

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
235 min	۱۱۴	۶ تا ۲۸
152 min	۱۳۰	۲۹ تا ۴۲
45 min	۱۴۰	۴۳ تا ۵۸
80 min	۱۴۶	۵۹ تا ۷۵
50 min	۱۵۸	۷۶ تا ۸۶
38 min	۱۶۷	۸۷ تا ۱۰۵
12 min	۱۷۹	۱۰۶ تا ۱۱۱

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

بارم‌بندی درس ریاضی ۳

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۷	۲
دوم	۵	۲
سوم	۵	۲
چهارم	۳	۱
	-	۴
پنجم	-	۳/۵
ششم	-	۳/۵
هفتم	-	۲
جمع	۲۰	۲۰

امتحان نهایی



۱۸۶	آزمون ۱: خرداد ماه ۱۴۰۰
۱۸۷	آزمون ۲: شهریور ماه ۱۴۰۰
۱۸۸	آزمون ۳: دی ماه ۱۴۰۰
۱۹۰	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۱
۱۹۱	آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۱
۱۹۲	آزمون ۶: دی ماه ۱۴۰۱
۱۹۴	آزمون ۷: خرداد ماه ۱۴۰۲
۱۹۶	آزمون ۸: شهریور ماه ۱۴۰۲
۱۹۸	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۸

1

بخش



درستنامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

تابع

فصل اول ریاضی ۳، در امتحان نوبت اول، ۷ نمره و در نوبت دوم، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۳ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون توابع چندجمله‌ای، توابع یکنوا و اکیداً یکنوا، ترکیب توابع، رسم نمودار به کمک انتقال، قرینه و ... وارون تابع و ویژگی‌های آن مطرح شده است.

بسته ۴

بسته ۲ و ۳

بسته ۱

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

صفحه ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بسته اول



بسته اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نهایی به صورت درست یا نادرست و هم‌پنین تکمیل کردن پای فالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

الف توابع چندجمله‌ای

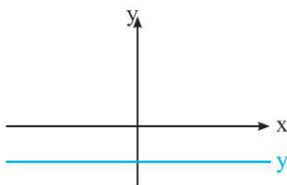
توابعی را که ضابطه آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطه $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی، $a_n \neq 0$ و $n \in \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌گوییم.

نکته! دامنه توابع چندجمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی، یعنی \mathbb{R} خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد، همواره برابر \mathbb{R} است.

مثال هریک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنه \mathbb{R} می‌باشند:

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 - \frac{1}{4}x + 3 \quad g(x) = -3x^7 + 5x + 1$$

f یک تابع چندجمله‌ای از درجه فرد ۵ است و در نتیجه برد تابع f برابر \mathbb{R} است.

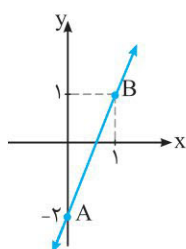


یادآوری با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به صورت یادآوری گفته می‌شود:

۱ تابع چندجمله‌ای از درجه صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد.

مثال نمودار تابع $f(x) = -1$ به صورت مقابل است:

۲ تابع چندجمله‌ای از درجه یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ ، $a \neq 0$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطه دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.



مثال تابع $f(x) = 3x - 2$ یک تابع دو جمله‌ای از درجه اول است. برای رسم نمودار، دو نقطه دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0) - 2 = -2 \Rightarrow A(0, -2)$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1) - 2 = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

دو نقطه A و B را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.

۳ تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ که ضابطه آن به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ ، است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S(x = -\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a})$$

اگر $a > 0$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.

