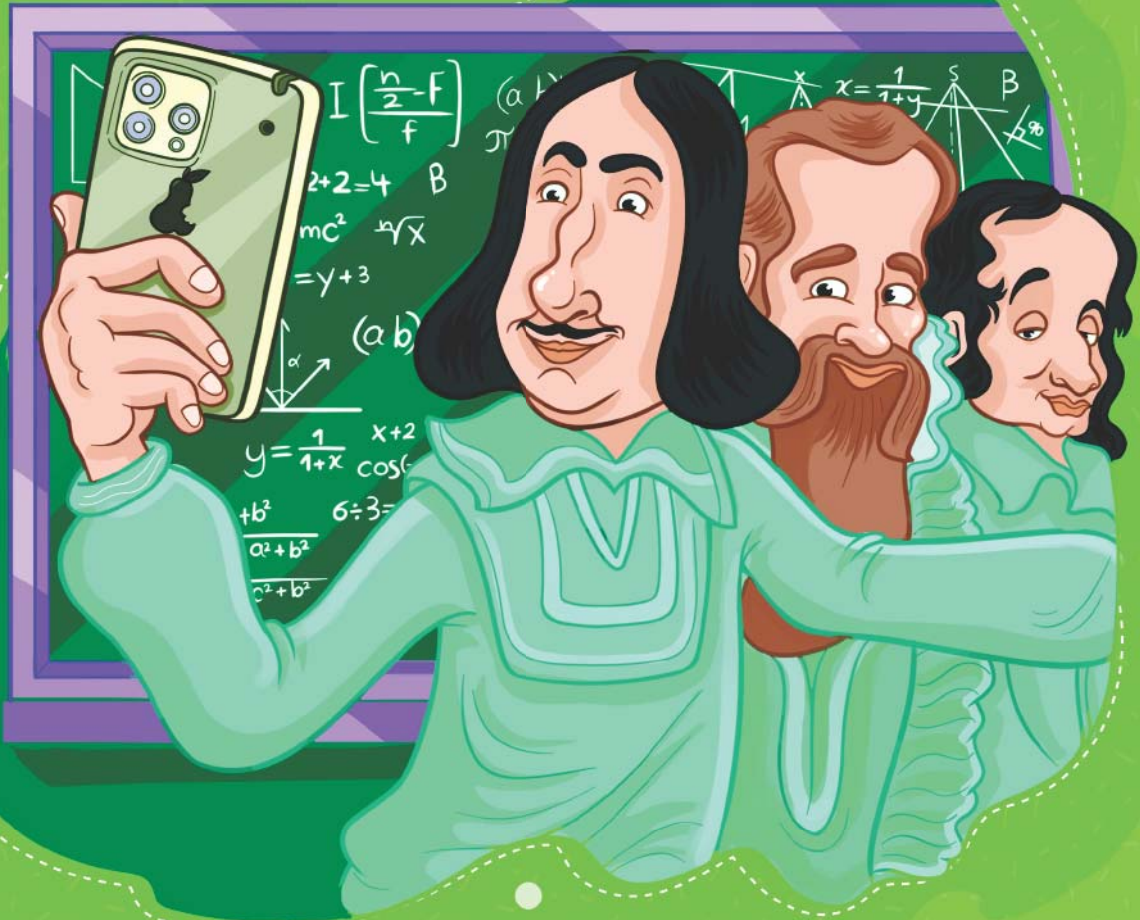


فصل اول: هندسة تحليلی و جبر

- درس اول: هندسة تحليلی
- درس دوم: معادله درجه دوم
- درس سوم: تاج درجه دوم
- درس چهارم: معادلات کویا و کنگ



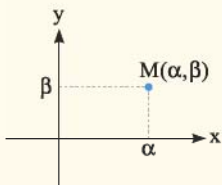


درس اول: هندسه تحلیلی



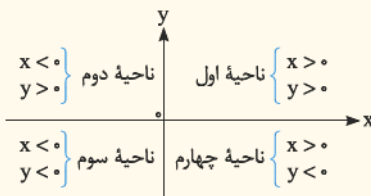
تست‌های مربوط به این درسنامه: ۱ تا ۳

مفاهیم اولیه نقطه



در زمان‌های قدیم، ریاضی‌دانی به نام دکارت در خارج می‌زیست. او دو محور مختلف را بر هم عمود کرد و نتیجه کارش ایجاد یک دستگاه به نام دستگاه مختصات دو بعدی یا همان دستگاه دکارتی شد. در این دستگاه محورهای افقی و عمودی را به ترتیب محور x ها و y ها می‌نامیم. این راه هم بلد باشید که هر نقطه روی این دستگاه به صورت $M(\alpha, \beta)$ نمایش داده می‌شود. شکل مقابل را ببینید:

همان‌طور که از روی شکل زیر دیده می‌شود، دستگاه مختصات دارای چهار ناحیه (ربع) است و علامت x و y در هر ناحیه به صورت زیر می‌باشد:



مثلاً نقطه $A(2, -3)$ در ناحیه چهارم قرار دارد. همچنین محل برخورد دو محور، نقطه $O(0, 0)$ است که به آن مبدأ مختصات می‌گوییم.

تذکر: هر نقطه روی محور x ها مختصاتش به صورت $A(x, 0)$ و هر نقطه روی محور y ها به صورت $B(0, y)$ می‌باشد (قبوله؟).

تست آموزشی اگر نقاط $A(2\alpha + 1, \beta - 1)$ و $B(\alpha + 2, 2\beta)$ به ترتیب روی محور x ها و y ها باشند، نقطه $C(\alpha, -\beta)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

اول ۱ دوم ۲ سوم ۳ چهارم ۴

پاسخ گزینه ۳ نقطه A روی محور x ها است، پس y آن صفر و همچنین نقطه B روی محور y ها است، در نتیجه x آن صفر می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = 1, \quad \alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

خلاصه اینکه نقطه $C(\alpha, -\beta)$ به صورت $C(-2, -1)$ در می‌آید که به وضوح این نقطه در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد.

تست آموزشی نقطه $A(m^2 + 2m, -m + 1)$ در ناحیه دوم قرار دارد. حدود m کدام است؟

۱ $0 < m < 1$ ۲ $-2 < m < 0$ ۳ $m < 1$ ۴ $m > -2$

پاسخ گزینه ۲ شرط آنکه یک نقطه در ناحیه دوم باشد این است که طولش منفی و عرضش مثبت باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} m^2 + 2m < 0 \Rightarrow m(m + 2) < 0 \\ -m + 1 > 0 \Rightarrow m < 1 \end{cases} \quad (2) \quad ; \quad \frac{m}{m^2 + 2m} \begin{matrix} -\infty & -2 & 0 & +\infty \\ + & - & + & + \end{matrix} \Rightarrow -2 < m < 0 \quad (1)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از دو محدوده (۱) و (۲)، حدود m به صورت $-2 < m < 0$ به دست می‌آید.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۴ تا ۲۴

مفاهیم اولیه خط



اقلیدس می‌گفت از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط می‌گذرد. معادله خط یک رابطه بین x و y است. همچنین اگر نقطه A روی خطی قرار داشته باشد، مختصات طول و عرض آن در معادله خط صدق می‌کند. برای مثال نقطه $A(2, 6)$ روی خط $y = 3x$ قرار دارد ولی این نقطه روی خط $y = x + 5$ قرار ندارد. ببینید:

$$y = 3x \xrightarrow{A(2,6)} 6 = 3(2) \quad \checkmark, \quad y = x + 5 \xrightarrow{A(2,6)} 6 = 2 + 5 \quad \times$$

مثال آموزشی نقطه $A(2, -4)$ روی خط $y = \frac{x}{a} + 2a + 1$ قرار دارد. a را پیدا کنید.

پاسخ اگر نقطه $A(2, -4)$ بخواهد روی خط $y = \frac{x}{a} + 2a + 1$ قرار داشته باشد، باید مختصات طول و عرض روی خط صدق کند، پس می‌توان نوشت:



$$y = \frac{x}{a} + 2a + 1 \xrightarrow{A(2,-4)} -4 = \frac{2}{a} + 2a + 1 \Rightarrow \frac{2}{a} + 2a + 5 = 0$$

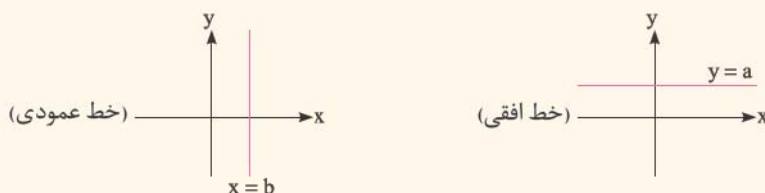
$$\xrightarrow{\times a} 2 + 2a^2 + 5a = 0 \Rightarrow 2a^2 + 5a + 2 = 0; \Delta = (5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \\ a_2 = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$



هر خط از سه عنصر مهم شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ تشکیل شده است که هر کدام را به طور مفصل خدمتان عرض می‌کنیم:

شیب خط و روش‌های پیدا کردن آن

خط‌هایی که نمودارشان به صورت  است، شیب‌شان مثبت و خط‌هایی که نمودارشان به صورت  می‌باشد، شیب‌شان منفی است. همچنین دو حالت خاص $x = b$ و $y = a$ را هم بلد باشید:



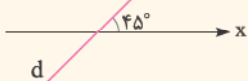
دقت داشته باشید که شیب خط افقی $y = a$ برابر صفر و شیب خط عمودی $x = b$ تعریف نشده (∞) است. (مانند من یا تون نره که معادله فطحای افقی $y = \infty$ و معادله فطحای عمودی $x = \infty$ هستند).

شیب خط از یکی از دو حالت زیر به دست می‌آید:

😊 **حالت اول (به کمک دو نقطه):** اگر دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، شیب خطی که از این دو نقطه می‌گذرد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

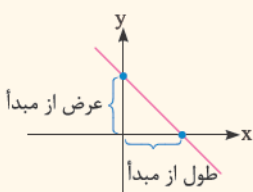
😊 **حالت دوم (به کمک تانژانت زاویه θ):** شیب هر خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ‌ها می‌سازد. برای



مثال در شکل مقابل شیب خط d برابر $\tan(45^\circ) = 1$ است:

عرض از مبدأ و طول از مبدأ

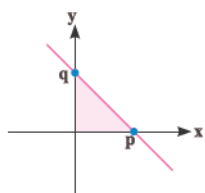
نقطه برخورد خط با محور y ‌ها را عرض از مبدأ و نقطه برخورد آن با محور x ‌ها را طول از مبدأ می‌نامیم. برای درک بهتر، شکل مقابل را ببینید:



به زبان ساده‌تر اینکه برای پیدا کردن عرض از مبدأ یک خط به جای x آن، صفر و برای پیدا کردن طول از مبدأ یک خط به جای y آن، صفر قرار می‌دهیم (قبوله؟).

نکته

اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط به ترتیب p و q باشند، معادله خط و مساحت مثلث ایجاد شده با محورهای مختصات، از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

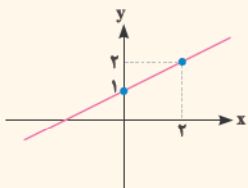


$$\text{معادله خط: } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad \text{مساحت: } S = \frac{1}{2} |p \times q|$$

برای مثال معادله خطی که طول از مبدأ آن ۴ و عرض از مبدأ آن ۳ است به صورت $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ می‌باشد.

تذکر: برای کشیدن نمودار هر خط، تنها کافی است که دو نقطه از آن خط را داشته باشیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم. برای مثال نمودار

خط $y = \frac{x}{4} + 1$ به صورت مقابل رسم می‌شود:



$$y = \frac{x}{4} + 1 \quad ; \quad \frac{x}{4} \Big|_0^4 \quad ; \quad \frac{y}{1} \Big|_1^0$$

معادله خط

مواد لازم برای نوشتن معادله هر خط، داشتن شیب و یک نقطه از آن خط است. اگر شیب خط برابر m و مختصات یک نقطه از خط به صورت $A(x_1, y_1)$ باشد، معادله خط از رابطه مقابل به دست می‌آید:

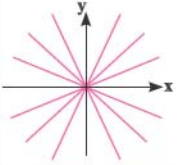
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



نکته

بلد باشید که معادله خطوط گذرنده از مبدأ مختصات به صورت $y = mx$ می‌باشد. دلیلش هم این است که عرض از مبدأ این خطوط مساوی صفر است.

و در آخر کسی هست که نرונה $y = x$ نیمساز ناهیهٔ اول و سوم و $y = -x$ نیمساز ناهیهٔ دوم و چهارم است؟



تذکر: برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط، آن‌ها را در یک دستگاه قرار می‌دهیم و با حل این دستگاه دو معادله دو مجهول، نقطهٔ تلاقی دو خط را پیدا می‌کنیم.

مثال آموزشی: نقطهٔ تلاقی دو خط $2x + y = 1$ و $4x + y - 5 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ: برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو خط، دستگاه شامل این دو معادله را تشکیل می‌دهیم و از آن x و y را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -2x - y = -1 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3$$

پس نقطهٔ تلاقی این دو خط، نقطهٔ $A(2, -3)$ است.

تست آموزشی: اگر نقطهٔ $A(2, -2)$ روی خط $y - ax + 4 = 0$ قرار داشته باشد، مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ این خط کدام است؟

- ۱ صفر ۲ -۴ ۳ -۸ ۴ -۱۰

پاسخ گزینه ۱: با توجه به این که نقطهٔ $A(2, -2)$ روی خط $y - ax + 4 = 0$ قرار دارد، پس مختصات طول و عرضش روی این خط صدق می‌کند، یعنی:

$$y - ax + 4 = 0 \xrightarrow{A(2, -2)} -2 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

پس معادلهٔ خط به صورت $y - x + 4 = 0$ است و همچنین مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن برابر است با:

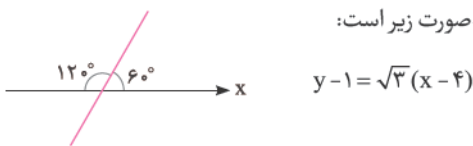
$$\begin{cases} \text{عرض از مبدأ: } x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ \text{طول از مبدأ: } y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow -4 + (4) = 0$$

تست آموزشی: عرض از مبدأ خطی که با جهت منفی محور x زاویهٔ 120° می‌سازد و از نقطهٔ $(4, 1)$ می‌گذرد، کدام است؟

- ۱ $4\sqrt{3} - 1$ ۲ $4\sqrt{3} + 1$ ۳ $-4\sqrt{3} + 1$ ۴ $-4\sqrt{3} - 1$

پاسخ گزینه ۳: وقتی یک خط با جهت منفی محور x زاویهٔ 120° می‌سازد، زاویه‌اش با جهت مثبت محور x 60° است و در نتیجه شیب این خط مساوی با

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ می‌باشد. از طرفی با توجه به این که این خط از نقطهٔ } (4, 1) \text{ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:}$$



در آخر برای پیدا کردن عرض از مبدأ این خط به جای x آن صفر می‌گذاریم، پس می‌توان نوشت:

$$x = 0: y - 1 = \sqrt{3}(0 - 4) \Rightarrow y = -4\sqrt{3} + 1$$

تست آموزشی: خطی که از نقطهٔ تقاطع دو خط $y = 2x + 3$ و $2y - x + 9 = 0$ و نقطهٔ $A(1, 1)$ می‌گذرد، با محورهای مختصات چه مساحتی ایجاد می‌کند؟

- ۱ $\frac{1}{24}$ ۲ $\frac{1}{6}$ ۳ $\frac{1}{12}$ ۴ $\frac{1}{8}$

پاسخ گزینه ۱: اول از همه نقطهٔ تلاقی دو خط داده شده را به کمک حل دستگاه دو معادله دو مجهول پیدا می‌کنیم، ببینید:

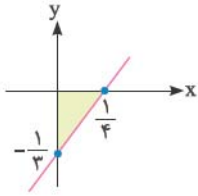
$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 2y - x = -9 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2y + 4x = -6 \\ 2y - x = -9 \end{cases} \Rightarrow 3x = -15 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow y = -7$$

در واقع نقطهٔ تلاقی این دو خط به صورت $B(-5, -7)$ است. حالا با توجه به این که خط مورد نظر از نقاط $A(1, 1)$ و $B(-5, -7)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به صورت زیر

$$m = \frac{-7 - 1}{-5 - 1} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \text{ معادلهٔ خط: } y - 1 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \text{ است:}$$



حالا برای پیدا کردن مساحتی که این خط با محورهای مختصات می‌سازد، نمودارش را می‌کشیم، ببینید:



$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} ; \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{4} \\ \hline y & -\frac{1}{3} \end{array}$$

در نتیجه مساحت مثلث ایجاد شده برابر با $S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ است.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۲۵ تا ۴۴

فرم کلی خط و وضعیت خطوط نسبت به هم



به طور کلی معادله هر خط به یکی از دو حالت $y = mx + h$ یا $ax + by + c = 0$ است که ویژگی‌های هر کدام را به طور مفصل بررسی می‌کنیم:

😊 **حالت اول** ($y = mx + h$): این فرم، استاندارد نامیده می‌شود. در این حالت m شیب خط و h عرض از مبدأ خط است. برای پیدا کردن طول از مبدأ y را صفر می‌گذاریم، یعنی $x = \frac{-h}{m}$.

