددهای حقیقی و مثبت a، b و c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند و $abc=4$. کمترین مقدار ممکن b کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) $\sqrt[3]{16}$ ۴) $\sqrt[3]{32}$

۱۳۳۷- جملات دوم، پنجم و دهم یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت به‌ترتیب جملات اول، سوم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت‌اند. مقدار این قدرنسبت کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ۲) $\frac{15}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

۱۳۳۸- a_1، a_2 و a_3 سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی هستند، $a_1>0$ و $9a_1+5a_3>14a_2$. قدرنسبت این دنباله در کدام بازه نمی‌تواند باشد؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[\frac{5}{9},1]$ ۳) $[1,\frac{9}{5}]$ ۴) $(-\infty,0)$

۱۳۳۹- اگر a,b,c سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی و غیرثابت باشند و $a+b+c=kb$، کدام درست است؟

۱) $-1\le k<3$ ۲) $k>3$ یا $k\le-1$ ۳) $-1\le k<2$ ۴) $k>2$ یا $k\le-1$

۱۳۴۰- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $a,a+2,a+4,\ldots$ با مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $1,2,4,\ldots$ برابر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۹۱/۲ ۲) ۹۲/۳ ۳) ۹۳/۳ ۴) ۹۴/۱

آزمون ۱۳۵ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۴)

محل انجام محاسبات

۱۳۴۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=1$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}+1$. جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟ تجربی ۹۵

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۱۳۴۲- اعداد $2^b, 4\sqrt{2}, 2^a$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند. واسطهٔ حسابی a و b کدام است؟ ریاضی ۸۷

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{2}$

۱۳۴۳- تفاضل جملهٔ دهم از جملهٔ دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۵ و مجموع جملهٔ دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جملهٔ بیست و یکم این دنباله کدام است؟ ریاضی خارج ۸۴

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۱۳۴۴- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ تجربی ۹۲

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۱۳۴۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ ریاضی ۸۱

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۳۴۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول برابر ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی ۸۸

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۱۳۴۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟ ریاضی ۹۰

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۳۴۸- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ تجربی خارج ۹۱

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۴۹- عددهای طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),\ldots$$

مجموع جمله‌ها در دستهٔ بیستم کدام است؟ تجربی خارج ۹۴

۱) ۴۰۱۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۳۰ ۴) ۴۰۴۰

۱۳۵۰- حاصل $\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

آزمون ۱۳۶ الگو، دنباله، دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ هندسی (۵)

محل انجام محاسبات

۱۳۵۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}-2$. مقدار a_8-a_7 کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۱۳۵۲- اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ ریاضی ۸۴

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۵۳- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ متوالی برابر ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ تجربی ۹۰

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۵۴- در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۵۵- در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. چندمین جملهٔ این دنباله، صفر است؟ تجربی ۸۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۳۵۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟ ریاضی ۸۹

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۱۳۵۷- در بیست جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جملهٔ اول کدام است؟ تجربی خارج ۸۵

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۵۸- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1),(3,5),(7,9,11),\ldots$$

مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌اُم کدام است؟ تجربی ۹۴

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

۱۳۵۹- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ ریاضی ۹۴

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۶۰- حاصل $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\cdots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ ریاضی ۹۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

آزمون ۲۰۶ جامع (۸)

۲۱۲۱- اگر a,b,c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و c,b,a جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی باشند و $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۱۲}$، مقدار b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

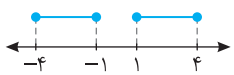
۲۱۲۲- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $mx^۲-nx+۱۰=۰$ به صورت $\{-\frac{n}{۱+n},\frac{n}{۱-n}\}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) -۲۰ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

۲۱۲۳- اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\frac{۶۴}{\sin^۳ x}+\frac{۶۴}{\cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) ۵۶۵ ۲) -۲۴۶ ۳) ۶۵۶ ۴) -۳۵۱

۲۱۲۴- عضوهای مجموعهٔ شکل مقابل در کدام نابرابری‌ها صدق می‌کنند؟

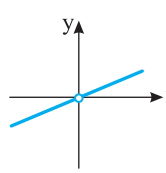


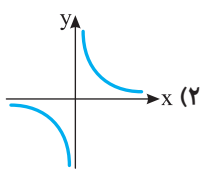
۱) $۱\le|x|\le۴$ ۲) $۱\le|x+۱|\le۴$
۳) $|x|\le۴$ ۴) $۱\le|x-۱|\le۴$

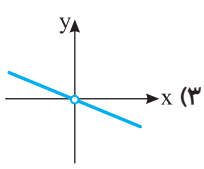
۲۱۲۵- اگر $f(x)=\frac{x^۲}{[x]+[-x]}$ و $D_f=(۰,۱۰)-\mathbb{Z}$، چند عدد صحیح در برد تابع f قرار دارند؟