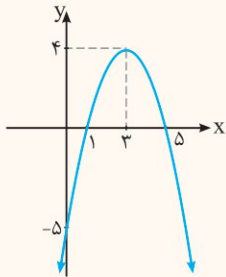
نکته! برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

سؤال نمودار تابع درجه دوم به معادله $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ را رسم کنید.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3 \Rightarrow y_s = f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$$

پاسخ ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:



$$x = 0 \Rightarrow y = -5, \quad y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

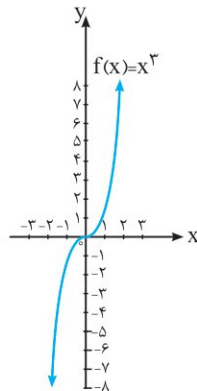
	S			
x	0	1	3	5
y	-5	0	4	0

علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یاد گرفته‌اید، نمودار $y = x^3$ را نیز حفظ کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$ یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر \mathbb{R} ، یعنی مجموعه اعداد حقیقی است. نمودار تابع $y = x^3$ به کمک نقطه‌یابی به صورت مقابل است:

x	f(x) = x ³
-2	-8
-1	-1
-1/2	-1/8
0	0
1/2	1/8
1	1
2	8

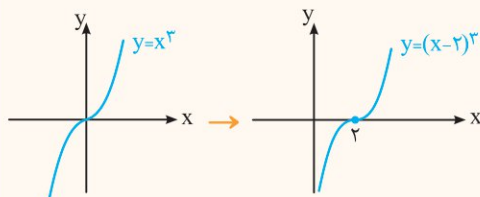


نکته! فقط نمودار توابعی به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به صورت $y = a(x-b)^3 + c$ نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطه تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ به صورت $y = (x+1)^3$ است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

سؤال نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

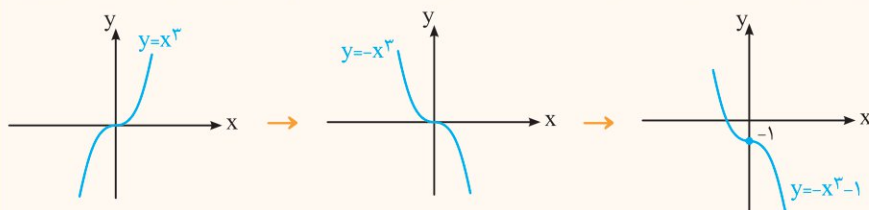
$$y = -x^3 - 1$$

$$y = (x-2)^3$$



پاسخ ۱ اگر نمودار $y = x^3$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = (x-2)^3$ به دست می‌آید.

۲ ابتدا نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^3$ به دست آید. با انتقال نمودار $y = -x^3$ به اندازه یک واحد به سمت پایین،



نمودار $y = -x^3 - 1$ را رسم می‌شود:

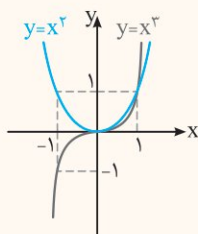
تلمنکر: حواست باشه مقایسه نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین تر قرار می‌گیرد، از سؤالات امتحانی است.

سؤال نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار می‌گیرد؟

پاسخ برای مقایسه نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می‌شوند را مشخص می‌کنیم. یعنی باید معادله $x^2 = x^3$ را حل کنیم:

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

X	-1	0	1	2
$y = x^2$	1	0	1	4
$y = x^3$	-1	0	1	8



پس دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 0$ بر هم منطبق‌اند.

از دو نقطه کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می‌کنیم.

نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، در بازه $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$ ، نمودار $y = x^2$ بالاتر از

نمودار $y = x^3$ قرار دارد و در بازه $(1, +\infty)$ ، نمودار $y = x^3$ بالاتر از

نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیدا یکنوا را یاد می‌گیریم. توابعی را بررسی می‌کنیم که ابتدا نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می‌دهیم.