😊 **حالت دوم** ($ax + by + c = 0$): این فرم، گسترده نامیده می‌شود. در این حالت، شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\left(\text{شیب} = -\frac{a}{b} \right), \left(\text{عرض از مبدأ} = -\frac{c}{b} \right), \left(\text{طول از مبدأ} = -\frac{c}{a} \right)$$

اصلاً توصیه نمی‌کنیم فرمول‌های گفته شده را حفظ کنید. فقط کافی است y را تنها کنید تا شیب و عرض از مبدأ پیدا شوند. همچنین برای طول از مبدأ هم به جای y ، صفر بگذارید، ببینید:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \xrightarrow{+b} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -\frac{a}{b} \\ \text{عرض از مبدأ} = -\frac{c}{b} \end{cases}$$

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} \xrightarrow{y=0} \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = 0 \Rightarrow \frac{-a}{b}x = \frac{c}{b} \Rightarrow x = \frac{-c}{a} \text{ (طول از مبدأ)}$$

وضعیت دو خط نسبت به هم

منظور از وضعیت دو خط نسبت به هم یکی از سه حالت موازی، عمود و منطبق بودن است. قبل از آوردن یک جدول مهم و همه ریزه‌کاری‌های مربوط به وضعیت دو خط، حواستان باشد که وقتی دو خط با هم موازی هستند، شیب‌هایشان برابر و وقتی که دو خط بر هم عمود هستند، شیب‌هایشان قرینه و معکوس هم است. این هم جدولی که قولش را داده بودیم ...

خطوط	فرم کلی	موازی بودن (غیرمنطبق)	عمود بودن	منطبق بودن
استاندارد	$y = mx + h$ و $y = m'x + h'$	$m = m'$ و $h \neq h'$	$m \times m' = -1$	$m = m'$ و $h = h'$
گسترده	$ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	$aa' + bb' = 0$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



برای مثال دو خط $2y + x + 1 = 0$ و $3y - 6x + 5 = 0$ بر هم عمودند، دلیلش را هم ببینید:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 & (a = 1, b = 2) \\ -6x + 3y + 5 = 0 & (a' = -6, b' = 3) \end{cases} \xrightarrow{aa' + bb' = 0} \text{ دو خط داده شده بر هم عمودند.}$$

البته اگر از این سوسول بازی‌ها رنج می‌برید، می‌توانید y ها را تنها کرده و شیب خطوط را پیدا کنید. مطمئن باشید که شیب‌های به دست آمده باید قرینه و معکوس هم باشند (هله؟).

مثال آموزشی به ازای چه مقداری از m ، دو خط $(m-3)x - (2-m)y = 4$ و $y = -x + 2$ موازی هستند؟

پاسخ شرط آن که دو خط داده شده موازی باشند این است که شیب‌هایشان برابر باشد. همچنین همگی می‌دانیم شیب خط $y = -x + 2$ ، مساوی -1 است، پس باید شیب خط دیگر هم -1 باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(m-3)x - (2-m)y - 4 = 0 \quad , \quad \text{شیب} = -\frac{m-3}{-(2-m)} = \frac{m-3}{2-m}$$

$$\text{برابری شیب‌ها} \quad \frac{m-3}{2-m} = -1 \Rightarrow m-3 = -2+m \quad \times$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هیچ‌وقت دو خط داده شده با هم موازی نمی‌شوند.

تست آموزشی به ازای کدام مقدار a ، دو خط $-y + (2a+1)x - 2 = 0$ و $(a+1)y = x + 3$ بر هم عمودند؟

$$\frac{-2}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{-3}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۴ شرط آن که دو خط در حالت گسترده $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ بر هم عمود باشند این است که $aa' + bb' = 0$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (2a+1)x - y - 2 = 0 \\ x - (a+1)y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2a+1)(1) + (-1)(-(a+1)) = 0 \Rightarrow 2a+1+a+1 = 0 \Rightarrow 3a+2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

البته می‌توانستیم برای حل این تست، y ها را تنها کرده و شیب هر یک از خطوط را پیدا کنیم. در آخر چون دو خط داده شده باید بر هم عمود باشند، حاصل ضربشان -1 است (رریفه؟).

تست آموزشی معادلهٔ خطی که عمود بر خط $y + 2x + 1 = 0$ بوده و عرض از مبدأ آن 3 برابر عرض از مبدأ این خط است، کدام می‌باشد؟

$$y = \frac{1}{3}x - 3 \quad \text{۴}$$

$$y = \frac{1}{3}x + 3 \quad \text{۳}$$

$$y = -2x + 3 \quad \text{۲}$$

$$y = -2x - 3 \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۴ شیب و عرض از مبدأ خط $y + 2x + 1 = 0$ به ترتیب -2 و -1 است. حالاً طبق فرض مسئله به دنبال پیدا کردن معادلهٔ خطی هستیم که شیبش $\frac{1}{3}$ و عرض از مبدأش 3 باشد، پس می‌توان نوشت:

$$m = \frac{1}{3}, A(0, -3); \text{ معادلهٔ خط: } y + 3 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 3$$

تست آموزشی رئوس مثلثی نقاط $A(3, 0)$ ، $B(1, 2)$ و $C(-2, 4)$ هستند. امتداد ارتفاع BH محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

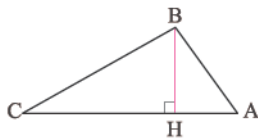
$$\frac{1}{5} \quad \text{۴}$$

$$\frac{-3}{5} \quad \text{۳}$$

$$\frac{-2}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{4}{5} \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۳ مطابق شکل زیر، چون ارتفاع BH بر ضلع AC عمود است، پس شیبش عکس و قرینهٔ آن می‌باشد، پس اول از همه شیب خط AC را پیدا کرده و سپس از روی آن، شیب BH و در نتیجه معادلهٔ آن را به دست می‌آوریم، ببینید:



$$m_{AC} = \frac{4-0}{-2-3} = -\frac{4}{5} \Rightarrow m_{BH} = \frac{5}{4}; \text{ معادلهٔ } BH: y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

در آخر برای آن که ببینیم امتداد ارتفاع BH محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند، به جای y آن صفر می‌گذاریم، پس داریم:

$$y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1) \xrightarrow{y=0} -2 = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{-3}{4} \Rightarrow x = \frac{-3}{5}$$

تست آموزشی سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: x + y = 0$ ، $AC: 2x - y = 4$ و $BC: -x + 2y = 1$ هستند. معادلهٔ ارتفاع CH کدام است؟

$$y = \frac{x}{3} + 1 \quad \text{۴}$$

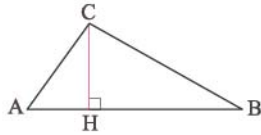
$$y = -x - 1 \quad \text{۳}$$

$$y = x + 1 \quad \text{۲}$$

$$y = x - 1 \quad \text{۱}$$



پاسخ گزینه ۱ مطابق شکل زیر ارتفاع CH بر خط AB عمود است، پس با توجه به این که $m_{AB} = -1$ است، پس $m_{CH} = 1$ می باشد. از طرفی نقطه C محل برخورد دو خط AC و BC است، پس با حل دستگاه شامل این دو معادله، مختصات نقطه C هم به دست می آید، ببینید:



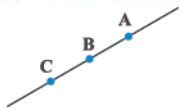
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3$$

در نتیجه مختصات نقطه C به صورت $C(3, 2)$ می باشد و معادله ارتفاع CH برابر است با:

$$m_{CH} = 1, C(3, 2); \text{ معادله } CH: y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$$



شرط آن که سه نقطه A، B و C روی یک خط (در یک راستا یا در یک امتداد) باشند، این است که:



$$m_{AB} = m_{BC}$$

تست آموزشی اگر سه نقطه $A(m, 4)$ ، $B(1, 0)$ و $C(1-m, 1)$ در یک امتداد باشند، m کدام است؟

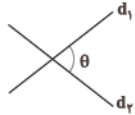
۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $-\frac{1}{5}$

پاسخ گزینه ۱ شرط آن که سه نقطه A، B و C در یک امتداد باشند آن است که $m_{AB} = m_{BC}$ ، پس می توان نوشت:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{4-0}{m-1} = \frac{4}{m-1} \\ m_{BC} = \frac{1-0}{1-m-1} = \frac{1}{-m} \end{cases} \xrightarrow{m_{AB}=m_{BC}} \frac{4}{m-1} = \frac{1}{-m} \Rightarrow -4m = m-1 \Rightarrow 5m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{5}$$



اگر شیب دو خط d_1 و d_2 به ترتیب m_1 و m_2 باشد، تانژانت زاویه بین این دو خط از رابطه زیر به دست می آید:



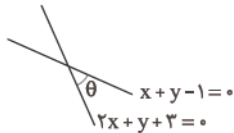
$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

تست آموزشی تانژانت زاویه ای که دو خط $x + y - 1 = 0$ و $2x + y + 3 = 0$ با هم می سازند، چند است؟

۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{5}$

پاسخ گزینه ۲ اول از همه شیب دو خط داده شده را محاسبه می کنیم و سپس برای پیدا کردن تانژانت زاویه ای که این دو خط با هم می سازند، سراغ فرمول

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \text{ می رویم، ببینید:}$$



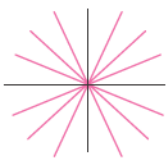
$$x + y - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -1, 2x + y + 3 = 0 \Rightarrow m_2 = -2$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-1 - (-2)}{1 + (-1)(-2)} \right| = \frac{1}{3}$$



دسته خطوط: وقتی در معادله یک خط به جز x و y یک پارامتر دیگر هم وجود داشته باشد، در اصطلاح به آن دسته خطوط می گوئیم.

برای مثال $y = mx$ معادله یک دسته خطوط است. ویژگی جالب دسته خطوط این است که همگی از یک نقطه ثابت می گذرند، ببینید:



همچنین بدانید که برای پیدا کردن این نقطه ثابت، به m دو عدد دلخواه می دهیم تا به صورت زنده دو تا از خط ها به دست آیند.

حالا دو خط به دست آمده را در یک دستگاه معادلات قرار می دهیم تا مختصات نقطه ثابت دسته خطوط پیدا شود.



تست آموزشی خطی از دسته خطوط $y - 2x = 4$ با خط $2kx + (k+1)y - 1 = 0$ موازی است. طول از مبدأ این خط کدام است؟

$$\frac{-1}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$-1 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۲ شیب خط $y = 2x + 4$ مساوی ۲ است و چون خطی از دسته خطوط $2kx + (k+1)y - 1 = 0$ با خط $y = 2x + 4$ موازی است، پس شیب هایشان با هم برابر می‌باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$2kx + (k+1)y - 1 = 0 \text{ شیب} = \frac{-2k}{k+1} \xrightarrow{\text{موازی با خط } y=2x+4} \frac{-2k}{k+1} = 2 \Rightarrow -2k = 2k + 2 \Rightarrow 4k = -2 \Rightarrow k = \frac{-1}{2}$$

در نتیجه خط مورد نظر $2\left(\frac{-1}{2}\right)x + \left(\frac{-1}{2} + 1\right)y - 1 = 0$ یا $-x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ می‌باشد که طول از مبدأ آن برابر است با:

$$-x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \xrightarrow{y=0} -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

از اینجا به بعد وارد مباحث اصلی کتاب نهم در بخش هندسه تحلیلی می‌شویم. آماره‌ایر؟

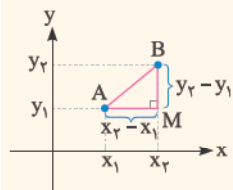
تست‌های مربوط به این درسامه: ۳۵ تا ۵۵

فاصله دو نقطه



برای پیدا کردن فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



فرمول گفته شده، دقیقاً از دل قضیه فیثاغورس آمده است. اثباتش را هم ببینید:

قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AMB :

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

برای مثال فاصله دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(0, 3)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

علاقه‌مندان به فرمول می‌توانند در حالت‌های خاص زیر، از فرمول‌های گفته شده در این نکته استفاده کنند:



$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

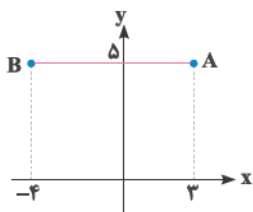
۱) فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$AB = |x_2 - x_1|$$

۲) فاصله دو نقطه هم‌عرض $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_1)$ برابر است با:

$$AB = |y_2 - y_1|$$

۳) فاصله دو نقطه هم‌طول $A(x_1, y_1)$ و $B(x_1, y_2)$ برابر است با:



برای مثال فاصله دو نقطه $A(3, 5)$ و $B(-4, 5)$ برابر $AB = |-4 - 3| = 7$ است.

این هم شکلی که از روی آن به راحتی دیده می‌شود که فاصله این دو نقطه برابر ۷ است.

تست آموزشی اگر نقاط $A(2, 4)$ ، $B(5, 0)$ و $C(-2, 1)$ رئوس یک مثلث باشند، نوع این مثلث کدام است؟

۴ مختلف‌الاضلاع

۳ متساوی‌الساقین

۲ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۱ قائم‌الزاویه

پاسخ گزینه ۲ به کمک فرمول فاصله دو نقطه، اندازه اضلاع AB ، AC و BC را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$AB = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$



با توجه به این که اضلاع AB و AC برابر هستند، پس مثلث حتماً متساوی الساقین است. از طرفی چون در بین گزینه‌ها هم متساوی الساقین و هم قائم الزاویه متساوی الساقین وجود دارد باید مطمئن شویم که آیا این مثلث قائم الزاویه است یا نه؟ کسی هست که ندونه اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، حتماً قضیه فیثاغورس در آن صریح می‌کند؟

$$BC = \sqrt{50}, AB = 5, AC = 5; BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (\sqrt{50})^2 = (5)^2 + (5)^2 \Rightarrow 50 = 50 \checkmark$$

اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورس صدق می‌کنند، در نتیجه این مثلث علاوه بر آن که متساوی الساقین است، قائم الزاویه هم می‌باشد.

حالا نوبت یک تست فوقی مهم و متفاوت

تست آموزشی نقطه A در ناحیه سوم روی خط $y = 3x$ قرار دارد. اگر فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر $\sqrt{10}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه

A کدام است؟

- ۱ -۶ ۲ -۴ ۳ -۸ ۴ -۱۰

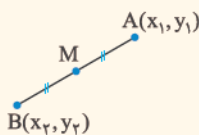
پاسخ گزینه ۲ مختصات هر نقطه روی خط $y = 3x$ به صورت $A(\alpha, 3\alpha)$ است. (آه y برابر ۳ برابر x باشد دیگره). از طرفی طبق فرض مسئله $OA = \sqrt{10}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$OA = \sqrt{(\alpha)^2 + (3\alpha)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{10} \alpha^2 = \sqrt{10} \Rightarrow 10\alpha^2 = 10 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} A(1, 3) \times \\ A(-1, -3) \checkmark \end{cases}$$

توجه داشته باشید که نقطه A در ناحیه سوم می‌باشد، پس مختصات طول و عرض حتماً منفی است. در نهایت مجموع طول و عرض نقطه A برابر $-1 + (-3) = -4$ می‌باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۵۶ تا ۷۴

مختصات وسط پاره خط



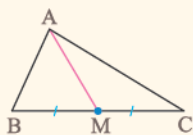
نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو سر پاره خط AB هستند. نقطه وسط این پاره خط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AB \text{ مختصات وسط پاره خط } M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

تذکر: مهم‌ترین کاربرد فرمول مختصات وسط پاره خط برای محاسبه میانه و عمود منصف می‌باشد.