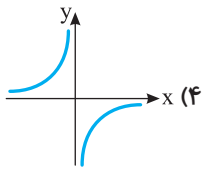
۱) ۸۹ ۲) ۹۰ ۳) ۹۱ ۴) ۹۹

۲۱۲۶- اگر f و g دو تابع چندجمله‌ای باشند به‌طوری که $f(-x)=-f(x)$، $g(-x)=g(x)$ و $(f-g)(x)=۲x^۲-۳x$، نمودار تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

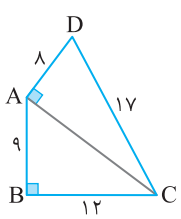
۲۱۲۷- اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$ و $fog=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$ ۲) $\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$
۳) $\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۳)\}$

۲۱۲۸- نمودار تابع $f(x)=\sin(x-\frac{۲\pi}{۳})$ را $k^۲$ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها و پس از آن نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. اگر نمودار نهایی بر نمودار تابع f منطبق باشد، کمترین مقدار ممکن $k^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۲۱۲۹- در شکل مقابل مقدار $\cos(\hat{BCD})$ کدام است؟



۱) $\frac{۸۴}{۸۵}$ ۲) $\frac{۷۶}{۸۵}$
۳) $\frac{۳۶}{۸۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۸۵}$

محل انجام محاسبات

۲۱۳۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{۴}+x)+\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=۲$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴}$ ۳) $k\pi$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۲۱۳۱- اگر a جواب معادلهٔ $۴^{x}-۳^{x-\frac{۱}{۲}}=۳^{x+\frac{۱}{۲}}-۲^{۲x-۱}$ باشد، مقدار $a^{۲}-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۱۳۲- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^{(۲+\log_{۲}x)}=۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۱۳۳- مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲}x}{\cos x-\sqrt{\cos ۲x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۱۳۴- تابع $f(x)=(x^{۲}-۶a)[x]$ روی بازهٔ $[۲,۴)$ پیوسته است. مقدار $f(\frac{۴a}{۳})$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) -۵ ۴) -۱۰

۲۱۳۵- به‌ازای چند مقدار m نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{۴x^{۲}-mx+۱}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۱۳۶- مشتق دوم تابع $f(x)=x^{۳}\sqrt{x}$ در نقطهٔ $x=۴$ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۷۰ ۳) $\frac{۷۰}{۳}$ ۴) ۱۴۰

۲۱۳۷- در نقطه‌های به طول $x=۲$ و $x=-۲$ روی نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ دو مماس بر این نمودار رسم می‌کنیم. فاصلهٔ این دو خط کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$ ۳) $\frac{۸}{\sqrt{۱۷}}$ ۴) $۴\sqrt{۱۷}$

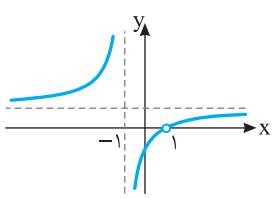
۲۱۳۸- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^{۲}|x+۳|+x^{۳}$ روی آن نزولی است، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱۳۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\sin^{۲}x-۲\sin x$ روی بازهٔ $(۰,\pi)$ چگونه است؟

۱) رو به بالا
۲) رو به پایین
۳) ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین
۴) ابتدا رو به پایین سپس رو به بالا

۲۱۴۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+ax+۱}{x^{۲}+bx+c}$ به شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) ۱ ۲) -۱
۳) ۲ ۴) -۲

۱۶ (۱) توجه کنید که $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

پس $n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲۴$

به این ترتیب $\begin{cases}n(A)+n(B)=۲۴\\ n(A)-n(B)=۴\end{cases}\Rightarrow n(B)=۱۰$

۱۷ (۱) توجه کنید که $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$

طبق فرض $n(A\cup B)=۹$، پس $n(B)=۹$. از طرف دیگر،

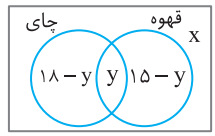
$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+۱۴=۹+۱۰\Rightarrow n(A)=۵$$

۱۸ (۲) فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۰۰-x=۸۵+۷۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۵۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=۰$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۹ (۲) **راه‌حل اول** فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $۳۰-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+۱۸-y+y+۱۵-y=۳۰\Rightarrow x=y-۳$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\geq ۰\ ,\ y\geq ۰\ ,\quad ۱۵-y\geq ۰\Rightarrow y\leq ۱۵\Rightarrow ۰\leq y\leq ۱۵$$

پس

$$۰\leq y-۳\leq ۱۲\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱۲$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=۱۲+۱۵-n(A\cup B)=۲۷-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\geq n(B)=۱۵$، بنابراین

$$n(A\cap B)=۲۷-n(A\cup B)\leq ۲۷-۱۵=۱۲$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۲۰ (۳) چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که $۱۴=n(A)+۲n(B)\leq n(B)+۲n(B)=۳n(B)$ و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\geq ۵$. بنابراین $n(A\cup B)=n(B)\geq ۵$.