ب توابع اکیدا صعودی و نزولی

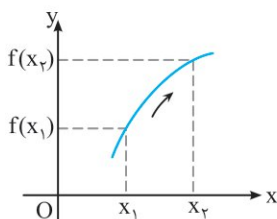
فرض کنیم $A \subseteq D_f$ باشد؛

تعریف می‌گوییم تابع f روی A اکیدا صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

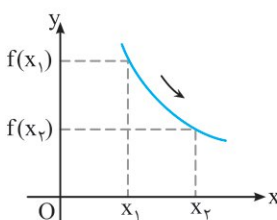
در نمودار توابع اکیدا صعودی، وقتی روی محور x ها، از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار

همواره در حال بالا رفتن است.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



تعریف می‌گوییم f روی A اکیدا نزولی است، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنه f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد. در واقع

نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.

تعریف به تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد، تابع اکیدا یکنوا می‌گوییم.

توابع صعودی و نزولی

تعریف تابع f روی A صعودی است اگر فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in A$:

و تابع f روی A نزولی است اگر تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in A$:

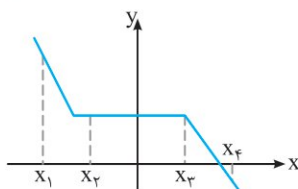
مثال در نمودار زیر، هر چه مقدار x در دامنه تابع f بیش‌تر می‌شود، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند. طبق تعریف، تابع f ، تابعی نزولی است.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$

تعریف به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$



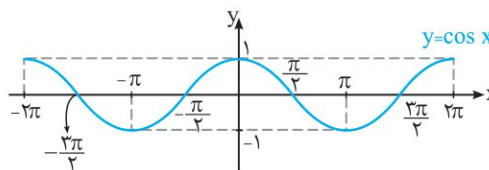
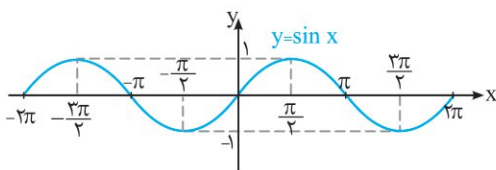
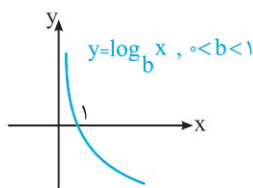
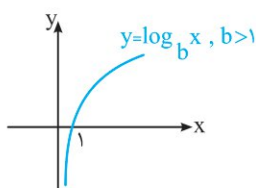
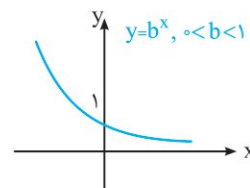
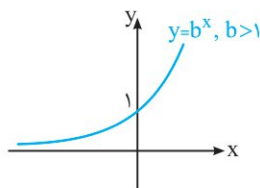
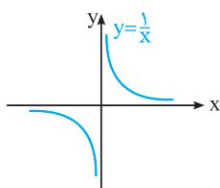
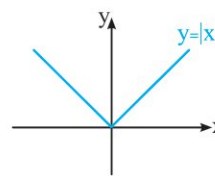
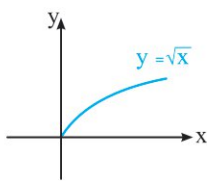
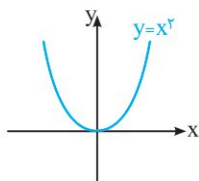
تلمنکر: حواست باشه

تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می‌شود.

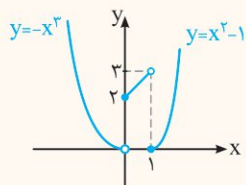
تعریف تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد.

نکته با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

یادآوری در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:

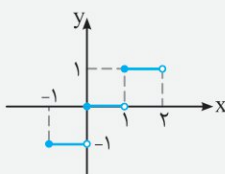


سؤال نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 \leq x < 1 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.



پاسخ با رسم سهمی $y = x^2 - 1$ در بازه $(1, +\infty)$ ، خط $y = x + 2$ در بازه $(0, 1)$ و تابع درجه سوم $y = -x^3$ در بازه $(-\infty, 0)$ ، نمودار تابع f به دست می‌آید:
با توجه به نمودار تابع f ، تابع f روی بازه $(-\infty, 0)$ ، تابعی اکیداً نزولی، روی بازه $(0, 1)$ ، تابعی اکیداً صعودی و در بازه $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع f روی \mathbb{R} ، اکیداً یکنوا نیست.