مثال آموزشی در مثلث ABC با رئوس $A(2, -3)$ ، $B(0, 4)$ و $C(-2, 2)$ ، اندازه میانه وارد بر ضلع BC چند واحد است؟

پاسخ مطابق شکل زیر، برای پیدا کردن اندازه میانه وارد بر ضلع BC ، یعنی پاره خط AM ابتدا مختصات نقطه M که وسط پاره خط BC است را پیدا می‌کنیم، پس داریم:



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 3)$$

حالا با داشتن دو نقطه $A(2, -3)$ و $M(-1, 3)$ اندازه پاره خط AM را به راحتی پیدا می‌کنیم، ببینید:

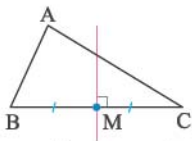
$$AM = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

تست آموزشی در مثلثی با رئوس $A(2, 1)$ ، $B(0, 2)$ و $C(4, 4)$ ، معادله عمود منصف ضلع BC کدام است؟

- ۱ $y = 2x + 1$ ۲ $y = 2x + 7$ ۳ $y = -2x + 1$ ۴ $y = -2x + 7$

پاسخ گزینه ۴ عمود منصف ضلع BC خطی است که از وسط پاره خط BC می‌گذرد و همچنین بر آن عمود می‌باشد، پس اول از همه باید مختصات نقطه وسط ضلع BC و همچنین شیب پاره خط BC را به دست آوریم، داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(2, 3), m_{BC} = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



همچنین می‌دانیم که شیب عمودمنصف، عکس و قرینه $m_{BC} = \frac{1}{4}$ است، پس شیب عمودمنصف -2 می‌باشد. در آخر با داشتن نقطه $M(2, 3)$ و اینکه شیب عمودمنصف برابر -2 است، معادلهٔ عمودمنصف را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$M(2, 3), m = -2 \Rightarrow \text{معادلهٔ عمود منصف: } y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 7$$

تست آموزشی اگر اضلاع مثلث ABC به صورت $AB: 2x + y = 3$ ، $AC: 3x - y = 2$ و $BC: x + y = 1$ باشند، عرض نقطه برخورد میانه BM

و خط $x = 1$ کدام نقطه است؟

۵/۹

۲/۹

۱/۳

۴/۹

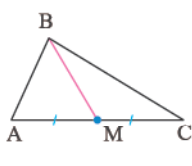
پاسخ‌گزینیه ۱ دوجه دوی اضلاع را در دستگاه دو معادله دو مجهول قرار می‌دهیم تا مختصات نقاط A ، B و C پیدا شوند، پس داریم:

$$AB \begin{cases} 2x + y = 3 \\ AC \begin{cases} 3x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \Delta \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1; A(1, 1)$$

$$AB \begin{cases} 2x + y = 3 \\ BC \begin{cases} x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1; B(2, -1)$$

$$AC \begin{cases} 3x - y = 2 \\ BC \begin{cases} x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}; C(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$$

از طرفی مطابق شکل مقابل، نقطه M وسط ضلع AC است، پس داریم:



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{8} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{7}{8}, \frac{5}{8})$$

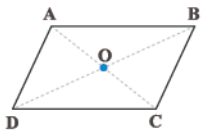
حالا باید معادله خط BM را پیدا کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$m_{BM} = \frac{\frac{5}{8} - (-1)}{\frac{7}{8} - 2} = \frac{\frac{13}{8}}{\frac{-9}{8}} = \frac{13}{-9} = -\frac{13}{9}, \text{ معادلهٔ خط } BM: y + 1 = -\frac{13}{9}(x - 2)$$

در آخر برای پیدا کردن نقطه تلاقی دو خط BM و $x = 1$ ، به جای x عدد 1 می‌گذاریم که جوابش $y = \frac{4}{9}$ می‌شود.

نکته

متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که ضلع‌های روبه‌رویش با هم موازی و مساوی باشند. در متوازی‌الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی مطابق شکل مقابل، نقطه O وسط دو پاره خط AC و BD است، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_C}{2} \\ x_O = \frac{x_B + x_D}{2} \end{cases} \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D, \quad \begin{cases} y_O = \frac{y_A + y_C}{2} \\ y_O = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$

فقط حواستان باشد که رابطه گفته‌شده، برای رأس‌های روبه‌روی هم است. مثلاً در شکل تساوی‌های گفته‌شده به $x_A + x_B = x_C + x_D$ و $y_A + y_B = y_C + y_D$ تبدیل می‌شوند.

تذکره: مستطیل، لوزی و مربع همگی حالت‌های خاص متوازی‌الاضلاع هستند، پس رابطه گفته‌شده برای همگی آن‌ها برقرار است.

تست آموزشی نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, -1)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. اگر نقطه D روی خط $y + ax = -10$ باشد، a کدام است؟

-۳

-۲

-۶

-۵

پاسخ‌گزینیه ۴ نقاط A ، B ، C و D رئوس مستطیل $ABCD$ هستند، پس برای پیدا کردن مختصات طول و عرض D می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 1 = -1 + x_D \Rightarrow x_D = 4 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 3 + (-2) = -1 + y_D \Rightarrow y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D(4, 2)$$

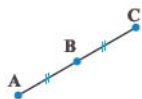


از طرفی نقطه $D(4,2)$ روی خط $y + ax = -1$ قرار دارد، پس مختصات طول و عرض آن روی این خط صدق می‌کند، داریم:

$$y + ax = -1 \xrightarrow[\text{قرار دارد}]{\text{روی خط } D(4,2)} 2 + 4a = -1 \Rightarrow a = -3$$

نکته

قرینه نقطه نسبت به نقطه: قرینه نقطه $A(x_A, y_A)$ نسبت به نقطه $B(x_B, y_B)$ را نقطه $C(x_C, y_C)$ می‌نامیم. مطابق شکل زیر به وضوح دیده می‌شود که نقطه B دقیقاً وسط دو نقطه A و C است، پس می‌توان نوشت:



$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$$

تست آموزشی

قرینه نقطه $A(2, -3)$ نسبت به نقطه $B(4, 0)$ نقطه $C(a, b)$ است، مقدار $a + b$ کدام است؟

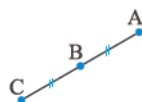
۹

۶

۳

۲

پاسخ گزینه ۴: مطابق شکل زیر، قرینه نقطه A نسبت به B ، نقطه C می‌شود، وقتی که نقطه B دقیقاً وسط A و C است، پس می‌توان نوشت:

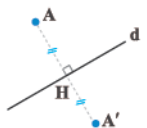


$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + x_C}{2} \Rightarrow 8 = 2 + x_C \Rightarrow x_C = 6 \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-3 + y_C}{2} \Rightarrow 0 = -3 + y_C \Rightarrow y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(6, 3)$$

پس طبق فرض مسئله، چون $C(a, b)$ است، متوجه می‌شویم که $a = 6$ ، $b = 3$ و در نتیجه $a + b = 9$ است.

نکته

قرینه نقطه نسبت به خط: برای پیدا کردن مختصات قرینه نقطه A نسبت به خط d ، یعنی نقطه A' ، اول از همه باید معادله خط عمود بر d که گذرنده از نقطه A است را بنویسیم و سپس با قرار دادن این دو معادله در یک دستگاه، نقطه برخورد این دو خط را پیدا کنیم (نقطه H). حالا مطابق شکل زیر متوجه می‌شویم که نقطه H دقیقاً وسط A و A' است، پس می‌توان نوشت:



$$x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_H - x_A$$

$$y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_H - y_A$$

تست آموزشی

قرینه نقطه $A(2, 4)$ نسبت به خط $y + x = 2$ نقطه $A'(\alpha, \beta)$ است. مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

-۴

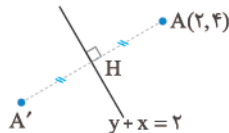
صفر

۲

-۲

پاسخ گزینه ۱: برای پیدا کردن قرینه نقطه $A(2, 4)$ نسبت به خط $y + x = 2$ اول معادله خط گذرنده از نقطه A که عمود

بر خط $y + x = 2$ است را می‌نویسیم، ببینید:



$$y + x = 2 \Rightarrow \text{شیب} = -1 \Rightarrow m_{\text{خط عمود}} = 1; A(2, 4)$$

$$\text{معادله خط عمود: } y - 4 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 2$$

حالا برای پیدا کردن نقطه H دو خط $y + x = 2$ و $y = x + 2$ را در یک دستگاه قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow H(0, 2)$$

از طرفی برای پیدا کردن نقطه A' با توجه به آن که H دقیقاً وسط A و A' است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow 0 = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{A'} = 0 \Rightarrow x_{A'} = -2 \\ y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{4 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 4 = 4 + y_{A'} \Rightarrow y_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, 0)$$

در نتیجه $\alpha = -2$ ، $\beta = 0$ و در آخر $\alpha + \beta = -2$ می‌باشد.

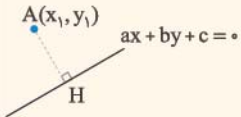


تست‌های مربوط به این درسنامه: ۷۵ تا ۹۵

فاصلهٔ نقطه از خط

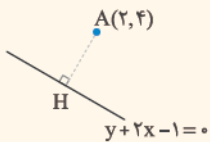


اول این‌که در ریاضی منظور از فاصله، کوتاه‌ترین فاصله است و می‌دانیم کوتاه‌ترین فاصله به صورت عمود اتفاق می‌افتد. در اینجا می‌خواهیم فاصلهٔ نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط $ax + by + c = 0$ را پیدا کنیم. مطابق شکل مقابل، این فاصله برابر AH است و از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

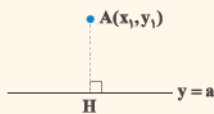
در واقع مختصات طول و عرض نقطه A را به جای x و y در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم و سپس از آن قدر مطلق می‌گیریم، در آخر عدد به دست آمده را بر $\sqrt{a^2 + b^2}$ تقسیم می‌کنیم. حواستان باشد که برای استفاده کردن از فرمول گفته شده باید همهٔ جملات معادلهٔ خط را به یک طرف تساوی ببریم (معادلهٔ گسترده)، مانند خط $2x + y + 1 = 0$ نه مثل خط $x + y = 1$.



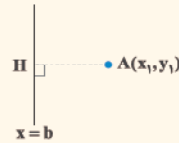
$$AH = \frac{|4 + 2(2) - 1|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

برای مثال فاصلهٔ نقطه $A(2, 4)$ از خط $y + 2x - 1 = 0$ برابر است با:

تذکر: دقت کنید که برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط‌های عمودی و افقی نیازی به استفاده از فرمول قبلی نیست و به راحتی از روی شکل محاسبه می‌شود، ببینید:

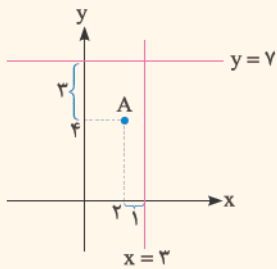


$$AH = |y_1 - a|$$



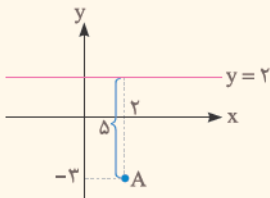
$$AH = |x_1 - b|$$

برای مثال فاصلهٔ نقطه $A(2, 4)$ از خط عمودی $x = 3$ برابر ۱ و از خط افقی $y = 7$ برابر ۳ می‌باشد. شکلش را هم ببینید:



مثال آموزشی فاصلهٔ نقطه $A(2, -3)$ را از دو خط $x + y = 1$ و $y = 2$ پیدا کرده و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ فاصلهٔ نقطه $A(2, -3)$ از خط $y = 2$ برابر $|-3 - 2| = 5$ است. دلیلش را هم از روی شکل مقابل ببینید:



حالا برای پیدا کردن فاصلهٔ نقطه $A(2, -3)$ از خط $x + y - 1 = 0$ به کمک فرمول گفته شده داریم:

$$AH = \frac{|2 + (-3) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

به وضوح فاصلهٔ نقطه $A(2, -3)$ از خط $y = 2$ بیش‌تر از فاصلهٔ آن تا خط $x + y = 1$ می‌باشد.

تست آموزشی اگر فاصلهٔ نقطه $A(1, 2)$ از خط $x + 2y = k$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد، مجموع مقادیر به دست آمده برای k کدام است؟

۲۰ ۴

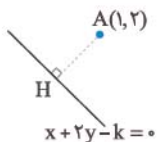
-۲۰ ۳

۱۰ ۲

-۱۰ ۱



پاسخ گزینه ۲ اول خط را به صورت گسترده، یعنی $x + 2y - k = 0$ می نویسیم. حالا با کمک گرفتن از فرمول فاصله نقطه از خط می توان نوشت:



$$AH = \frac{|1 + 2(2) - k|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|5 - k|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |5 - k| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 5 - k = 10 \Rightarrow k = -5 \\ 5 - k = -10 \Rightarrow k = 15 \end{cases}$$

در نتیجه مجموعه مقادیر به دست آمده برای k برابر $15 + (-5) = 10$ است.

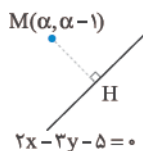
به تست فوق العاده مهم از گنگورهای قدیم...

تست آموزشی دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو

نقطه کدام است؟

- ۱ ۹ و ۱۵ ۲ ۱۱ و ۱۵ ۳ ۹ و ۱۱ ۴ ۱۵ و ۱۱

پاسخ گزینه ۲ هر نقطه روی خط $y = x - 1$ به شکل $M(\alpha, \alpha - 1)$ است. حالا به کمک فرمول فاصله نقطه از خط می توان نوشت:

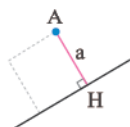


$$MH = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|2\alpha - 3\alpha + 3 - 5|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |-\alpha - 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2 = 13 \Rightarrow \alpha = -15 \\ -\alpha - 2 = -13 \Rightarrow \alpha = 11 \end{cases}$$

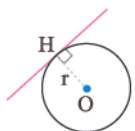


در این جا هم چند تا از حالت های پر کاربرد فاصله نقطه از خط را با هم یاد می گیریم:



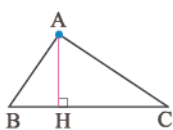
حالت اول (محاسبه طول ضلع مربع): در این حالت معادله یک خط داده می شود که یکی از ضلع های مربع روی آن قرار دارد.

هم چنین یک نقطه غیر واقع بر این خط داده می شود. حالا با پیدا کردن فاصله نقطه از این خط، طول ضلع مربع پیدا می شود که الان به راحتی محیط، مساحت و ... مربع را می توانیم پیدا کنیم (این مدل تست ها با کمی تغییر درباره مستطیل هم مطرح می شود).



حالت دوم (محاسبه شعاع دایره با داشتن مرکز و خط مماس بر دایره): حرف قاضی نراریم. مطابق شکل مقابل، فاصله مرکز دایره تا خط

مماس بر دایره همان شعاع دایره است.



حالت سوم (محاسبه ارتفاع مثلث): در این حالت یکی از ضلع های مثلث و یک رأس آن که خارج از آن ضلع است، داده می شود

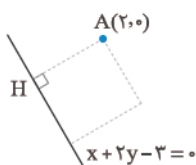
که در این صورت فاصله رأس داده شده از خط، همان ارتفاع مثلث است. این شکل را ببینید:

این هم دو تست دیگر در مورد فاصله نقطه از خط ...

تست آموزشی یکی از ضلع های مربعی روی خط $x + 2y = 3$ قرار دارد. اگر نقطه $A(2, 0)$ یکی از رأس های این مربع باشد، محیط مربع کدام است؟

- ۱ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۲ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳ $4\sqrt{5}$ ۴ $2\sqrt{5}$

پاسخ گزینه ۱ شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



نقطه A روی خط داده شده قرار ندارد، پس همان طور که از روی شکل مشاهده می شود، فاصله نقطه A تا خط داده شده همان ضلع مربع است، پس داریم:

$$AH = \frac{|2 + 2(0) - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

در نهایت محیط مربع برابر $4AH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ است.