۲۱ (۳) شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $۴+۹(n-۱)$ یعنی $۹n-۵$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۲۲ (۳) **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	…	n
تعداد نقاط	۱+۳+۱	۲+۴+۲	۳+۵+۳	…	n+(n+۲)+n

بنابراین در شکل nاُم، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۲۳ (۳) تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n$.

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$. بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰تا است.

۲۴ (۲) تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-۱)}{۲}}{n^۲}=\frac{n-۱}{۲n}$. به این ترتیب $\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۸}{۱۷}$. پس $n=۱۷$.

۲۵ (۲) با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^۲-۱$ خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^۲-۱}{۲}+۱$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^۲}{۲}$ نیز عددی زوج است.

پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^۲-۱}{۲}+۱=۱۱۳\Rightarrow n^۲-۱=۲۲۴\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow n=۱۵$$

۲۶ (۳) چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_۱=a_۲\Rightarrow\frac{۲-k}{۸}=\frac{۴-k}{۱۳}\Rightarrow ۲۶-۱۳k=۳۲-۸k\Rightarrow ۵k=-۶\Rightarrow k=-\frac{۶}{۵}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{۶}{۵}$، آن‌گاه $a_n=\frac{۲}{۵}$.

۲۷ (۲) چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $۲,۳,۴,۵,\ldots$ گزینهٔ (۲) $۲,۳,۱۰,۱۵,\ldots$

گزینهٔ (۳) $۲,۳,۱۰,۲۳,\ldots$ گزینهٔ (۴) $۲,۳,۸,۱۷,\ldots$

بنابراین فقط $n^۲-(-۱)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۲۸ (۲) به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_۲=\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۳=\frac{۲}{۳}a_۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}\ ,\quad a_۴=\frac{۳}{۴}a_۳=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{۱}{n}$، پس $a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$.

۲۹ (۴) بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-۳x^۲+۱۲x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{-۶}=۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر $a_۲$ است. در نتیجه $a_۲=۸\Rightarrow -۳\times ۴+۱۲\times ۲+c=۸\Rightarrow c=-۴$

۳۰ (۳) توجه کنید که

$$a_۱=\log_۲\frac{۱}{۲}\ ,\quad a_۲=\log_۲\frac{۲}{۳}\ ,\quad a_۳=\log_۲\frac{۳}{۴}\ ,\quad \ldots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_۲\frac{۱}{۲}+\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۲\frac{۳}{۴}+\cdots+\log_۲\frac{n-۱}{n}+\log_۲\frac{n}{n+۱}$$

$$=\log_۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n}\times\frac{n}{n+۱})=\log_۲\frac{۱}{n+۱}=-\log_۲(n+۱)$$

بنابراین $-\log_۲(n+۱)=-۳\Rightarrow n+۱=۲^۳=۸\Rightarrow n=۷$

۳۱ ۳ چون $a_{n+1}-a_n=-2$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_5=a_1+4d=3+4(-2)=-5\ ,\quad a_{10}=a_1+9d=3+9(-2)=-15$$

بنابراین $\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{-15}{-5}=3$.

۳۲ ۲ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$3(a_1+3d)+4(a_1+4d)-7(a_1+8d)=124\Rightarrow -31d=124\Rightarrow d=-4$$

۳۳ ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با $3x-4-(3x-1)=-3$

بنابراین $4x-2=(3x-4)-3\Rightarrow x=-5$

بنابراین جملهٔ سوم دنباله برابر است با $4(-5)-2=-22$ و جملهٔ چهارم برابر است با $-22-3=-25$

۳۴ ۲ چون $a_1=-1$ و $d=2-(-1)=3$، پس $a_n=-1+3(n-1)$ یعنی $a_n=3n-4$. بنابراین $a_k=3k-4=218$، پس $k=74$.

۳۵ ۲ چون $a_1=2$ و $d=4$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=2+4(n-1)=4n-2$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<500$ باشد. یعنی

$$4n-2<500\Rightarrow n<\frac{502}{4}\Rightarrow n\le 125$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۳۶ ۲ اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم.

مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d+a+a+d=180^\circ\Rightarrow a=60^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر 60° است.