نکته تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند



خطی به موازات محور x ها باشد.

مثال تابع $y = [x]$ که نمودار آن به صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

● درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(دی ۹۷، خرداد ۹۸)

(شهریور ۱۴۰۰)

(شهریور ۹۸)

(شهریور ۱۴۰۰)

(دی ۱۴۰۰)

۱. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

۲. دامنه توابع چندجمله‌ای برابر \mathbb{R} است.

۳. تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است.

۴. تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

۵. تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

۶. برد تابع $f(x) = 4x^3 + x - 1$ برابر \mathbb{R} است.

● در سؤال‌های ۷ تا ۱۲، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

(شهریور ۹۹)

(دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

(خرداد ۹۸)

(دی ۹۸)

۷. توابع اکیداً یکنوا، همواره هستند.

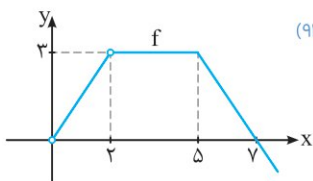
۸. در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

۹. تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی - نزولی) است.

۱۰. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.

۱۱. تابع $y = 2^x$ در دامنه تعریف خود (اکیداً صعودی - اکیداً نزولی) است.

۱۲. تابع f با نمودار مقابل در بازه اکیداً صعودی و در بازه اکیداً نزولی و در بازه $[2, 5)$ ، است. (خرداد ۹۱)



(مشابه کاردرکلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

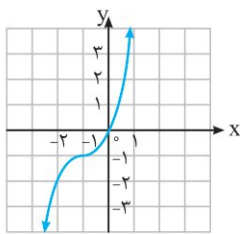
● ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

ت $y = (x+1)^3 - 1$

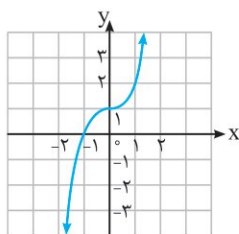
پ $y = (x-1)^3 + 2$

ب $y = -x^3 - 1$

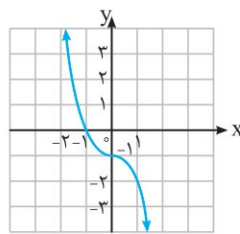
ا $y = x^3 + 1$



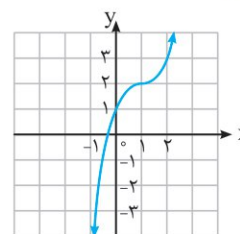
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

● نمودار توابع سؤالات ۱۴ تا ۱۸ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

۱۸. $y = -(x-1)^3 - 1$

۱۶. $y = (x+2)^3 - 1$

۱۴. $y = x^3 - 1$

۱۷. $y = (x-1)^3 + 2$

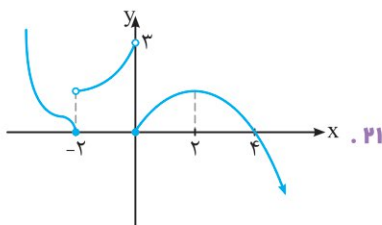
۱۵. $y = -x^3 - 2$

۱۹. نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین‌تر است؟

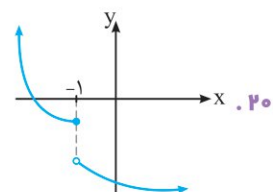
(فعالیت صفحه ۴ کتاب درسی)

● در هر کدام از توابع سؤالات ۲۰ و ۲۱، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۸ کتاب درسی)



۲۱.



۲۰.

۲۲. روی بازه $[0, 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[1, 2]$ اکیداً نزولی باشد.