تست آموزشی خط $y = x + 1$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ مماس است. اگر معادلهٔ قطر دایره به صورت خط $y = -2x + 3$ باشد، مجموع طول و عرض مرکز دایره کدام است؟

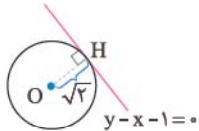
۴۴

۲۳

۳۲

۱۱

پاسخ گزینه ۲ مطابق شکل، خط $y = x + 1$ بر دایره مماس است. از طرفی معادلهٔ قطر دایره برابر $y = -2x + 3$ می‌باشد. بنابراین چون مرکز دایره بر روی قطر دایره است، پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha, -2\alpha + 3)$ می‌باشد. حالا باید فاصلهٔ مرکز دایره را از خط $y - x - 1 = 0$ برحسب مجهول α به دست آوریم و برابر $\sqrt{2}$ قرار دهیم، پس داریم:



$$OH = \frac{|-2\alpha + 3 - \alpha - 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |-3\alpha + 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 0 \\ -3\alpha + 2 = -2 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \end{cases}$$

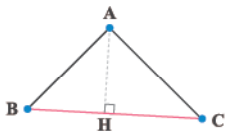
حالا با جای‌گذاری طول‌های به دست آمده در معادلهٔ $y = -2x + 3$ ، مرکز دایره به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$y = -2x + 3 \xrightarrow{\alpha = 0, \frac{4}{3}} \begin{cases} O(0, 3) \\ O(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

در واقع دو دایره با این شرایط داریم که مجموع طول و عرض مرکز این دایره‌ها $3 = 3 + 0$ یا $\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ می‌باشد و با توجه به گزینه‌ها پاسخ درست گزینه «۲» است.

نکته

مساحت مثلث: احتمالاً خیلی منتظر روش پیدا کردن مساحت مثلث دلخواه ABC با داشتن سه رأس A، B و C بودید. دو روش برای پیدا کردن مساحت خدمتان عرض می‌کنیم:



روش اول: برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را پیدا می‌کنیم. این فاصله همان قاعدهٔ مثلث است.

۲) با داشتن دو نقطهٔ B و C معادلهٔ خط BC را پیدا می‌کنیم.

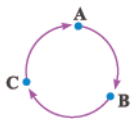
۳) به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC را به دست می‌آوریم که این فاصله همان ارتفاع مثلث می‌باشد.

۴) در آخر مساحت مثلث برابر $\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$ است.

روش دوم: اگر $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

برای این‌که فرمول بالا را فراموش نکنید، چرخهٔ مقابل را به خاطرتان بیاورید:



تست آموزشی مساحت مثلث ABC با رئوس $A(1, 2)$ ، $B(4, 6)$ و $C(0, 3)$ کدام است؟

۴/۵

۴۳

۳/۵

۳۱

پاسخ گزینه ۲ **روش اول:** با توجه به شکل مقابل ابتدا اندازهٔ ضلع BC را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

حالا با داشتن دو نقطهٔ B و C، شیب BC و سپس معادلهٔ آن را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$m_{BC} = \frac{6-3}{4-0} = \frac{3}{4}; \text{ معادلهٔ خط BC: } y-3 = \frac{3}{4}(x-0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 3$$



اکنون فاصلهٔ نقطهٔ $A(1, 2)$ را از خط $y - \frac{3}{4}x - 3 = 0$ پیدا می‌کنیم که این همان ارتفاع مثلث است، پس می‌توان نوشت:

$$AH = \frac{|2 - \frac{3}{4} - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-\frac{3}{4})^2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1$$

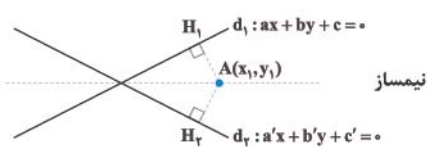
$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

در نهایت مساحت مثلث ABC برابر است با:



روش دوم: به کمک فرمول گفته شده در درسنامه، مساحت مثلث ABC با سه رأس A، B، C را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{1}{2} |1(6 - 3) + 4(3 - 2) + 0(2 - 6)| = \frac{1}{2} |3 + 4 + 0| = \frac{7}{2} = 3.5$$



نیمساز: نیمساز دو خط، مجموعه نقاطی هستند که فاصله‌شان از دو خط برابر باشد. به بیانی دیگر اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو خط یکسان است. پس با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:

$$AH_1 = AH_2 \Rightarrow \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x_1 + b'y_1 + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

تست آموزشی نقطه با کدام عرض روی نیمساز ناحیه اول، از دو خط $y - 2x + 2 = 0$ و $2y + x + 3 = 0$ به یک فاصله قرار دارد؟

۴ امکان ناپذیر

۳ $\frac{3}{4}$

۲ $\frac{5}{2}$

۱ $\frac{1}{4}$

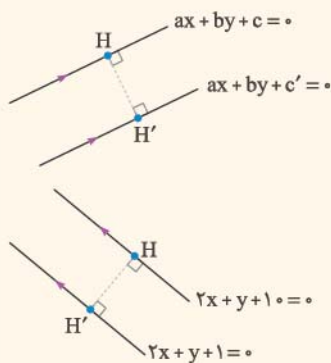
پاسخ گزینه ۴ مختصات هر نقطه روی نیمساز ناحیه اول به صورت $M(\alpha, \alpha)$ است. حالا برای این‌که این نقطه از دو خط داده شده به یک فاصله باشد، می‌توان نوشت:

$$MH_1 = MH_2 \Rightarrow \frac{|2\alpha + \alpha + 3|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{|\alpha - 2\alpha + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2}} \Rightarrow |3\alpha + 3| = |-\alpha + 2| \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3 = -\alpha + 2 \Rightarrow 4\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow M(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \\ 3\alpha + 3 = \alpha - 2 \Rightarrow 2\alpha = -5 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow M(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}) \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقاط به دست آمده در ناحیه سوم هستند. در واقع هیچ نقطه‌ای در نیمساز ناحیه اول حضور ندارد که فاصله‌اش از دو خط $y - 2x + 2 = 0$ و $2y + x + 3 = 0$ یکسان باشد.

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۹۴ تا ۱۰۷

فاصله دو خط موازی



وقتی اسم فاصله دو خط می‌آید مطمئن باشید که حتماً دو خط با هم موازی هستند، یعنی شیب‌هایشان برابر است. دو خط موازی را به صورت $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که چون دو خط موازی هستند، پس باید شیب‌هایشان برابر باشد، برای همین در هر دو معادله، عبارت $ax + by$ وجود دارد (قبوله؟). فاصله دو خط موازی گفته شده از فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای مثال فاصله دو خط موازی $2x + y + 1 = 0$ و $2x + y + 10 = 0$ برابر است با:

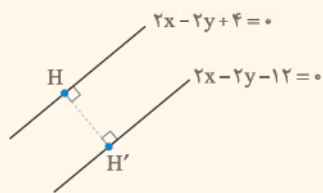
$$HH' = \frac{|10 - 1|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

تذکر: گاهی وقت‌ها فاصله دو خط موازی پرسیده می‌شود که در آن‌ها ضرایب x و y دو معادله برابر نیستند. در این مواقع قبل از هر کاری با تقسیم و یا ضرب کردن یکی از

معادله‌ها در عددی، ضرایب را یکسان کنید و سپس سراغ فرمول $HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بروید.

مثال آموزشی فاصله دو خط موازی $y = x + 2$ و $-2y + 2x = 12$ چند است؟

پاسخ معادله‌ها در حالت گسترده به صورت $y - x - 2 = 0$ و $2x - 2y - 12 = 0$ هستند که به وضوح شیب‌های هر دوی آن‌ها برابر است و دو خط موازی هستند. حالا برای محاسبه فاصله این دو خط موازی، اول باید ضرایب x و y آن‌ها را یکسان کنیم و سپس سراغ فرمول گفته شده برویم، پس می‌توان نوشت:



$$y - x - 2 = 0 \xrightarrow{\times(-2)} 2x - 2y - 4 = 0, \quad 2x - 2y - 12 = 0$$

$$HH' = \frac{|4 - (-12)|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{8}} = \frac{16}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}$$



تست آموزشی دو ضلع مربعی بر خطوط $y = \frac{x}{4} + 1$ و $2y - x = 5$ قرار دارند. محیط مربع کدام است؟

۳√۵ ۴

$\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۳

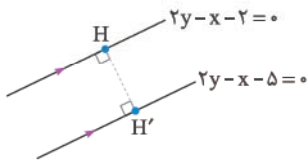
$\frac{12}{\sqrt{5}}$ ۲

۱۲√۵ ۱

پاسخ گزینه ۲ اول از همه شیب دو خط داده شده را پیدا می‌کنیم:

$$2y - x - 5 = 0; m = \frac{-(-1)}{1} = \frac{1}{1}, y = \frac{x}{4} + 1; m = \frac{1}{4}$$

شیب دو خط داده شده برابر است، در نتیجه خطوط با هم موازی‌اند، پس فاصلهٔ این دو خط موازی برابر طول ضلع مربع است. برای استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی ابتدا باید ضرایب x و y دو معادله را یکسان کنیم، پس می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} 2y - x - 5 = 0 \\ y - \frac{x}{4} - 1 = 0 \times 2 \rightarrow 2y - x - 2 = 0 \end{cases}$$

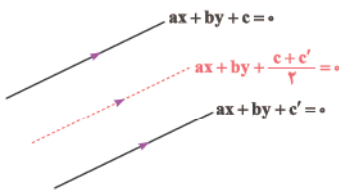
$$HH' = \frac{|-2 - (-5)|}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = 4a = 4\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

در نهایت محیط مربع برابر است با:



معادلهٔ خطی که دقیقاً وسط دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ می‌باشد برابر است با:



$$ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0 \quad (\text{همون میانگین فورمونه})$$

دقت کنید که این خط هم موازی دو خط داده شده است.

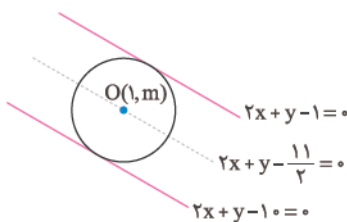
تست آموزشی دو خط $2x + y = 10$ و $2x = -y + 1$ بر دایره‌ای مماس‌اند. اگر مرکز دایره نقطهٔ $O(1, m)$ باشد، m کدام است؟

$\frac{7}{2}$ ۴

$\frac{5}{2}$ ۳

$\frac{3}{2}$ ۲

$\frac{9}{2}$ ۱



پاسخ گزینه ۴ با توجه به این‌که شیب دو خط داده شده با هم برابر است، مطابق شکل مقابل مرکز دایره حتماً

روی خط میانی خط‌های مماس بر دایره قرار می‌گیرد؛ یعنی $O(1, m)$ روی خط $2x + y + \frac{-10 - (-11/2)}{2} = 0$ یا همان

$2x + y - \frac{11}{2} = 0$ قرار دارد و درون آن صدق می‌کند، پس داریم:

$$2x + y - \frac{11}{2} = 0 \xrightarrow{\text{روی خط است } O(1, m)} 2(1) + m - \frac{11}{2} = 0 \Rightarrow m = \frac{11}{2} - 2 = \frac{7}{2}$$

یادداشت:



تست‌های درس اول



مفاهیم اولیه نقطه

۱ اگر نقطه‌ای روی محور x ها و $B(2\alpha - 1, 3\beta)$ نقطه‌ای روی محور y ها باشد، $5\alpha + \beta$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۲ اگر $A(1, 3)$ و $B(2a, 2a^2 + a)$ دو نقطه هم‌عرض باشند و این دو نقطه در یک ناحیه مختصاتی نباشند، $|a|$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ ۴ ۵

۳ اگر $A(\frac{2m-3}{m+1}, 2m-m^2)$ نقطه‌ای در ناحیه دوم محورهای مختصات باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- ۱ $0 < m < 2$ ۲ $-1 < m < 2$ ۳ $0 < m < \frac{3}{2}$ ۴ $-1 < m < \frac{3}{2}$

مفاهیم اولیه خط

۴ به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $(m+2)y - mx = 8$ از نقطه $A(-1, 1)$ می‌گذرد؟

- ۱ ۵ ۲ -۵ ۳ ۳ ۴ -۳

۵ نقطه‌ای روی خط به معادله $2x + 3y = 5(1-x)$ قرار دارد که عرض آن از قرینه طول آن ۱ واحد کم‌تر است. طول این نقطه کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۳ -۳ ۴ ۴

۶ اگر نقطه $M(2\alpha + \frac{5}{\sqrt{3}}, \alpha^2)$ پایین خط $y = 2x$ باشد، α چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

- ۱ ۷ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۵

۷ معادله خط گذرنده از نقاط $A(2, 5)$ و $B(2, -3)$ به صورت $x + m = 0$ و معادله خط گذرنده از نقاط $C(1, -4)$ و $D(-1, -4)$ به صورت $y + n = 0$ می‌باشد.

کدام $m + n$ است؟

- ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۴ -۴ ۴ ۴

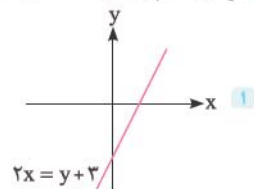
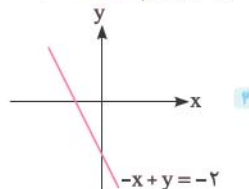
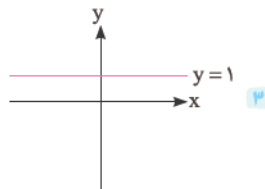
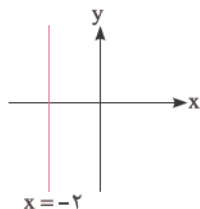
۸ خط به معادله $mx + (2+m)y + x = 2m$ موازی محور x ها است. این خط محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۱ ۴ -۱

۹ دو نقطه $A(6, 1)$ و $B(a^2 + a, a)$ بر روی خطی موازی محور y ها قرار دارند. اگر نقطه B در ناحیه چهارم محورهای مختصات باشد، a^2 کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۴ ۳ ۹ ۴ ۱۶

(برگرفته از کتاب درسی)

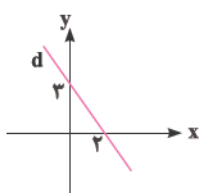


۱۰ نمودار کدام یک از خط‌های داده شده درست رسم نشده است؟

۱۱ شیب خط گذرنده از نقاط $A(2, -3)$ و $B(-1, 0)$ با شیب خط گذرنده از کدام دو نقطه داده شده برابر است؟

- ۱ $D(0, 1), C(-2, -2)$ ۲ $D(4, 5), C(-5, -4)$ ۳ $D(-4, 5), C(5, -4)$ ۴ $D(0, -1), C(2, 2)$

۱۲ نمودار خط d به صورت مقابل رسم شده است. کدام یک از نقاط داده شده روی این خط قرار دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



- ۱ $(-2, 5)$

- ۲ $(-2, 4)$

- ۳ $(4, -3)$

- ۴ $(4, -5)$



(برگرفته از کتاب درسی)

۱۳ خط گذرنده از نقاط $A(2, 7)$ و $B(-1, 1)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

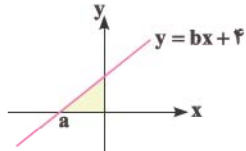
- ۱/۵ ۱ ۲ ۲ ۳ -۱/۵ ۴ -۲

۱۴ خطی که از نقاط $A(-3, 1-m)$ و $B(m-1, m+5)$ می‌گذرد، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. مساحت ناحیهٔ محدود به این خط و محورهای مختصات کدام است؟

- ۴/۵ ۱ ۹ ۲ ۱۵ ۳ ۱۸ ۴

۱۵ در شکل مقابل اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر ۱۲ باشد، a کدام است؟

- ۲ ۱ -۳ ۲ -۴ ۳ -۶ ۴



۱۶ خطی که از نقطهٔ $A(2, -5)$ عبور می‌کند و شیب آن ۲ برابر عرض از مبدأ آن است، از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم

۱۷ خط گذرنده از نقاط $A(m, 2m+2)$ و $B(-m, 5m+1)$ با جهت منفی محور x ها زاویهٔ 45° می‌سازد. m کدام است؟

- ۱ ۱ ۱ ۲ -۱/۵ ۳ ۱/۵ ۴

۱۸ مجموع طول و عرض نقطهٔ تلاقی دو خط $y = 2x - 5$ و $2y + x = 5$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۹ دو خط $ax + 3y = b$ و $2ax + by = 4$ همدیگر را در نقطهٔ $(1, 2)$ قطع می‌کنند. a کدام است؟

- ۲ ۱ -۲ ۲ ۴ ۳ -۴ ۴

۲۰ دو خط $y = 2x + a$ و $y = ax + 2b$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور طول ها قطع می‌کنند. $a + b$ کدام است؟

- ۱ ۱ -۳ ۲ -۲ ۳ -۴ ۴

۲۱ به ازای چه مقادیری از m ، دو خط $mx + y = 2$ و $-x + (m+1)y = 4$ روی محور y ها همدیگر را قطع می‌کنند؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ -۱ ۳ -۲ ۴

۲۲ مساحت ناحیهٔ محدود به محور x ها، نیمساز ناحیهٔ دوم و خط $y = 2x + 4$ کدام است؟

- ۲/۳ ۱ ۴/۳ ۲ ۱/۳ ۳ ۸/۳ ۴

۲۳ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار دو خط $y = x - 1$ و $2x + 3y = 6$ و محور x ها کدام است؟

- ۰/۸ ۱ ۰/۹ ۲ ۱/۶ ۳ ۱/۸ ۴

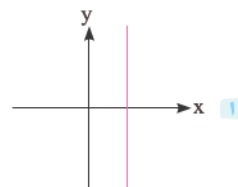
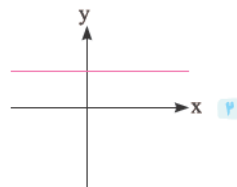
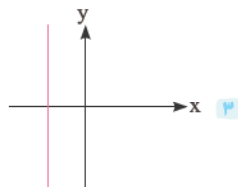
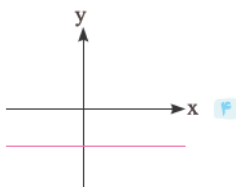
۲۴ به ازای کدام مقدار a ، سه خط $3x - y = 2$ ، $x - ay = 10$ و $2x + y = 8$ در یک نقطه متقاطع اند؟

- ۲ ۱ ۴ ۲ -۲ ۳ -۴ ۴

فرم کلی خط و وضعیت خطوط نسبت به هم

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۵ دو خط $x = my + 1$ و $2x + 5y = 3$ با هم موازی هستند. نمودار خط $x = 2m$ کدام است؟



(برگرفته از کتاب درسی)

۲۶ عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطهٔ $A(2, -1)$ که با خط به معادلهٔ $2x + y = 5$ موازی می‌باشد، کدام است؟

- ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴



۲۷ اگر خط به معادله $ax + by = -1$ با خط به معادله $ay + x = b$ موازی باشد و از نقطه $(2, 1)$ بگذرد، $a^2 + 2b$ کدام است؟

- ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۸ اگر دو خط $y = 1 - 3x$ و $y = 3 + (m+1)x$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟

- ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴

۲۹ خط گذرنده از نقاط $A(a, b)$ و $B(b, a)$ بر خط d به معادله $x + (1+2m)y = m+3$ عمود است. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ ($a \neq b$)

- ۱ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ -۲ ۴

۳۰ دو خط d و d' بر هم عمود هستند. اگر شیب خط d برابر $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ باشد، شیب خط d' کدام است؟

- $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ۱ $2-\sqrt{3}$ ۲ $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ ۳ $\sqrt{3}-2$ ۴

۳۱ نقطه $A(2, a)$ واقع بر خطی است که از نقطه تلاقی دو خط $2y - x = 2$ و $y + 2x = 3$ عبور کرده و بر خط به معادله $2y - 4x = 1$ عمود است.

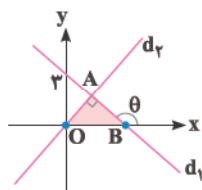
کدام است a ؟

- $\frac{1}{2}$ ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $-\frac{3}{2}$ ۴

۳۲ مساحت ناحیه محدود به خط گذرنده از نقطه برخورد خط $y = 2x + 6$ و نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم و عمود بر خط $x - 5y = 1$ با محورهای

مختصات کدام است؟

- $1/6$ ۱ $3/2$ ۲ $5/4$ ۳ $6/4$ ۴



۳۳ در شکل مقابل اگر $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

- $0/35$ ۱ $0/4$ ۲ $0/45$ ۳ $0/5$ ۴

۳۴ مثلث ABC با رئوس $A(2, m)$ ، $B(-1, 1)$ و $C(0, 6)$ در رأس A قائمه است. مجموع مقادیر m کدام است؟

- ۳ ۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۷ ۴

۳۵ اگر نقاط $A(1, 2)$ و $B(4, 3)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند، معادله ضلع دیگر مستطیل که یک رأس آن نقطه B است، کدام می‌باشد؟

- $2x - y = 9$ ۱ $3x + y = 9$ ۲ $y + 2x = 15$ ۳ $y - 3x = 15$ ۴

۳۶ دو ضلع مستطیلی بر روی دو خط به معادلات $my = 8x - 1$ و $m^2x + y = 2$ واقع هستند. حاصل ضرب مقادیر m کدام است؟

- ۲ ۱ -۴ ۲ $-\frac{1}{4}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴

۳۷ سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ ، $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 2x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث ABC کدام است؟

- $6y - 4x = 15$ ۱ $9y - 6x = 17$ ۲ $3y - 2x = 7$ ۳ $3y + 2x = 9$ ۴

۳۸ معادله سه ضلع یک مثلث $x - y = 2$ ، $y = \frac{x}{2}$ و محور x ها می‌باشد. معادله خط بزرگترین ارتفاع این مثلث کدام است؟

- $y = 4$ ۱ $y - x = 2$ ۲ $x = 4$ ۳ $2x + y = 1$ ۴

۳۹ معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

- $y = \frac{2}{3}$ ۱ $x = \frac{2}{3}$ ۲ $y + x = \frac{2}{3}$ ۳ $y + x = \frac{1}{3}$ ۴

۴۰ خط $x + 2y + 9 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, 0)$ مماس است. مجموع طول و عرض نقطه تماس کدام است؟

- ۴ ۱ -۵ ۲ -۶ ۳ -۷ ۴

۴۱ اگر نقاط $A(0, 0)$ ، $B(2, 2)$ و $C(6, -2)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

- $(2, 2)$ ۱ $(2, 3)$ ۲ $(-1, 3)$ ۳ $(-1, 0)$ ۴



۴۲) نقاط $A(2,1)$ ، $B(-1,1)$ و $C(5,2)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و پای میانهٔ AM باشند، $x_M + x_H$ کدام است؟

- ۱) $\frac{52}{49}$ ۲) $\frac{145}{37}$ ۳) $\frac{125}{3}$ ۴) $\frac{43}{22}$

۴۳) به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ ، $(6, 4a+1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

- ۱) $-2, \frac{9}{4}$ ۲) $-2, \frac{3}{4}$ ۳) $-2, -\frac{3}{4}$ ۴) $2, -\frac{9}{4}$

۴۴) زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $2y - x = 1$ و $3x = 2 - 9y$ کدام است؟

- ۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 75°

فاصلهٔ دو نقطه

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۵) در مثلث ABC با رئوس $A(1,2)$ ، $B(-3,1)$ و $C(4,0)$ طول ضلع متوسط مثلث کدام است؟

- ۱) $\sqrt{19}$ ۲) $\sqrt{17}$ ۳) $\sqrt{21}$ ۴) $\sqrt{13}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۶) اگر نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ سه رأس مثلث ABC باشند، نوع مثلث و محیط آن به ترتیب کدام است؟

- ۱) قائم‌الزاویه - $5(1 + \sqrt{2})$ ۲) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین - $5(2 + \sqrt{2})$
۳) متساوی‌الاضلاع - ۱۵ ۴) متساوی‌الاضلاع - $15\sqrt{2}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۷) نقاط $A(1, 3)$ ، $B(5, -5)$ و $C(-1, 2)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۴۸) فاصلهٔ نقطهٔ $A(1, 3)$ از نقطهٔ $B(m, 3)$ دو برابر فاصلهٔ آن از نقطهٔ $C(1, m+1)$ است. حاصل ضرب مقادیر m کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

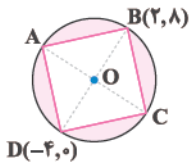
(برگرفته از کتاب درسی)

۴۹) نقاط $A(2, -4)$ و $B(7, 8)$ دو انتهای قطر دایره‌ای هستند. محیط دایره کدام است؟

- ۱) $5/5\pi$ ۲) $6/5\pi$ ۳) 11π ۴) 13π

۵۰) در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟ (مربع $ABCD$ و $\pi = 3$ است.)

- ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰



۵۱) در دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد، معادلهٔ دو قطر به صورت $2x - 3y = 5$ و $5y - 2x = 3$ هستند. طول قطر دایره کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۵۲) نقطهٔ $O(1, 2)$ مرکز لوزی $ABCD$ است. اگر قطرهای این لوزی به موازات محورهای مختصات باشد و یکی از اضلاع این لوزی خط $2x + y = 6$ باشد،

محیط لوزی کدام است؟

- ۱) $10\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $8\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{5}$

۵۳) دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی نقاط $A(-2, 5)$ و $B(4, -3)$ هستند. اگر زاویهٔ بین دو قطر این مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۵۴) دو نقطه روی خط $2x + y = 1$ وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مختصات $\sqrt{10}$ است. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{4}{5}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

۵۵) شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $M(2, 0)$ و $N(1, 2)$ می‌گذرد و معادلهٔ یکی از قطرهایش $x + y = 1$ می‌باشد، کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\sqrt{10}$



مختصات وسط پاره خط

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۶ اگر $A(-1, 6)$ و $B(5, 2)$ باشد، فاصله وسط پاره خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ $2\sqrt{5}$ ۲ $2\sqrt{3}$ ۳ $5\sqrt{2}$ ۴ $3\sqrt{2}$

۵۷ با فرض $A(3a+2, 2a)$ و $B(-a, 0)$ ، اگر نقطه وسط پاره خط AB روی خط $2x+y=8$ باشد، a کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۸ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, 1)$ و $B(6, 5)$ هستند. فاصله مرکز دایره از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

۵۹ دو نقطه $A(m, m+8)$ و $B(3m, 4+m)$ دو سر قطر یک دایره هستند که مرکز آن روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم محورهای مختصات قراردارد. فاصله نقطه $C(-4, 2)$ از مرکز دایره کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

۶۰ اگر نقاط $A(-1, 3)$ و $B(3, 1)$ مختصات دو سر قطر یک مربع باشند، معادله قطر دیگر مربع کدام است؟

- ۱ $x=2y$ ۲ $y=2x$ ۳ $y+2x=5$ ۴ $2y+x=5$

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۱ در مثلث ABC با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ طول میانه AM کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۵ ۴ ۶

۶۲ در مثلث ABC با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(2, 7)$ و $C(8, 5)$ ، خطی که میانه وارد بر ضلع BC بر آن واقع است، محور x ها را با کدام طول قطع

می‌کند؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱ ۹ ۲ ۱۱ ۳ ۱۳ ۴ ۱۵

۶۳ در مثلث ABC معادله دو ضلع AB و AC به ترتیب $x+y=2$ و $2y-x=4$ می‌باشند. اگر نقطه $M(1, 1)$ وسط ضلع AB باشد، مختصات نقطه B کدام است؟

- ۱ $(-2, 0)$ ۲ $(2, 0)$ ۳ $(-2, 2)$ ۴ $(-3, 1)$

۶۴ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+2x=16$ ، $2y-x=2$ و $y=0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات

کدام است؟

(تقریبی قارچ ۹۹)

- ۱ $2\sqrt{5}$ ۲ ۵ ۳ $3\sqrt{3}$ ۴ ۶

۶۵ نقاط $A(-1, 5)$ و $B(3, 3)$ مفروض هستند. عمود منصف AB محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ -۲

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۶ نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, 2)$ سه رأس از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. طول BD کدام است؟

- ۱ $2\sqrt{5}$ ۲ $2\sqrt{3}$ ۳ $3\sqrt{2}$ ۴ $5\sqrt{2}$

۶۷ یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل، توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که

فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله است. مختصات نقطه D کدام

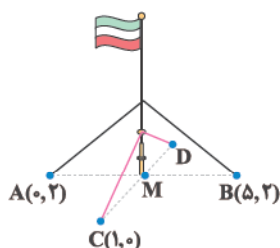
است؟

- ۱ $(3, 2)$ ۲ $(4, 4)$ ۳ $(2, 3)$ ۴ $(1, 4)$

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۸ برای متوازی‌الاضلاع با رئوس $A(3, -1)$ ، $B(-1, -2)$ و $C(1, 2)$ ، رأس D کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱ $(5, 3)$ ۲ $(1, -5)$ ۳ $(-3, 1)$ ۴ $(2, -3)$





فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر



۱ ۳ می‌دانیم هر نقطه روی محور x هادارای عرض صفر و هر نقطه روی محور y هادارای طول صفر است. با توجه به این که طبق فرض مسئله نقطهٔ $A(\alpha, 2\beta - 3)$ روی محور x و $B(2\alpha - 1, 3\beta)$ روی محور y هاست، می‌توان نوشت:

$$2\beta - 3 = 0 \Rightarrow 2\beta = 3 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}, \quad 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر با $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ می‌باشد.

۲ ۲ طبق فرض مسئله دو نقطهٔ A و B هم عرض هستند، پس باید $2a^2 + a$ برابر با ۳ باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$2a^2 + a = 3 \Rightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} a = 1, a = -\frac{3}{2}$$

کسی هست که یارش نباشه وقتی جمع ضرایب معادله صفره، یکی از ریشه‌ها ۱ و اون یکی $\frac{c}{a}$ هستش؟

حالا باید بررسی کنیم به ازای a های به دست آمده، A و B در یک ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرند، پس داریم:

$$a = 1: A(1, 3), B(2, 3) \quad \times \quad a = -\frac{3}{2}: A(1, 3), B(-3, 3) \quad \checkmark$$

توجه داشته باشید به ازای $a = 1$ دو نقطهٔ A و B هر دو در ناحیهٔ اول محورهای مختصات هستند ولی به ازای $a = -\frac{3}{2}$ دو نقطهٔ A در ناحیهٔ اول و نقطهٔ B در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد، پس $a = -\frac{3}{2}$ و در نتیجه $|a| = \frac{3}{2}$ می‌باشد.

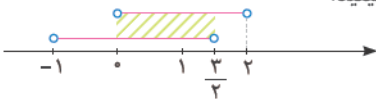
۳ ۳ برای هر نقطه در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات، طول عددی منفی و عرض عددی مثبت است (قبوله؟).