۳۷ ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540^\circ$$

بنابراین $5a=540^\circ$ و در نتیجه $a=108^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه 86° است، پس $a-2d=86^\circ$ و در نتیجه $d=11^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+2d$ برابر است با $108^\circ+2\times 11^\circ=130^\circ$.

۳۸ ۲ **راه‌حل اول** چون $a_1=\sqrt{3}-5$ و $a_6=\sqrt{3}+5$، پس

$$a_6=a_1+5d\Rightarrow \sqrt{3}+5=\sqrt{3}-5+5d\Rightarrow d=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3}-5+2$ یا همان $\sqrt{3}-3$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{3}+5)-(\sqrt{3}-5)}{4+1}=\frac{10}{5}=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با $(\sqrt{3}-5)+2=\sqrt{3}-3$

۳۹ ۴ سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم.

بنابراین $a-d+a+a+d=15\Rightarrow 3a=15\Rightarrow a=5$

از طرف دیگر، $(a-d)\times a\times(a+d)=45\Rightarrow a(a^2-d^2)=45$

چون $a=5$، پس $5(25-d^2)=45\Rightarrow d^2=16\Rightarrow d=\pm 4$

۴۰ ۲ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_1=d\ ,\quad a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_1a_2a_3\dots a_9=10^8\times 10!\Rightarrow d(2d)(3d)\cdots(9d)=10^8\times 10!$$

$$d^9\times 9!=10^9\times 9!\Rightarrow d=10$$

بنابراین $a_{10}=10d=100$.

۴۱ ۴ **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=1$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_1=1$. با قرار دادن $n=2$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_2=\frac{1}{3}$. بنابراین $d=a_2-a_1=-\frac{2}{3}$. پس $a_1-d=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول a_1 به‌صورت $a_n=a_1+(n-1)d$ است، بنابراین $a_n=dn+(a_1-d)=-\frac{2}{3}n+\frac{5}{3}$. پس

$$a_1-d=\frac{5}{3}$$

۴۲ ۲ از $a_1+a_3=16$ نتیجه می‌شود

$$a_1+a_1+2d=16\Rightarrow a_1+d=8$$

چون $a_2+a_5+a_8=51$، پس

$$a_1+d+a_1+4d+a_1+7d=51\Rightarrow 3a_1+12d=51$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a_1+d=8\\3a_1+12d=51\end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=3$.

۴۳ ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$2a-1=\frac{a+1-3a}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

بنابراین $d=(2a-1)-a=a-1=-\frac{1}{2}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(n-1)=1-\frac{n}{2}$$

۴۴ ۴ **راه‌حل اول** چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{2}\Rightarrow 2(a+c)=a+2b+c\Rightarrow a+c=2b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۴۵ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=196-4(n-1)=200-4n$ است. بنابراین $a_{50}=0$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -4 است، پس

$$a_{47}=12,\quad a_{48}=8,\quad a_{49}=4,\quad a_{50}=0$$

۴۶ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{a_{10}-a_2}{10-2}=-\frac{32}{8}=-4$$

بنابراین $a_4=a_1+3d=a_1-12=15$ و در نتیجه $a_1=27$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=27-4(n-1)=31-4n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>0\Rightarrow 31-4n>0\Rightarrow n\le 7$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۴۷ ۲ چون $x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر a، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$6,2,a\Rightarrow\frac{6+a}{2}=2\Rightarrow a=-2\ ,\qquad 2,6,a\Rightarrow\frac{2+a}{2}=6\Rightarrow a=10$$

$$6,a,2\Rightarrow\frac{6+2}{2}=a\Rightarrow a=4\ ,\qquad 2,a,6\Rightarrow\frac{2+6}{2}=a\Rightarrow a=4$$

$$a,6,2\Rightarrow\frac{a+2}{2}=6\Rightarrow a=10\ ,\qquad a,2,6\Rightarrow\frac{a+6}{2}=2\Rightarrow a=-2$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۴۸ ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$

۴۹ ۳ چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$

پس دنباله به‌صورت $-۳d, -d, d, ۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۵۰ ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس

$$m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$$

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر است با $d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$

۵۱ ۱ دنبالهٔ a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$.

۵۲ ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۵۳ ۱ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله $x_۱$ و $x_۲$ باشند. در این صورت

$$\frac{x_۱+x_۲}{۲}=۴/۵\Rightarrow x_۱+x_۲=۹\ ,\quad \sqrt{x_۱x_۲}=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^۲-۹x+\frac{۹}{۴}=۰$ است که اگر طرفین آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$.