۲۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی روی \mathbb{R} اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۲۴. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۲۵. ضابطه تابعی را بنویسید که در دامنه خود غیریکتوا باشد.

● نمودار توابع سؤالات ۲۶ تا ۳۲ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

۳۰. $f(x) = -x^3 + 2$

۲۶. $f(x) = -x^2 + 4x$

۳۱. $f(x) = x^2 |x|$

۲۷. $f(x) = x + |x|$

۳۲. $f(x) = \cos x, x \in [-\pi, 2\pi]$

۲۸. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

۲۹. $f(x) = \frac{1}{x}$

۳۳. نمودار هر یک از توابع $y = \log_b x$ و $y = b^x$ را در حالت‌های $b > 1$ و $0 < b < 1$ رسم کنید و در هر حالت نوع یکنوایی تابع را مشخص کنید. هم چنین

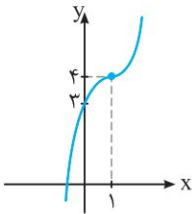
با رسم توابع $y = 2^x - 2$ و $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ ، نوع یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

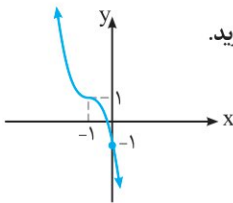
۳۴. تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ -x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

۳۵. نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ را رسم کنید.

۳۶. نمودار تابع $y = a(x-b)^3 + c$ به صورت مقابل است. مقادیر a ، b و c را مشخص کنید.



۳۷. نمودار تابع $f(x) = a(x+b)^3 + c$ به صورت مقابل است. اگر $g(x) = b(x-a)^3 + c$ باشد، مقدار $g(2)$ را به دست آورید.



۳۸. نمودار $f(x) = x^3$ را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود.

نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

ترکیب توابع

صفحه ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

بسته دوم

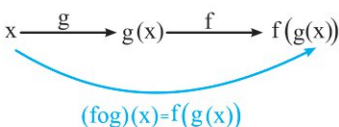


در این قسمت از دو تابع f و g ، تابع f را می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطه تابع مرکب، مقدار عددی و دامنه تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

ترکیب توابع

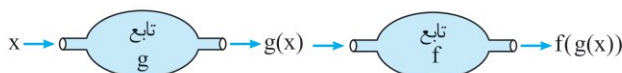
تعریف ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد $f \circ g$ نشان می‌دهیم (بخوانید اف‌جی) و به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ یا $f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$ تعریف می‌کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به صورت مقابل است:



مراحل ساخت تابع fog:

- 1 باید دامنه g باشد. در مرحله اول، ورودی و خروجی g(x) است.
- 2 g(x) باید دامنه f باشد. در مرحله دوم، ورودی و خروجی f(g(x)) است.



نکته! برای به دست آوردن ضابطه (fog)(x)، در تابع f به جای x ضابطه g(x) را قرار می‌دهیم.

سؤال اگر $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = 4x - 5$ دو تابع باشند، ضابطه هریک از توابع fog و gog را مشخص کنید.

پاسخ اگر در ضابطه تابع f به جای x، g(x) قرار دهیم، ضابطه تابع (fog)(x) مشخص می‌شود:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(4x - 5) = 3(4x - 5) - 2 = 12x - 15 - 2 = 12x - 17$$

هم‌چنین با قرار دادن f(x) به جای x در ضابطه تابع g، ضابطه تابع (gof)(x) مشخص می‌شود:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) - 5 = 12x - 8 - 5 = 12x - 13$$

نکته! همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطه fog و gog لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی fog و gog یکسان شوند.

سؤال اگر $f(x) = x^2 - 5x + 2$ و $g(x) = 2x - 1$ باشند، جواب‌های معادله $(fog)(x) = -4$ را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

پاسخ ضابطه تابع fog را به دست می‌آوریم و آن را مساوی -4 قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2$$

$$(fog)(x) = -4 \Rightarrow (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2 = -4$$

$$A^2 - 5A + 2 = -4 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$$

با فرض $A = 2x - 1$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

تلنگر: حواست باشه!