با توجه به این که طبق فرض مسئله، نقطهٔ $A(\frac{2m-3}{m+1}, 2m-m^2)$ در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد، پس باید $\frac{2m-3}{m+1} < 0$ و $2m-m^2 > 0$ باشند و در نتیجه داریم:

$$\frac{2m-3}{m+1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|cccc} m & -\infty & -1 & \frac{3}{2} & +\infty \\ \hline & + & | & - & + \end{array} \Rightarrow -1 < m < \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$2m-m^2 > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|cccc} m & -\infty & 0 & 2 & +\infty \\ \hline & - & | & + & - \end{array} \Rightarrow 0 < m < 2 \quad (2)$$

در نهایت مجموعه مقادیر قابل قبول برای m ، اشتراک دو مجموعه جواب (۱) و (۲)، یعنی $0 < m < \frac{3}{2}$ می‌باشد، ببینید:



۴ ۳ با توجه به این که خط $(m+2)y - mx = 8$ از نقطهٔ $A(-1, 1)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(m+2)y - mx = 8 \xrightarrow{\text{خط است. } (-1, 1) \text{ روی}} (m+2)(1) - m(-1) = 8 \Rightarrow 2m+2 = 8 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

۵ ۱ نقطه‌ای مانند A روی خط $2x + 3y = 5(1-x)$ یا همان خط $7x + 3y = 5$ قرار دارد که مختصات عرض آن از قرینهٔ طولش ۱ واحد کم‌تر است، پس فرض می‌کنیم $A(\alpha, -\alpha - 1)$ باشد (منطقیهٔ ریگه؟). حالا با توجه به این که نقطهٔ A روی خط داده شده قرار دارد، پس مختصات طول و عرض آن روی خط صدق می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$7x + 3y = 5 \xrightarrow{\text{قرار دارد. } A(\alpha, -\alpha - 1) \text{ روی خط}} 7\alpha + 3(-\alpha - 1) = 5 \Rightarrow 7\alpha - 3\alpha - 3 = 5 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

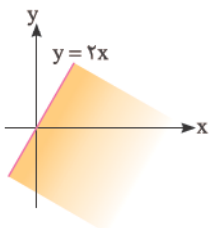
در آخر خواسته مسئله، طول این نقطه، یعنی $\alpha = 2$ است.

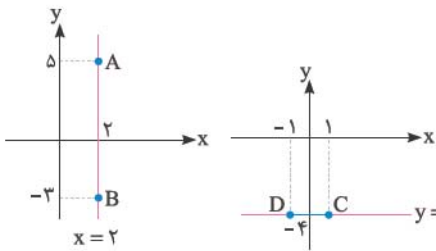
۶ ۴ اگر نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ بخواهد پایین خط $y = 2x$ باشد، آنگاه $y_0 < 2x_0$ می‌شود، پس در مورد نقطهٔ

$$M(2\alpha + \frac{5}{4}, \alpha^2)$$

$$\alpha^2 < 2(2\alpha + \frac{5}{4}) \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - \frac{5}{2} < 0 \Rightarrow (\alpha - 5)(\alpha + 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < \alpha < 5$$

در نتیجه α اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد که تعدادشان ۵ تا است.





نقاط $A(2, 5)$ و $B(2, -3)$ دو نقطه هم طول با طول برابر ۲ هستند، پس معادله خط گذرنده از این دو نقطه به صورت $x=2$ یا $x-2=0$ می باشد که به وضوح $m=-2$ است. از طرفی دو نقطه $C(1, -4)$ و $D(-1, -4)$ دو نقطه هم عرض با عرض -4 هستند، پس معادله خط گذرنده از این دو نقطه به صورت $y=-4$ یا $y+4=0$ می باشد که به وضوح $n=4$ است. در نهایت خواسته مسئله، یعنی $m+n$ برابر با $-2+4=2$ می باشد. برای درک بهتر به شکل های مقابل دقت کنید:

ابتدا معادله خط داده شده را با فاکتورگیری به صورت مقابل بازنویسی می کنیم، ببینید: $mx + (2+m)y + x = 2m \Rightarrow (m+1)x + (2+m)y = 2m$
 از طرفی می دانیم معادله هر خط موازی با محور x ها به صورت $y=k$ است، پس باید در معادله این خط، ضریب x صفر باشد و در نتیجه می توان نوشت:
 $m+1=0 \Rightarrow m=-1$; $(m+1)x + (2+m)y = 2m \xrightarrow{m=-1} (2-1)y = -2 \Rightarrow y = -2$



می دانیم همه نقاطی که روی یک خط موازی محور y ها قرار دارند دارای طول های برابر هستند، پس داریم:

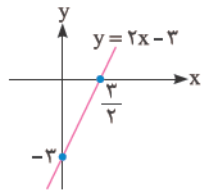
$$a^2 + a = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 & \checkmark \\ a = 2 & \times \end{cases}$$

توجه داشته باشید به ازای $a=2$ نقطه B به صورت $B(6, 2)$ است که در ناحیه اول محورهای مختصات قرار دارد ولی به ازای $a=-3$ نقطه B به صورت $B(6, -3)$ است که در ناحیه چهارم محورهای مختصات قرار دارد. خلاصه این که $a=-3$ و در نتیجه $a^2=9$ می باشد.

نمودار هر یک از خط ها را رسم می کنیم:

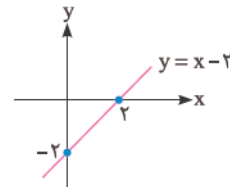
گزینه «۱»: $y = 2x - 3$

x	$\frac{3}{2}$
y	-3

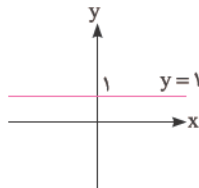


گزینه «۲»: $y = x - 2$

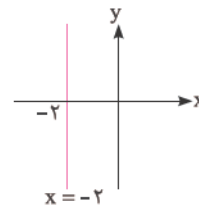
x	2
y	-2



گزینه «۳»: $y = 1$



گزینه «۴»: $x = -2$



همان طور که مشاهده می کنید فقط نمودار داده شده در گزینه «۲» به درستی رسم نشده است.

می دانیم شیب خط گذرنده از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) برابر $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است. با استفاده از این رابطه، شیب خط AB برابر

$$\frac{-(-3)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \text{ می باشد. حال شیب خط گذرنده از نقاط } C \text{ و } D \text{ را در هر یک از چهار گزینه به دست می آوریم، پس داریم:}$$

گزینه «۱»: $m_{CD} = \frac{1 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{3}{2} \times$

گزینه «۲»: $m_{CD} = \frac{5 - (-4)}{4 - (-5)} = \frac{9}{9} = 1 \times$

گزینه «۳»: $m_{CD} = \frac{5 - (-4)}{-4 - 5} = \frac{9}{-9} = -1 \checkmark$

گزینه «۴»: $m_{CD} = \frac{-1 - 2}{0 - 2} = \frac{3}{2} \times$



خط d از دو نقطهٔ $A(2,0)$ و $B(0,3)$ می‌گذرد، پس شیب این خط برابر است با: ۳ ۱۲

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 - 2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

از طرفی چون عرض از مبدأ این خط ۳ است، پس معادلهٔ خط d به صورت $y = \frac{3}{2}x + 3$ می‌باشد که از بین نقاط داده شده فقط نقطهٔ $(4, -3)$ روی این خط قرار دارد، ببینید:

$$y = \frac{3}{2}x + 3 \xrightarrow{\text{روی خط قرار دارد}} -3 = \frac{3}{2}(4) + 3 \Rightarrow -3 = -3 \quad \checkmark$$

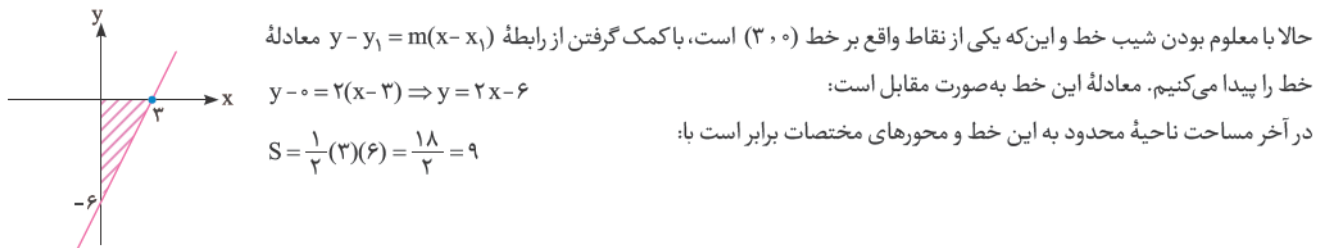
ابتدا شیب خط گذرنده از این دو نقطه را با استفاده از رابطهٔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آوریم، پس داریم: ۳ ۱۳

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{-1 - (-1)} = \frac{5}{0} = \text{نامعریف}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $y - y_0 = m(x - x_0)$ و نقطهٔ $B(-1, 1)$ ، سراغ نوشتن معادلهٔ خط می‌رویم، ببینید: $y - 1 = 2(x - (-1)) \Rightarrow y - 1 = 2x + 2 \Rightarrow y = 2x + 3$ در نهایت برای به دست آوردن طول نقطه برخورد این خط با محور x ها، به جای y صفر می‌گذاریم، پس مقدار طول از مبدأ برابر $x = -\frac{3}{2}$ یا همان $x = -1.5$ می‌شود.

ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را پیدا می‌کنیم، ببینید: ۲ ۱۴

$$\text{شیب} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(m+5) - (1-m)}{m - 1 - (-3)} = \frac{2m+4}{m+2} = \frac{2(m+2)}{m+2} = 2$$



می‌دانیم اگر طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q باشند، مساحت محدود به خط و محورهای مختصات برابر $S = \frac{1}{2}|pq|$ است. در این جا ۴ ۱۵

طول از مبدأ a و عرض از مبدأ برابر ۴ می‌باشد (هله؟)، پس داریم:

$$S = \frac{1}{2}|4a| = 12 \xrightarrow{\times 2} |4a| = 24 \Rightarrow \begin{cases} 4a = 24 \Rightarrow a = 6 \quad \times \\ 4a = -24 \Rightarrow a = -6 \quad \checkmark \end{cases}$$

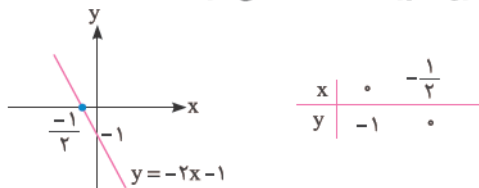
با توجه به نمودار داده شده به وضوح $a < 0$ است، پس فقط $a = -6$ قابل قبول می‌باشد.

می‌دانیم معادلهٔ هر خط به صورت $y = mx + h$ است که در آن m شیب خط و h عرض از مبدأ خط است. در اینجا با توجه به این که طبق ۱ ۱۶

فرض مسئله شیب خط ۲ برابر عرض از مبدأ آن است، معادلهٔ خط را به صورت $y = 2ax + a$ در نظر می‌گیریم. از طرفی با توجه به این که خط از نقطهٔ $A(2, -5)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$y = 2ax + a \xrightarrow{\text{روی خط قرار دارد}} -5 = 2a(2) + a \Rightarrow 4a + a = -5 \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow a = -1$$

پس معادلهٔ خط به صورت $y = -2x - 1$ می‌باشد و همان طور که مشاهده می‌کنید نمودار خط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.



می‌دانیم شیب یک خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. طبق فرض مسئله خط گذرنده از نقاط ۲ ۱۷

$A(m, 2m+2)$ و $B(-m, 5m+1)$ با جهت منفی محور x ها زاویهٔ 45° می‌سازد، یعنی زاویهٔ خط با جهت مثبت محور x ها 135° و تانژانت آن -1 می‌باشد، پس شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B را پیدا می‌کنیم و جوابش را برابر -1 می‌گذاریم، در نتیجه داریم:

$$\text{شیب} = \frac{(2m+2) - (5m+1)}{m - (-m)} = \frac{-3m+1}{2m} = -1 \Rightarrow -3m+1 = -2m \Rightarrow m = 1$$

برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد دو خط $2y + x = 5$ و $y = 2x - 5$ کافی است دستگاه شامل معادلات این دو خط را حل کنیم، پس داریم: ۴ ۱۸

$$\begin{cases} 2y + x = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Rightarrow 2(2x - 5) + x = 5 \Rightarrow 4x - 10 + x = 5 \Rightarrow 5x - 10 = 5 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3, y = 1$$

در نتیجه خواستهٔ مسئله $x + y = 3 + 1 = 4$ است.



۲ / ۱۹ طبق فرض مسئله دو خط $ax + 3y = b$ و $2ax + by = 4$ همدیگر را در نقطه $(1, 2)$ قطع می‌کنند، پس مختصات این نقطه در هر دو خط صدق می‌کند و در نتیجه داریم:

$$a + 6 = b \quad (1) \quad 2a + 2b = 4 \xrightarrow{+2} a + b = 2 \quad (2)$$

حالا با حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) مقادیر a و b را به دست می‌آوریم، پس می‌توان نوشت:

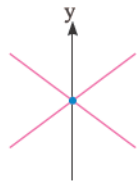
$$\begin{cases} a - b = -6 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4$$

۱ / ۲۰ با توجه به این‌که دو خط $y = 2x + a$ و $y = ax + 2b$ همدیگر را در نقطه $(1, 0)$ قطع می‌کنند، پس مختصات این نقطه در معادله هر دو خط صدق می‌کند و می‌توان نوشت:

$$y = 2x + a \xrightarrow{\text{نقطه } (1, 0) \text{ روی خط است.}} 0 = 2 + a \Rightarrow a = -2$$

$$y = ax + 2b \xrightarrow{\text{نقطه } (1, 0) \text{ روی خط است.}} 0 = a + 2b \xrightarrow{a = -2} 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

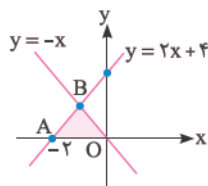
در نهایت خواسته مسئله برابر $a + b = -1$ است.



۱ / ۲۱ مطابق شکل، وقتی که دو خط همدیگر را روی محور y ها قطع می‌کنند، طول نقطه تقاطع صفر می‌شود،

پس مقدار دو خط داده شده به ازای $x = 0$ برابر می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} mx + y = 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \\ -x + (m+1)y = 4 \xrightarrow{x=0} y = \frac{4}{m+1} \end{cases} \Rightarrow 2 = \frac{4}{m+1} \Rightarrow 2m + 2 = 4 \Rightarrow m = 1$$

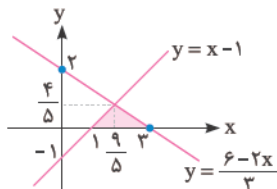


۲ / ۲۲ هر دو خط گفته شده را رسم می‌کنیم. مطابق شکل، ناحیه محدود شده یک مثلث است که نامش را OAB می‌گذاریم. حالا برای پیدا کردن مساحت این مثلث باید نقطه B را پیدا کنیم که این نقطه محل برخورد دو خط $y = -x$ و $y = 2x + 4$

است، پس طول نقطه B برابر است با:

$$2x + 4 = -x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

حالا با جای‌گذاری $x = -\frac{4}{3}$ در یکی از دو خط به راحتی $y_B = \frac{4}{3}$ می‌شود. در نهایت مساحت مثلث OAB برابر با $S = \frac{1}{2} \times (2) \times (\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$ است.



۱ / ۲۳ نمودار دو خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس مساحت ناحیه محدود به

نمودار این دو خط و محور x ها را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$S = \frac{1}{2} (2) (\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

توجه داشته باشید که طول نقطه تلاقی دو خط از حل معادله $\frac{6-2x}{3} = x - 1$ و به صورت زیر به دست می‌آید، ببینید:

$$x - 1 = \frac{6 - 2x}{3} \xrightarrow{\times 3} 3x - 3 = 6 - 2x \Rightarrow 5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}$$

۳ / ۲۴ اول از همه نقطه تقاطع دو خط $3x - y = 2$ و $2x + y = 8$ را پیدا می‌کنیم، ببینید:

حالا با توجه به این‌که خط سوم، یعنی خط $x - ay = 10$ هم باید از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد، پس باید این نقطه در خط $x - ay = 10$ صدق کند، پس داریم:

$$x - ay = 10 \xrightarrow{\text{قرار دارد } A(2, 4) \text{ روی خط}} 2 - 4a = 10 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

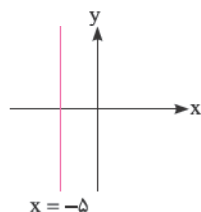
۳ / ۲۵ ابتدا شیب هر یک از خط‌های $x = my + 1$ و $2x + 5y = 3$ را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$x = my + 1 \Rightarrow x - my = 1; \text{ شیب} = \frac{-1}{-m} = \frac{1}{m}, \quad 2x + 5y = 3; \text{ شیب} = \frac{-2}{5}$$

با توجه به این‌که طبق فرض مسئله این دو خط با هم موازی هستند، پس شیب آن‌ها با هم برابر است و در نتیجه برای محاسبه مقدار m می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{m} = \frac{-2}{5} \Rightarrow m = \frac{-5}{2}$$

در نتیجه خط $x = 2m = 2(\frac{-5}{2}) = -5$ یک خط موازی محور عرض‌ها و در سمت چپ آن می‌باشد، ببینید:





شیب خط $2x + y = 5$ برابر با $-\frac{2}{1} = -2$ می‌باشد و با توجه به این‌که خط مورد نظر با این خط موازی است، پس شیب آن خط هم برابر -2 می‌باشد و برای نوشتن معادلهٔ آن با استفاده از رابطهٔ $y - y_0 = m(x - x_0)$ داریم: $y - (-1) = -2(x - 2) \Rightarrow y + 1 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 3$ همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض از مبدأ این خط برابر با 3 است.