۵۴ ۳ از تساوی $a_۱a_۶=۲۷$ نتیجه می‌شود $a_۱\times a_۱r^۵=۲۷\Rightarrow a_۱^۲r^۵=۲۷$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید $a_۱r\times a_۱r^۳=۹\Rightarrow a_۱^۲r^۴=۹$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\frac{a_۱^۲r^۵}{a_۱^۲r^۴}=\frac{۲۷}{۹}\Rightarrow r=۳$

با جای‌گذاری $r=۳$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_۱=\pm\frac{۱}{۳}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_۱=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $a_۵=a_۱r^۴=\frac{۱}{۳}\times۳^۴=۲۷$.

۵۵ ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_۵+a_۸=a_۱r^۴+a_۱r^۷=a_۱r^۴(۱+r^۳)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با $a_۷+a_۸=a_۱r^۶+a_۱r^۷=a_۱r^۶(۱+r)$

بنابراین $\frac{a_۵+a_۸}{a_۷+a_۸}=\frac{a_۱r^۴(۱+r^۳)}{a_۱r^۶(۱+r)}=\frac{۱+r^۳}{r^۲(۱+r)}=\frac{۱-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۲})}=۷$.

۵۶ ۳ این جملات را به‌صورت $\frac{a}{r^۲}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^۲$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^۲}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^۲=۱۰۲۴\Rightarrow a^۵=۲^{۱۰}=۴^۵$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۵۷ ۱ **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{۲}, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, ۱۶\sqrt{۲}$$

پس $a_۱=\sqrt{۲}$ و $a_۹=۱۶\sqrt{۲}$. بنابراین

$$a_۱r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow r^۸=۱۶\Rightarrow(r^۲)^۴=۲^۴\Rightarrow r^۲=۲$$

در نتیجه $a_۳=a_۱r^۲=۲\sqrt{۲}$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{۷+۱}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow r^۸=۱۶=۲^۴\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$$

$$a_۳=a_۱r^۲=\sqrt{۲}\times(\pm\sqrt{۲})^۲=۲\sqrt{۲}$$

۵۸ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $\frac{۱}{۸}=\frac{۹۵}{۸}-(-۱۲)$. بنابراین

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-۱۲+\frac{۱}{۸}(n-۱)$ است.

در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{۸۹}=-۱۲+\frac{۱}{۸}\times(۸۹-۱)=-۱$.

اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه

$$\text{جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی}=۲۴۳r^۵=(۳r)^۵$$

بنابراین $(۳r)^۵=-۱\Rightarrow ۳r=-۱\Rightarrow r=-\frac{۱}{۳}$

۵۹ ۱ چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=۱۶\Rightarrow b=۱۶-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+۴$ می‌شود. بنابراین

$$۶۴=a(b+۴)=a(۱۶-a+۴)=۲۰a-a^۲$$

پس $a^۲-۲۰a+۶۴=۰$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>۰$).

۶۰ ۴ جمله‌ات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+۵d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس $(a+۵d)^۲=(a+d)(a+۱۳d)\Rightarrow ۱۲d^۲=۴ad\Rightarrow a=۳d$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+۵d}{a+d}=\frac{۳d+۵d}{۳d+d}=\frac{۸d}{۴d}=۲$.

۶۱ ۲ چون $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$، پس $\frac{a_۱r^۷}{a_۱r^۵}=\sqrt{۲}$. در نتیجه $r^۲=\sqrt{۲}$. بنابراین

$$\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_۱r^۶}{a_۱r^۲}=r^۴=(r^۲)^۲=\sqrt{۲}^۲=۲$$

۶۲ ۳ چون $۴^{۳x}$ واسطهٔ هندسی $۲^{x-۴}$ و $۸^{۲-۳x}$ است، پس

$$(۴^{۳x})^۲=۲^{x-۴}\times۸^{۲-۳x}\Rightarrow۲^{۱۲x}=۲^{x-۴}\times۲^{۶-۹x}\Rightarrow۲^{۱۲x}=۲^{۲-۸x}$$

بنابراین $۱۲x=۲-۸x$، یعنی $x=\frac{۱}{۱۰}$.