اینکه ضابطه دو تابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی fog یا gog را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

سؤال اگر $f(x) = \sqrt{2x+1}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ دو تابع باشند، مقدار عددی $(fog)(-3)$ و $(gof)(4)$ را به دست آورید.

پاسخ مقدار عددی $(fog)(-3)$ برابر $f(g(-3))$ است. ابتدا مقدار $g(-3)$ را با قرار دادن عدد -3 به جای x در ضابطه g به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(-3) = \frac{-3}{-3+1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(g(-3)) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

حال باید در ضابطه f به جای x، $\frac{3}{2}$ قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow (fog)(-3) = 2$$

برای به دست آوردن مقدار $(gof)(4)$ ، یعنی $g(f(4))$ ابتدا مقدار $f(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f(4) = \sqrt{2 \times 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow g(f(4)) = g(3)$$

حال باید مقدار $g(3)$ را از ضابطه g(x) به دست بیاوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow g(f(4)) = g(3) = \frac{3}{4}$$

سؤال اگر $f = \{(2, -1), (1, 4), (3, 0), (5, 2)\}$ و $g = \{(4, 2), (3, 1), (2, 1), (1, 6)\}$ دو تابع باشند، هریک از توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

مشابه تمرین ۱ کتاب درسی

پاسخ برای مشخص کردن تابع $f \circ g$ ، ابتدا تابع روی g اثر می‌کند:

$$\left. \begin{array}{ll} 4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 & 3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 \\ (f \circ g)(4) = -1 & (f \circ g)(3) = 4 \\ 2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 & 1 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \\ (f \circ g)(2) = 4 & (f \circ g)(1) \text{ وجود ندارد} \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g = \{(4, -1), (3, 4), (2, 4)\}$$

برای مشخص کردن تابع $g \circ f$ ، داریم:

$$(g \circ f)(4) = g(g(4)) = g(2) = 1 \Rightarrow (4, 1) \in g \circ f, (g \circ f)(3) = g(g(3)) = g(1) = 6 \Rightarrow (3, 6) \in g \circ f$$

$$(g \circ f)(2) = g(g(2)) = g(1) = 6 \Rightarrow (2, 6) \in g \circ f, (g \circ f)(1) = g(g(1)) = g(6) \text{ تعریف نشده}$$

$$g \circ f = \{(4, 1), (3, 6), (2, 6)\}$$

بنابراین:

سؤال تابع $h(x) = (x^3 - 1)^2$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو طریق).

پاسخ **طریقه اول** تابع $y = x^3$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای x^3 ، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3, f(x) = (x - 1)^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3 - 1)^2$$

طریقه دوم تابع $y = x^3 - 1$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^3 - 1$ ، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3 - 1, f(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^2$$

دامنه تابع مرکب

برای محاسبه دامنه تابع $g \circ f$ دو روش وجود دارد:

روش اول تابع $g \circ f(x)$ را تشکیل دهیم و دامنه تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطه تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

سؤال اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$$

$$D_{f \circ g} = [0, +\infty), x \geq 0 \Rightarrow (f \circ g)(x) = x$$

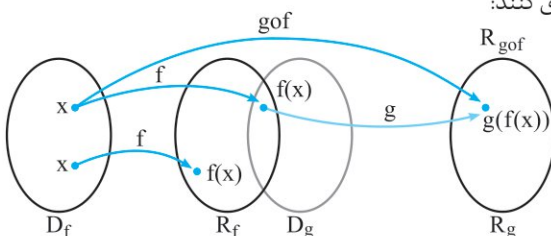
دامنه تابع $y = (\sqrt{x})^2$ مجموعه $[0, +\infty)$ است، بنابراین:

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^2$ ، x بنویسیم، ضابطه تابع به صورت $(f \circ g)(x) = x$ درمی‌آید که دامنه آن برابر \mathbb{R} خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنه تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

تلاشگر: حواست باشه

تعیین دامنه ترکیب دو تابع، یکی از سوالات پرتکرار امتحان نهایی است.