شیب خط $ax + by = -1$ برابر با $-\frac{a}{b}$ و شیب خط $ay + x = b$ برابر با $\frac{1}{a}$ است. با توجه به این‌که طبق فرض مسئله این دو خط موازی هستند، پس باید شیب آن‌ها با هم برابر باشد و در نتیجه می‌توان نوشت: $-\frac{a}{b} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{a} \Rightarrow b = a^2$

از طرفی در صورت تست گفته شده که خط $ax + by = -1$ از نقطهٔ $(2, 1)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند و داریم: $ax + by = -1 \xrightarrow{\text{روی } (2, 1) \text{ خط است.}} 2a + b = -1 \xrightarrow{b=a^2} 2a + a^2 = -1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1, b = a^2 = 1$

در نهایت $a^2 + 2b = 1 + 2(1) = 3$ می‌باشد.

ابتدا شیب هر یک از خط‌های $y = 1 - 3x$ و $2x = (m+1)y + 3$ را به دست می‌آوریم، پس داریم: $2x - (m+1)y = 3$; شیب $= \frac{-2}{-(m+1)} = \frac{2}{m+1}$

طبق فرض مسئله این دو خط بر هم عمود هستند، پس حاصل ضرب شیب آن‌ها برابر با -1 می‌باشد و در نتیجه می‌توان نوشت: $y = 1 - 3x$; شیب $= -3$

$(-3) \left(\frac{2}{m+1} \right) = -1 \Rightarrow \frac{6}{m+1} = 1 \Rightarrow 6 = m+1 \Rightarrow m = 5$

ابتدا شیب خط گذرنده از نقاط $A(a, b)$ و $B(b, a)$ را با استفاده از رابطهٔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آوریم، پس داریم: $m = \frac{b - a}{a - b} = \frac{-(a - b)}{a - b} = -1$

از طرفی شیب خط $x + (1+2m)y = m + 3$ برابر $\frac{-1}{1+2m}$ می‌باشد و چون طبق فرض مسئله این دو خط بر هم عمودند، پس حاصل ضرب شیب آن‌ها -1 است و در نتیجه می‌توان نوشت: $(-1) \left(\frac{-1}{1+2m} \right) = -1 \Rightarrow \frac{1}{1+2m} = -1 \Rightarrow 1 + 2m = -1 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$

پس معادلهٔ خط d به صورت $y = x - 2$ یا $x - y = 2$ می‌باشد.

همگی باید بدانیم که $4\sqrt{3} + 7$ همان $(2 + \sqrt{3})^2$ است. حالا با توجه به این‌که خط d' عمود بر خط d با شیب $\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}$ است، پس شیب خط d' عکس و قرینهٔ شیب خط d می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$m_{d'} = \frac{-1}{\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}} = \frac{-1}{|2 + \sqrt{3}|} = \frac{-1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{-(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = \sqrt{3} - 2$$

ابتدا نقطهٔ تلاقی دو خط $3y - x = 2$ و $y + 2x = 3$ را به دست می‌آوریم. برای این کار دستگاه شامل معادلات این دو خط را حل می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} 3y - x = 2 \\ y + 2x = 3 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 6y - 2x = 4 \\ y + 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس نقطهٔ تلاقی به صورت $(1, 1)$ است. از طرفی شیب خط $2y - 4x = 1$ برابر با $\frac{-(-4)}{2} = 2$ است و چون خط مورد نظر بر این خط عمود است، شیب آن قرینه و معکوس عدد 2 یعنی $-\frac{1}{2}$ می‌باشد و در نتیجه با استفاده از رابطهٔ $y - y_0 = m(x - x_0)$ معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(1, 1)$ با شیب $-\frac{1}{2}$ برابر است با:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

در آخر با توجه به این‌که نقطهٔ $A(2, a)$ روی این خط قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کند و برای محاسبهٔ مقدار a می‌توان نوشت:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{روی خط است.}} a = -\frac{1}{2}(2) + \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

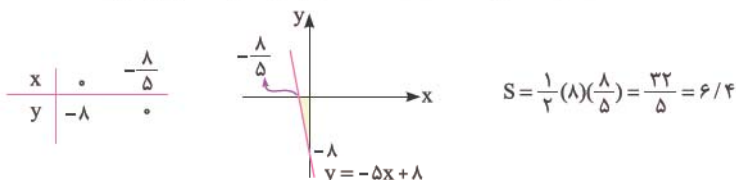


۴ ۳۲

ابتدا نقطه برخورد خط $y = 2x + 6$ و نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم یعنی $y = -x$ را به دست می‌آوریم، پس داریم:

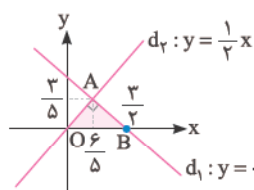
$$2x + 6 = -x \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2, y = 2$$

در نتیجه نقطه برخورد این دو خط به صورت $(-2, 2)$ می‌باشد. از طرفی خط موردنظر بر خط به معادله $x - 5y = 1$ با شیب $\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$ عمود است، پس باید شیب این خط -5 باشد. حالا با استفاده از رابطه $y - y_0 = m(x - x_0)$ با توجه به این‌که شیب خط -5 است و از نقطه $(-2, 2)$ می‌گذرد، معادله این خط را نوشته و با رسم نمودار آن خواسته مسئله را به دست می‌آوریم، ببینید:



۳ ۳۳ می‌دانیم شیب یک خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، پس باید با استفاده از روابط $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ و $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ مقدار $\tan \theta$ ، یعنی شیب خط d_1 را به دست آوریم، پس داریم:

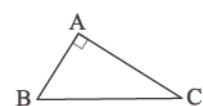
$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \frac{5}{4} \Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{1}{4} \xrightarrow{\theta \text{ منفرجه}} \cot \theta = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}} \tan \theta = -2$$



در نتیجه معادله خط d_1 با توجه به این‌که شیب آن -2 و عرض از مبدأ آن 3 است، به صورت $y = -2x + 3$ می‌باشد. همچنین d_2 بر خط d_1 عمود است و در نتیجه شیب آن برابر با $\frac{1}{5}$ می‌باشد و چون از مبدأ مختصات می‌گذرد، معادله آن به صورت $y = \frac{1}{5}x$ می‌باشد و در نتیجه برای محاسبه خواسته مسئله می‌توان نوشت: $S = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{50} = 0.18$. توجه داشته باشید B محل برخورد خط d_1 با محور x ها و A محل برخورد دو خط d_1 و d_2 است که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

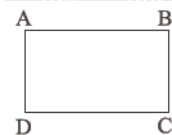
$$B: y = -2x + 3 \xrightarrow{y=0} -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$A: -2x + 3 = \frac{1}{5}x \xrightarrow{\times 2} -4x + 6 = x \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \Rightarrow A\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$$



۴ ۳۴ با توجه به این‌که مثلث ABC در رأس A قائمه است، پس دو ضلع AB و AC بر هم عمودند. حالا شیب دو خط AB و AC را به دست می‌آوریم، ببینید: $m_{AB} = \frac{m-1}{2-(-1)} = \frac{m-1}{3}$ ، $m_{AC} = \frac{m-6}{2-0} = \frac{m-6}{2}$. با توجه به این‌که این دو خط بر هم عمود هستند، پس حاصل ضرب شیب آن‌ها برابر -1 می‌باشد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$m_{AB} \times m_{AC} = -1 \Rightarrow \left(\frac{m-1}{3}\right) \left(\frac{m-6}{2}\right) = \frac{m^2 - 7m + 6}{6} = -1 \Rightarrow m^2 - 7m + 6 = -6 \Rightarrow m^2 - 7m + 12 = 0 \Rightarrow (m-3)(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر 7 می‌باشد.

۳ ۳۵ ابتدا شکل فرضی مقابل را در نظر گرفته و هم‌چنین شیب خط‌گذرنده از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(4, 3)$ را پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

از طرفی با توجه به این‌که اضلاع مجاور مستطیل بر هم عمودند، پس شیب خط BC عکس و قرینه شیب خط AB است، در واقع $m_{BC} = -3$ می‌باشد. حالا با استفاده از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادله خط BC به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$B(4, 3), m_{BC} = -3; y - 3 = -3(x - 4) \Rightarrow y + 3x = 15$$

۳ ۳۶ ابتدا شیب هر یک از خط‌های داده شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم، ببینید:

$$my - \lambda x = -1; \text{شیب} = \frac{-(-\lambda)}{m} = \frac{\lambda}{m}; m^2 x + y = 2; \text{شیب} = \frac{-m^2}{1} = -m^2$$

حالا مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر دو خط داده شده معادله دو ضلع روبه‌روی هم از مستطیل باشند، باید با هم موازی باشند، یعنی شیب آن‌ها با هم برابر باشد، پس داریم:

$$\frac{\lambda}{m} = -m^2 \Rightarrow -m^3 = \lambda \Rightarrow m^3 = -\lambda \Rightarrow m = -2$$

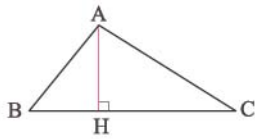
حالت دوم: اگر این دو خط، معادله دو ضلع مجاور از مستطیل باشند، بر هم عمودند، پس حاصل ضرب شیب آن‌ها برابر -1 می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda}{m} (-m^2) = -1 \Rightarrow \lambda m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{\lambda}$$

در نتیجه حاصل ضرب مقادیر m برابر $2 \times \left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda}$ می‌باشد.



۳۷ - ۲ شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



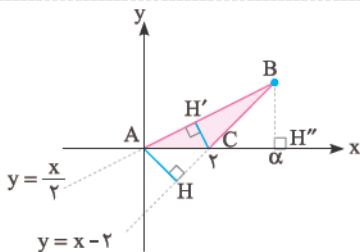
همگی می‌دانیم که شیب خط BC برابر $m_{BC} = -\frac{3}{4}$ است و در نتیجه شیب خط عمود بر آن، یعنی AH مساوی $\frac{4}{3}$ می‌باشد. از طرفی برای پیدا کردن معادلهٔ خط AH به یک نقطه از این خط، یعنی A نیاز داریم که به وضوح این نقطه محل برخورد دو خط AB و AC است. پس با حل دستگاه شامل معادلات AB و AC مختصات نقطه A را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -4y + 2x = -6 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow -3y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{7}{3} ; A\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

در آخر با داشتن نقطه $A\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$ و شیب خط AH، یعنی $\frac{4}{3}$ معادلهٔ این خط به صورت زیر به دست آید:

$$y - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\left(x + \frac{7}{3}\right) \xrightarrow{\times 9} 9y - 3 = 6x + 14 \Rightarrow 9y - 6x = 17$$

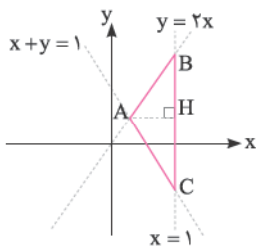
۳۸ - ۳ شکل مثلثی که اضلاع آن روی خط‌های $y = x - 2$ ، $y = \frac{x}{2}$ و $y = 0$ قرار دارد، به صورت مقابل است:



مطابق شکل رسم شده بزرگترین ارتفاع مثلث BH' است که خطی عمودی می‌باشد و معادله‌اش به صورت $x = \alpha$ است. حالا برای پیدا کردن α دو خط $y = x - 2$ و $y = \frac{x}{2}$ را با هم قطع می‌دهیم، پس داریم:

$$\frac{x}{2} = x - 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$$

۳۹ - ۱ شکل مثلثی که اضلاع آن $x + y = 1$ ، $y = 2x$ و $x = 1$ باشد به صورت مقابل است:



با توجه به این شکل، کوچکترین ارتفاع در این مثلث AH است که برای محاسبهٔ معادلهٔ ارتفاع AH، ابتدا باید دو خط $x + y = 1$ و $y = 2x$ را با هم قطع دهیم تا مختصات نقطه A به دست آید:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x + 2x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

با توجه به آنکه ارتفاع AH افقی است، پس معادلهٔ آن به صورت $y = \frac{2}{3}$ می‌باشد.

۴۰ - ۲ شیب خط مماس بر دایره یعنی خط $x + 2y + 9 = 0$ برابر $-\frac{1}{2}$ است و مطابق شکل مقابل، خط عمود بر این خط که به وضوح شیبش ۲ است از مرکز دایره می‌گذرد (ملاحظه). در واقع به راحتی با داشتن نقطه $O(1, 0)$ و هم چنین شیب این خط یعنی ۲، می‌توانیم معادلهٔ خط گذرنده از مرکز دایره را بنویسیم، ببینید:

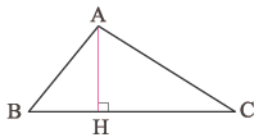
$$O(1, 0), m = 2; y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2x + 2 = 0$$

از طرفی مطابق شکل، نقطهٔ تماس خط و دایره، نقطه H است که برای پیدا کردن مختصات این نقطه باید دو خط $x + 2y + 9 = 0$ و $y - 2x + 2 = 0$ را در یک دستگاه حل کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x + 2y + 9 = 0 \\ y - 2x + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} x + 2y + 9 = 0 \\ -2y + 4x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -4$$

خلاصه این‌که مختصات نقطه H به صورت $H(-1, -4)$ و در نتیجه $x_H + y_H = -1 - 4 = -5$ می‌باشد.

۴۱ - ۱ با توجه به شکل مقابل، برای پیدا کردن مختصات پای ارتفاع AH، یعنی H باید معادلهٔ دو خط



AH و BC را پیدا کنیم و آن‌ها را در یک دستگاه قطع بدهیم.

برای این کار اول با داشتن دو نقطه B و C معادلهٔ خط BC را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

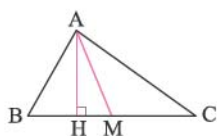
$$B(2, 2), C(6, -2); m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 + 2}{2 - 6} = -1; \text{ معادلهٔ BC: } y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$$

از طرفی شیب خط BC برابر -1 و در نتیجه شیب خط AH عکس و قرینهٔ آن یعنی ۱ است. حالا با داشتن نقطه $A(0, 0)$ و همچنین شیب ۱، معادلهٔ ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$A(0, 0), m_{AH} = 1; \text{ معادلهٔ AH: } y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

در آخر از حل دستگاه شامل معادلات $BC: y = -x + 4$ و $AH: y = x$ مختصات نقطهٔ تقاطع، یعنی H پیدا می‌شود، ببینید:

$$\begin{cases} y + x = 4 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2; H(2, 2)$$



$$M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) \Rightarrow M\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

طبق شکل مقابل، ابتدا مختصات نقطه M وسط ضلع BC را می‌یابیم: ۲ ۴۲

حالا به سراغ محاسبه مختصات نقطه H می‌رویم. ابتدا معادله خط BC را نوشته و سپس با قرینه و معکوس کردن شیب خط BC، شیب AH را یافته و معادله AH را می‌نویسیم، داریم:

$$m_{BC} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{معادله BC: } y-2 = \frac{1}{4}(x-5) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$$

$$m_{AH} = -4 \Rightarrow \text{معادله AH: } y-1 = -4(x-2) \Rightarrow y = -4x+9$$

اکنون کافی است معادله دو خط BC و AH را با هم قطع دهیم تا مختصات H را بیابیم، می‌نویسیم:

$$\frac{x}{4} + \frac{7}{4} = -4x+9 \Rightarrow \frac{x}{4} + 4x = 9 - \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{17x}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow x = \frac{29}{17} \Rightarrow x_M + x_H = 2 + \frac{29}{17} = \frac{63}{17} \Rightarrow \frac{145}{17}$$

شرط قرار گرفتن سه نقطه $A(0,0)$ ، $B(a,2)$ و $C(6,4a+1)$ در یک راستا این است که $m_{AB} = m_{BC}$ ، پس می‌توان نوشت: ۴ ۴۳

$$m_{AB} = \frac{2-0}{a-0} = \frac{2}{a}, \quad m_{BC} = \frac{4a+1-2}{6-a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{4a-1}{6-a} \Rightarrow 4a^2 - 2a = 18 - 2a \Rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4)(-18) = 1 + 288 = 289 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{-1 \pm 17}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

شیب خط $2y - x = 1$ برابر $\frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ و شیب خط $3x + 9y = 2$ برابر $\frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$ است. حالا برای محاسبه زاویه حاده بین این دو خط با ۲ ۴۴

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{3})}{1 + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} \right| = \left| \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} \right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

استفاده از رابطه $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ می‌توان نوشت:

با استفاده از فرمول فاصله دو نقطه، طول اضلاع AB، BC و AC را پیدا کرده و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم، پس می‌توان نوشت: ۲ ۴۵

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}, \quad AC = \sqrt{(1-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}, \quad BC = \sqrt{(-3-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

به وضوح ضلع متوسط مثلث، AB است که اندازه‌اش برابر $\sqrt{17}$ می‌باشد.