۶۳ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{۱۶}a}{\log_۴a}=\frac{\frac{\log a}{\log ۱۶}}{\frac{\log a}{\log ۴}}=\frac{\log ۴}{\log ۱۶}=\frac{\log ۴}{۲\log ۴}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a_۷=a_۱r^۶\Rightarrow\frac{۱}{۳۲}=\log_۴a\times\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\log_۴a=۲\Rightarrow a=۴^۲=۱۶$

۶۴ ۴ توجه کنید که

$$a_5-a_1=130\Rightarrow a_1r^4-a_1=130\Rightarrow a_1(r^4-1)=130$$

$$a_4-a_2=25\Rightarrow a_1r^3-a_1r=25\Rightarrow a_1r(r^2-1)=25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^4-1}{r(r^2-1)}=\frac{130}{25}\Rightarrow\frac{(r^2-1)(r^2+1)}{r(r^2-1)}=\frac{26}{5}\Rightarrow\frac{r^2+1}{r}=\frac{26}{5}$$

$$5(r^2+1)=26r\Rightarrow 5r^2-26r+5=0\Rightarrow r=5\ ,\ r=\frac{1}{5}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

به این ترتیب،

$$a_1r(r^2-1)=25\Rightarrow a_1\times 5\times 24=25\Rightarrow a_1=\frac{5}{24}$$

در نتیجه $a_2=a_1r=\frac{25}{24}$.

۶۵ ۳ در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^6=\frac{b}{a}$. در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^5=(2r)^5=\frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^6=(2r)^5\Rightarrow r^6=32r^5\Rightarrow r=32$$

۶۶ ۳ این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r},a,ar$ در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=64\Rightarrow a^3=64\Rightarrow a=4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=14\Rightarrow a(\frac{1}{r}+1+r)=14$$

$$4(\frac{1}{r}+1+r)=14\Rightarrow 2r^2-5r+2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2},r=2$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{1}{2}$، به‌صورت $8,4,2$ و به ازای $r=2$، به‌صورت $2,4,8$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۶۷ ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و ar^2 در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^2+(ar)^2=(ar^2)^2$. بنابراین

$$a^2(1+r^2)=a^2r^4\Rightarrow r^4-r^2-1=0\Rightarrow r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۶۸ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}2y+x=2x+y\Rightarrow y=x\\ 2y+x=x+4\Rightarrow 2y=4\Rightarrow y=2\end{cases}\Rightarrow x=y=2\Rightarrow x+2y=6$$

۶۹ ۲ توجه کنید که $a_4=a-6$ ، $a_5=a-5$ ، $a_3=a-3$

بنابر فرض، $(a-5)^2=(a-3)(a-6)$. بنابراین

$$a^2-10a+25=a^2-9a+18\Rightarrow a=7$$

در نتیجه $a_{10}=7-10=-3$.

۷۰ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+2d$، $a+4d$ و $a+7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2=(a+2d)(a+7d)\Rightarrow 2d^2=ad\Rightarrow a=2d$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $4d,6d,9d,\ldots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{27}{2}d$ است زیرا $r=\frac{3}{2}$ و $9d\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت مقابل است:

$$a_n=a+(n-1)d=2d+(n-1)d=(n+1)d$$

به این ترتیب $a_{12}=13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{27}{2}d}{13d}=\frac{27}{26}$.

۷۱ ۳ توجه کنید که $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow 120=\frac{n}{2}(-6+30)\Rightarrow n=10$

۷۲ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a_7+a_{14}=a_1+6d+a_1+13d=2a_1+19d=60$$

بنابراین $S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=\frac{20}{2}\times 60=600$.

راه‌حل دوم چون $7+14=1+20$، پس $a_7+a_{14}=a_1+a_{20}$، بنابراین

$$S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=10\times 60=600$$

۷۳ ۳ **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{n-3}{2n}-\frac{n-2}{2n}=-\frac{1}{2n}$$

بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(\frac{n-2}{n}-\frac{1}{2n}(n-1))=\frac{n}{2}(\frac{n-3}{2n})=\frac{n-3}{4}$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n=1$، سه جملهٔ اول دنباله $-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2}$ هستند. مجموع n جملهٔ نخست دنباله همان جملهٔ اول، یعنی $-\frac{1}{2}$ است. فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $n=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است.

۷۴ ۳ مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$.

چون $a_1=50$ و $d=-4$، پس $S_n=\frac{n}{2}(100-4(n-1))=52n-2n^2$. حداکثر مقدار عبارت درجهٔ دوم $-2n^2+52n$ به ازای $n=\frac{52}{4}=13$ به‌دست می‌آید، پس بیشترین مقدار بین S_nها برابر است با $S_{13}=338$.

۷۵ ۳ قدرنسبت دنباله برابر ۴ و جملهٔ اول آن ۳ است. پس مجموع n جملهٔ اول آن برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2\times 3+4(n-1))=n(2n+1)=2n^2+n$$

بنابراین

$$2n^2+n>300\Rightarrow 2n^2+n-300>0$$

می‌توان نامعادلهٔ فوق را حل کرد که جواب آن به‌صورت $n>\frac{-1+\sqrt{2401}}{4}=12$ می‌شود، یعنی $n\geq 13$.