روش دوم دامنه تابع مرکب $g \circ f$ ، مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:



۱ x در دامنه f قرار داشته باشد.

۲ $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

۴
بخش



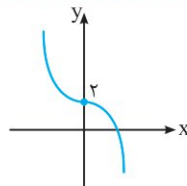
پاسخنامه

۱ | درست

۲ | درست

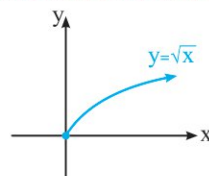
۳ | نادرست

نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ | نادرست

نمودار $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است:



۵ | درست، زیرا بزرگ‌ترین توان x برابر ۳ است.

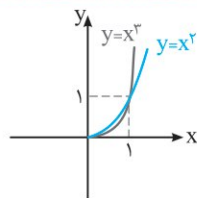
۶ | درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد برابر \mathbb{R} است. f یک تابع سه‌جمله‌ای از درجه ۳ است و در نتیجه برد آن برابر \mathbb{R} است.

۷ | یکنوا

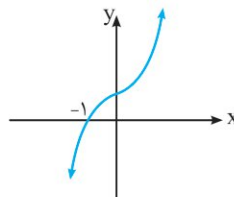
۸ | پایین

نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ درباره $(0, 1)$ به صورت مقابل است:



۹ | صعودی

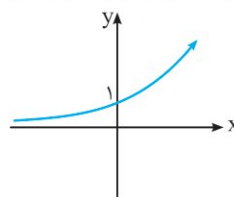
نمودار تابع $y = (x+1)^3$ به صورت مقابل است:



۱۰ | ثابت

۱۱ | اکیداً صعودی

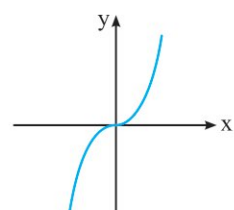
نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:



۱۲ | $(0, 2)$ ، $(5, +\infty)$ ، ثابت

۱۳ | آ) اگر نمودار $y = x^3$ که به صورت

مقابل می‌باشد را به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = x^3 + 1$ به دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال یافته نمودار $y = x^3$ به اندازه یک واحد به سمت بالا است.

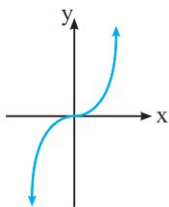


ب) اگر نمودار $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور x قرینه کنیم و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y = -x^3 - 1$ به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y = -x^3 - 1$ می‌باشد.

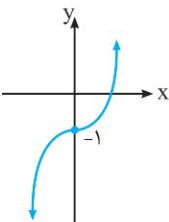
پ) اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ می‌باشد.

ت) اگر نمودار $y = x^3$ را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y = (x+1)^3 - 1$ به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y = (x+1)^3 - 1$ می‌باشد.

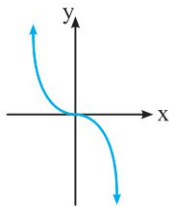
• نمودار تابع $y = x^3$ به صورت مقابل است:



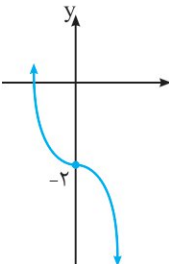
۱۴ | اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y = x^3 - 1$ به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.



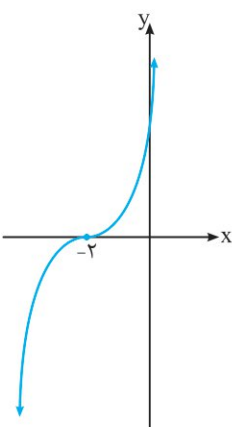
۱۵ | ابتدا نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^3$ به دست آید:

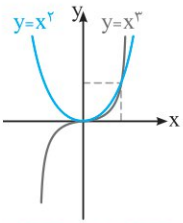


با انتقال نمودار $y = -x^3$ به اندازه دو واحد به سمت پایین، نمودار $y = -x^3 - 2$ به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.