ابتدا با استفاده از فرمول فاصله دو نقطه از هم، اندازه هر یک از اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم، پس داریم: ۲ ۴۶

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2-(-2))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5-(-2))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

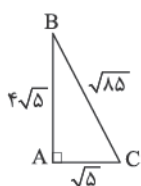
با توجه به این‌که در این مثلث، رابطه فیثاغورس به صورت $AB^2 + AC^2 = BC^2$ برقرار است (مواضعی؟)، این مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین می‌باشد و محیط آن برابر با $5 + 5 + 5\sqrt{2} = 5(2 + \sqrt{2})$ است.

ابتدا اندازه هر یک از اضلاع مثلث را با استفاده از فرمول فاصله دو نقطه به دست می‌آوریم، پس داریم: ۲ ۴۷

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$



با توجه به این‌که در این مثلث، رابطه فیثاغورس به صورت $AB^2 + AC^2 = BC^2$ برقرار است، این مثلث در رأس A قائمه می‌باشد و

برای محاسبه مساحت آن می‌توان نوشت:

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 10$$

بلوتر روش‌های بهتری برای حل این تست گفته می‌شود.



۴۸ ۴ دو نقطه $A(1, 3)$ و $B(m, 3)$ دو نقطه هم عرض هستند، پس فاصلهٔ آن‌ها قدرمطلق تفاضل طول‌ها یعنی $AB = |m - 1|$ و دو نقطه $A(1, 3)$ و $C(1, m+1)$ دو نقطه هم طول هستند و در نتیجه فاصلهٔ آن‌ها قدرمطلق تفاضل عرض آن‌ها یعنی $AC = |m - 2|$ می‌باشد. از طرفی با توجه به فرض مسئله $AB = 2AC$ می‌باشد و برای محاسبهٔ مقادیر m می‌توان نوشت:

$$|m - 1| = 2|m - 2| \xrightarrow{\text{توان } 2} m^2 - 2m + 1 = 4(m^2 - 4m + 4) \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 4m^2 - 16m + 16 \Rightarrow 3m^2 - 14m + 15 = 0$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4(3)(15) = 196 - 180 = 16 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{14+4}{6} = 3 \\ m_2 = \frac{14-4}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

در نتیجه حاصل ضرب مقادیر m برابر $3(\frac{5}{3}) = 5$ است.

۴۹ ۴ می‌دانیم فاصلهٔ دو انتهای قطر دایره برابر با اندازهٔ قطر دایره است، پس با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(7-2)^2 + (8-(-4))^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

پس اندازهٔ شعاع دایره $r = \frac{13}{2}$ می‌باشد و محیط این دایره $P = 2\pi r = 2\pi(\frac{13}{2}) = 13\pi$ است.

۵۰ ۳ مطابق شکل صورت سؤال، BD هم قطر دایره و هم قطر مربع است، پس قبل از هر چیز طول آن را پیدا می‌کنیم:

$$BD = \sqrt{(2+4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

از طرفی همگی بلدیم که قطر مربع، $\sqrt{2}$ برابر ضلع آن است (بلدیم رنگه؟)، پس طول ضلع و مساحت مربع برابر است با:

$$\text{ضلع} = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = (\frac{10}{\sqrt{2}})^2 = \frac{100}{2} = 50$$

همچنین چون قطر دایره 10 است، پس شعاع آن 5 و مساحت دایره برابر $\pi r^2 = 3 \times (5)^2 = 75$ می‌باشد. در نهایت مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با مساحت دایره منهای مساحت مربع می‌شود، یعنی $75 - 50 = 25$.

۵۱ ۴ همگی می‌دانیم که قطرهای دایره در مرکز دایره همدیگر را قطع می‌کنند، پس می‌توان نوشت:

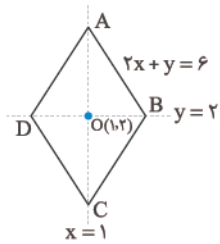
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases} \Rightarrow -8y = 8 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1 ; A(1, -1)$$

حالا با توجه به آن‌که طبق فرض مسئله دایره از نقطهٔ $O(0,0)$ هم می‌گذرد، پس فاصلهٔ این دو نقطه همان شعاع دایره است، پس داریم:

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

در نهایت قطر دایره برابر $2\sqrt{2}$ می‌شود.

۵۲ ۴ شکل مقابل، احوالات صورت مسئله را به خوبی نمایش می‌دهد:



دقت داشته باشید که چون محورهای مختصات به موازات قطرهای لوزی هستند و قطرهای آن‌ها از نقطهٔ $O(1,2)$ می‌گذرند، پس به ناچار معادلهٔ قطرهای $x=1$ و $y=2$ می‌شود (قبوله؟).

از طرفی یکی از اضلاع لوزی خط $2x + y = 6$ است، پس مطابق شکل روبه‌رو، مختصات B و C به راحتی پیدا می‌شود، ببینید:

$$2x + y = 6 \begin{cases} y = 2 \rightarrow 2x + 2 = 6 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 ; B(2, 2) \\ x = 1 \rightarrow 2(1) + y = 6 \Rightarrow y = 4 ; A(1, 4) \end{cases}$$

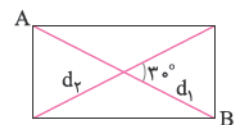
در نهایت، برای پیدا کردن محیط لوزی، طول AB را پیدا و سپس در 4 ضرب می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \Rightarrow \text{محیط} = 4\sqrt{5}$$

۵۳ ۳ فاصلهٔ نقاط A و B برابر با اندازهٔ قطر مستطیل است، پس داریم:

$$d = AB = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

از طرفی با توجه به این‌که در مستطیل اندازهٔ قطرهای با هم برابر است، برای محاسبهٔ مساحت این مستطیل با استفاده از رابطهٔ $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \theta$ می‌توان نوشت:



$$S = \frac{1}{2}(10)(10) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}(10)(10)(\frac{1}{2}) = \frac{100}{2} = 50$$

توجه داشته باشید مساحت هر چهارضلعی دلخواه با اندازهٔ قطرهای d_1 و d_2 که زاویهٔ بین آن‌ها θ است از رابطهٔ $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \theta$ محاسبه می‌شود (یارت اومره؟).

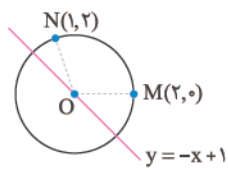


۵۴ / ۲ می‌دانیم مختصات هر نقطه روی خط $y = 1 - 2x$ به صورت $A(\alpha, 1 - 2\alpha)$ است (قبوله؟). همچنین طبق فرض مسئله، فاصله این نقاط از مبدأ مختصات $O(0,0)$ برابر $\sqrt{10}$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$OA = \sqrt{\alpha^2 + (1 - 2\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1} = \sqrt{5\alpha^2 - 4\alpha + 1} = \sqrt{10} \xrightarrow{\text{توان } 2} 5\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 10 \Rightarrow 5\alpha^2 - 4\alpha - 9 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = \frac{9}{5} \end{cases}$$

در نتیجه مجموع عرض نقاط برابر با $\frac{2}{5} + (-\frac{13}{5}) = -\frac{11}{5}$ است، دلیلش را هم ببینید:
 $y = 1 - 2\alpha \xrightarrow{\alpha = -1} y = 3$; $A(-1, 3)$, $y = 1 - 2\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{9}{5}} y = -\frac{13}{5}$; $A(\frac{9}{5}, -\frac{13}{5})$

۵۵ / ۲ برای درک بهتر مسئله، شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



واضح است که مرکز دایره، روی قطر یا همان خط $y = -x + 1$ قرار دارد، پس مختصات آن را به صورت $O(\alpha, -\alpha + 1)$ نمایش می‌دهیم (مله؟). از طرفی M و N نقاط واقع بر محیط دایره هستند، پس $OM = ON$ ، همان شعاع‌های دایره است و داریم:

$$\begin{cases} OM = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (-\alpha + 1 - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1} = \sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 5} \\ ON = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (-\alpha + 1 - 2)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 2\alpha + 1} = \sqrt{2\alpha^2 + 2} \end{cases}$$

$$OM = ON \Rightarrow \sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 5} = \sqrt{2\alpha^2 + 2} \xrightarrow{\text{توان } 2} 2\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 2\alpha^2 + 2 \Rightarrow -6\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

حالا با جای‌گذاری $\alpha = \frac{1}{2}$ در رابطه ON شعاع دایره را به دست می‌آوریم، ببینید:
 $ON = \sqrt{2\alpha^2 + 2} \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{2}} ON = \sqrt{2(\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

۵۶ / ۱ مختصات وسط پاره خط AB با استفاده از رابطه $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ برابر $M(\frac{-1 + \frac{9}{5}}{2}, \frac{3 - \frac{13}{5}}{2}) = M(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ است که فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر با $MO = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ می‌باشد.

۵۷ / ۱ ابتدا وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$M(\frac{2a + 2 - a}{2}, \frac{2a + 0}{2}) = M(\frac{2a + 2}{2}, \frac{2a}{2}) = M(a + 1, a)$$

طبق فرض مسئله این نقطه روی خط به معادله $2x + y = 8$ قرار دارد، پس مختصات نقطه در معادله خط صدق می‌کند و برای محاسبه مقدار a می‌توان نوشت:

$$2x + y = 8 \xrightarrow{\text{روی خط است } M(a+1, a)} 2(a+1) + a = 8 \Rightarrow 2a + 2 + a = 8 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

۵۸ / ۳ می‌دانیم وسط دو انتهای یکی از قطرهای دایره، مرکز آن دایره است، پس می‌توان نوشت:
 فاصله این نقطه از مبدأ مختصات $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ است.

۵۹ / ۱ می‌دانیم وسط دو سر قطر دایره، مرکز دایره است، پس داریم:

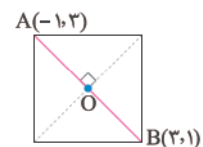
$$O(\frac{m + 2m}{2}, \frac{m + 8 + 4 + m}{2}) = O(\frac{3m}{2}, \frac{2m + 12}{2}) = O(\frac{3m}{2}, m + 6)$$

از طرفی طبق فرض مسئله مرکز دایره روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم، یعنی خط $y = -x$ قرار دارد، پس طول و عرض آن قرینه هم هستند (مواضعی؟). در نتیجه برای محاسبه مقدار m می‌توان نوشت:

$$-2m = m + 6 \Rightarrow -3m = 6 \Rightarrow m = -2$$

خلاصه این‌که مرکز این دایره $O(-4, 4)$ است که فاصله آن از نقطه $C(-4, 2)$ با توجه به هم‌طول بودن آن‌ها برابر $|4 - 2| = 2$ می‌باشد.

۶۰ / ۲ ابتدا نقطه برخورد دو قطر مربع را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که این نقطه دقیقاً وسط هر یک از قطرهای مربع است، پس می‌توان نوشت:



$$O(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{2 + 1}{2}) = O(1, 2)$$

از طرفی شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر $m_{AB} = \frac{3 - 1}{-1 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ است و چون قطرهای مربع بر هم عمودند، شیب قطر دیگر، قرینه و معکوس شیب AB

یعنی $\frac{1}{4}$ است، پس خواسته مسئله در واقع معادله خطی با شیب $\frac{1}{4}$ می‌باشد که از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد، یعنی:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow y = 2x$$



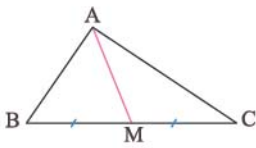
۳ ۶۱

ابتدا مختصات نقطهٔ M که وسط پاره خط BC قرار دارد را به دست می آوریم، پس داریم:

$$M\left(\frac{7+3}{2}, \frac{11+1}{2}\right) = M(5, 6)$$

حالا برای محاسبهٔ اندازهٔ میانهٔ AM با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه می توان نوشت:

$$AM = \sqrt{(1-5)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$



۳ ۶۲

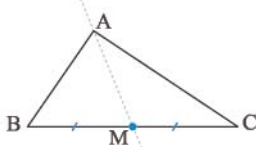
ابتدا نقطهٔ وسط پاره خط BC یعنی M را به دست می آوریم. مطابق آن چه آموختیم مختصات این نقطه به صورت

$$M\left(\frac{8+2}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = M(5, 6)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-6}{1-5} = \frac{-3}{-4} ; y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{-4}(x - 5)$$

که برای نوشتن معادلهٔ این خط داریم:

$$y - 6 = \frac{-3}{-4}(x - 5) \xrightarrow{y=0} -6 = \frac{-3}{-4}(x - 5) \Rightarrow x - 5 = 8 \Rightarrow x = 13$$



۲ ۶۳

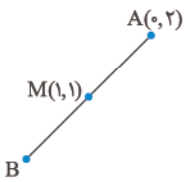
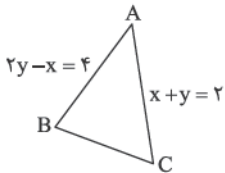
برای درک بهتر مسئله، شکل مقابل را در نظر بگیرید:

همان طور که می بینید، نقطهٔ A محل برخورد دو خط $x + y = 2$ و $2y - x = 4$ است، پس می توان نوشت:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 0 ; A(0, 2)$$

از طرفی نقطهٔ $M(1, 1)$ وسط ضلع AB است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2, 0)$$



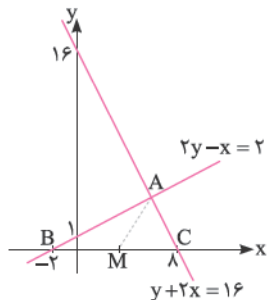
۲ ۶۴

با توجه به شکل مقابل، مختصات وسط ضلع افقی به وضوح $(3, 0)$ است:حالا برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ A، با توجه به اینکه این نقطه محل برخورد دو خط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ است، کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} y + 2x = 16 \\ 2y - x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} y + 2x = 16 \\ 4y - 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

در نهایت طول میانهٔ AM برابر است با:

$$AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



۲ ۶۵

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:

برای نوشتن معادلهٔ عمودمنصف پاره خط AB اول از همه باید مختصات وسط پاره خط AB را به کمک رابطهٔ

$$M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = M(1, 4)$$

پیدا کنیم، پس می توان نوشت:

$$m_{AB} = \frac{5-3}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

از طرفی شیب پاره خط AB به کمک رابطهٔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ برابر است با:همچنین واضح است که شیب عمود منصف AB برابر ۲ می باشد. حالا با داشتن شیب عمود منصف و یک نقطه واقع بر آن به نام $M(1, 4)$ معادلهٔ عمود منصف AB

$$y - 4 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 2$$

را پیدا می کنیم، ببینید:

در آخر با توجه به این که خواسته مسئله محل برخورد عمود منصف پاره خط AB با محور x ها است، در معادلهٔ به دست آمده به جای y صفر می گذاریم، پس طول

نقطهٔ برخورد این خط با محور x ها برابر $x = -1$ می باشد (قبوله؟).