۷۶ ۱ اگر جملهٔ اول دنباله a_1 و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=10a_1+45d$$

اگر ۲ واحد از قدرنسبت کم کنیم و k واحد به جملهٔ اول اضافه کنیم، مجموع ده جملهٔ اول می‌شود

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2(a_1+k)+9(d-2))=10a_1+10k+45d-90$$

چون قرار است مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، پس باید $10k-90=0\Rightarrow k=9$

۷۷ ۴ **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $a_2-a_1=4$. از طرف دیگر،

$$S_n-a_n=56\Rightarrow\frac{n}{2}(-14+4(n-1))-(-7+4(n-1))=56$$

$$-7n+2n(n-1)+7-4(n-1)=56$$

$$2n^2-13n-45=0\Rightarrow(2n+5)(n-9)=0\Rightarrow n=9$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $S_n-a_n=S_{n-1}=56$، $d=a_2-a_1=4$، از طرف دیگر، بنابراین

$$\frac{n-1}{2}(2a_1+(n-2)d)=56\Rightarrow\frac{n-1}{2}(2(-7)+4(n-2))=56$$

$$(n-1)(2n-11)=56\Rightarrow 2n^2-13n-45=0\Rightarrow(2n+5)(n-9)=0\Rightarrow n=9$$

۷۸ **(۱)** مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر را حساب می‌کنیم:

$$a_۱+a_۲+a_۳+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n=۱۰+۸۰$$

$$(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})=۹۰$$

با توجه به تساوی $a_{k+۱}+a_{n-k}=a_۱+a_n$ به‌دست می‌آید

$$(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)=۹۰\Rightarrow ۳(a_۱+a_n)=۹۰\Rightarrow a_۱+a_n=۳۰$$

از طرف دیگر، $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=۳۰۰\Rightarrow ۳۰\times\frac{n}{۲}=۳۰۰\Rightarrow n=۲۰$

۷۹ **(۳)** مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۳ است. فرض کنید تعداد عددهای سمت چپ معادله n باشد. در این صورت

$$\frac{n}{۲}(۲+۳(n-۱))=۱۴۵\Rightarrow ۳n^۲-n-۲۹۰=۰$$

$$(n-۱۰)(۳n+۲۹)=۰\Rightarrow n=۱۰, n=-\frac{۲۹}{۳}(\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین جملهٔ دهم دنباله برابر x است و $x=a_{۱۰}=a_۱+۹d=۱+۲۷=۲۸$.

۸۰ **(۴)** **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع $k+۱$ جملهٔ با ردیف فرد برابر است با $\frac{(k+۱)(a_۱+a_{۲k+۱})}{۲}$. همچنین مجموع k جملهٔ با ردیف زوج برابر است با $\frac{k(a_۲+a_{۲k})}{۲}$.

(توجه کنید $\frac{a_۲+a_{۲k}}{۲}=\frac{a_۱+a_{۲k+۱}}{۲}$)، بنابراین نسبت مورد نظر برابر با $\frac{k+۱}{k}$ است.

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم دنباله سه‌جمله‌ای باشد $(k=۱)$ و جملات آن به صورت $a_۱, a_۲, a_۳$ باشند. در این صورت نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a_۱+a_۳}{a_۲}=\frac{۲a_۲}{a_۲}=۲$.

فقط گزینهٔ (۴) به‌ازای $k=۱$ برابر ۲ می‌شود.

۸۱ **(۱)** مجموع n جملهٔ نخست برابر است با

$$S_n=\frac{a_۱(۲^n-۱)}{۲-۱}=a_۱(۲^n-۱)=a_۱۲^n-a_۱=۲(a_۱۲^{n-۱})-a_۱=۲a_n-a_۱$$

۸۲ **(۲)** اگر از مجموع پنج جملهٔ اول دنباله، مجموع چهار جملهٔ اول را کم کنیم، جملهٔ پنجم به‌دست می‌آید:

$$a_۵=S_۵-S_۴=\frac{۴}{۳}(۳^۵-۱)-\frac{۴}{۳}(۳^۴-۱)=\frac{۴}{۳}(۳^۵-۳^۴)=۲۱۶$$

۸۳ **(۳)** توجه کنید که $a_۲=۳\Rightarrow a_۱q=۳$ ، $a_۷=۹۶\Rightarrow a_۱q^۶=۹۶$

در نتیجه $\frac{a_۱q}{a_۱q^۶}=\frac{۳}{۹۶}\Rightarrow q^۵=۳۲\Rightarrow q=۲$

بنابراین $a_۱=\frac{۳}{q}=\frac{۳}{۲}$، پس $S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۲^{۱۰}-۱}{۲-۱}=\frac{۳}{۲}(۲^{۱۰}-۱)=\frac{۳۰۶۹}{۲}$

۸۴ **(۳)** ابتدا توجه کنید که $q=\sqrt[۳]{۳}$. مجموع شش جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول است. پس

$$\frac{S_{۱۲}-S_۶}{S_۶}=\frac{S_{۱۲}}{S_۶}-۱=\frac{\frac{۱\times(q^{۱۲}-۱)}{q-۱}}{\frac{۱\times(q^۶-۱)}{q-۱}}-۱=\frac{q^{۱۲}-۱}{q^۶-۱}-۱=q^۶=(\sqrt[۳]{۳})^۶=۹$$

۸۵ **(۲)** **راه‌حل اول** مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, aq, aq^۲, \dots$ برابر است با $S_n=\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}$. مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^۲}, \dots$ برابر است با

$$S'_n=\frac{a((\frac{۱}{q})^n-۱)}{\frac{۱}{q}-۱}=\frac{\frac{a(۱-q^n)}{q^n}}{\frac{۱-q}{q}}=\frac{aq(۱-q^n)}{(۱-q)q^n}=\frac{a(q^n-۱)}{q^{n-۱}(q-۱)}$$

بنابراین $\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}}{\frac{a(q^n-۱)}{q^{n-۱}(q-۱)}}=q^{n-۱}$.

راه‌حل دوم کافی است $n=۱$ را در نظر بگیریم و نسبت جملهٔ اول دنبالهٔ اول به جملهٔ اول دنبالهٔ دوم را به‌دست آوریم که ۱ می‌شود. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=۱$ برابر ۱ است.

۸۶ **(۱)** ابتدا توجه کنید که چون دنبالهٔ مورد نظر غیرثابت است، پس $q\neq ۱$ و چون جمله‌های آن مثبت‌اند، پس q مثبت است. از طرف دیگر،

$$S_۶=۲۱S_۲\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=۲۱\times\frac{a_۱(۱-q^۲)}{۱-q}\Rightarrow ۱-q^۶=۲۱(۱-q^۲)$$

$$(۱-q^۲)(۱+q^۲+q^۴)=۲۱(۱-q^۲)\Rightarrow q^۴+q^۲-۲۰=۰$$

$$(q^۴-۴)(q^۲+۵)=۰\Rightarrow q^۲=۴\Rightarrow q=۲$$

۸۷ **(۳)** توجه کنید که

$$\begin{cases} S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱} \\ S_۵=\frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱} \end{cases}\Rightarrow\frac{S_{۱۰}}{S_۵}=\frac{\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱}}=۳۳$$

در نتیجه

$$۳۳=\frac{q^{۱۰}-۱}{q^۵-۱}=q^۵+۱\Rightarrow q^۵=۳۲\Rightarrow q=۲$$

بنابراین $\frac{a_۵}{a_۱}=\frac{a_۱q^۴}{a_۱}=q^۴=۱۶$.

۸۸ **(۴)** توجه کنید که

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=(۲^n-۱)-(۲^{n-۱}-۱)=۲^{n-۱}$$

در نتیجه $a_n^۲=۲^{۲n-۲}=۴^{n-۱}$. بنابراین

$$a_۱^۲+\dots+a_n^۲=۴^۰+۴^۱+\dots+۴^{n-۱}=\frac{۴^n-۱}{۴-۱}=\frac{۴^n-۱}{۳}$$

۸۹ **(۲)** **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_۱, a_۲, \dots, a_{۲n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با $S_{۲n}=\frac{a_۱(q^{۲n}-۱)}{q-۱}$. از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به‌صورت $a_۲, a_۴, \dots, a_{۲n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $q^۲$ و جملهٔ اول $a_۲$ تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_۲(۱-(q^۲)^n)}{۱-q^۲}$ است. پس

$$\frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}=۳\times\frac{a_۲(۱-q^{۲n})}{(۱-q)(۱+q)}\Rightarrow a_۱=۳\times\frac{a_۱q}{۱+q}\Rightarrow ۳q=۱+q\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های دنباله ۲ تا باشد، یعنی دنباله به صورت $a_۱, a_۲$ باشد. طبق فرض $a_۱+a_۲=۳a_۲$، بنابراین

$$a_۱=۲a_۲\Rightarrow a_۱=۲a_۱q\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

۹۰ **(۲)** صورت کسر مجموع دوازده جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع چهار جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $t^۳$ است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱\times\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t}}{۱\times\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t^۳}}=\frac{۱-t^۳}{۱-t}=۱+t+t^۲$$

و حاصل آن به‌ازای $t=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ می‌شود

$$۱+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۴+۲-۲\sqrt{۵}+۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=۳-\sqrt{۵}$$