۱۶ | با انتقال نمودار $y = x^3$ به اندازه ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y = (x+2)^3$ به دست می‌آید:





بیش‌تر از مقادیر x^2 است و در نتیجه نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

• فرض کنیم $A \subseteq D_f$ باشد. تابع f روی A اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع f روی A صعودی است، هرگاه:

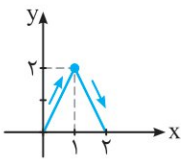
$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع f روی A نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

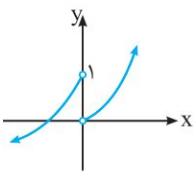
۲۰ | با توجه به شکل و با افزایش x ، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی \mathbb{R} ، اکیداً نزولی است.

۲۱ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty, -2]$ و $[2, +\infty)$ ، اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ ، تابعی اکیداً صعودی است.



۲۲ | اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار f در بازه $[0, 1]$ در حال صعود و در بازه $[1, 2]$ در حال نزول است.

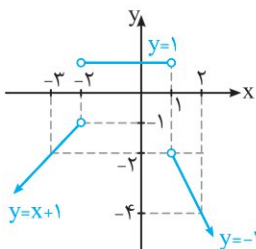
۲۳ | اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه f روی بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در \mathbb{R} اکیداً صعودی نمی‌باشد.



برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیرپیوسته را رسم کنیم.

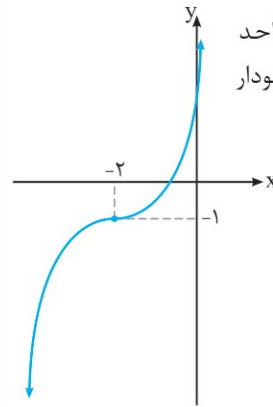
۲۴ | برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای f ، باید خط $y = x + 1$ را در محدوده $(-\infty, -2)$ ، خط $y = 1$ را در محدوده $(-2, 1)$ و خط $y = -2x$ را در محدوده $(1, +\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	-3	-2	x	-2	1	x	1	2
$y = x + 1$	-2	-1	$y = 1$	1	1	$y = -2x$	-2	-4

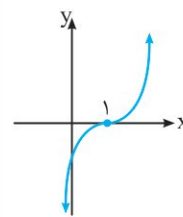


با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, -2)$ ، تابعی اکیداً صعودی، در بازه $(-2, 1)$ ، تابعی ثابت و در بازه $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.

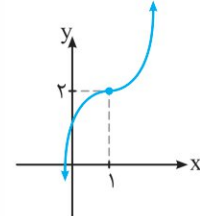
نمودار $y = (x + 2)^3$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y = (x + 2)^3 - 1$ به دست آید: دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.



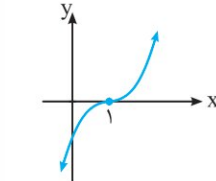
۱۷ | اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y = (x - 1)^3$ به دست می‌آید:



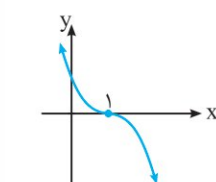
با انتقال نمودار $y = (x - 1)^3$ ، به اندازه دو واحد به سمت بالا نمودار $y = (x - 1)^3 + 2$ به دست می‌آید. دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} است.



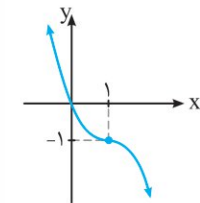
۱۸ | اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y = (x - 1)^3$ به دست می‌آید:



با قرینه کردن نمودار $y = (x - 1)^3$ نسبت به محور x ها، نمودار $y = -(x - 1)^3$ به دست می‌آید:

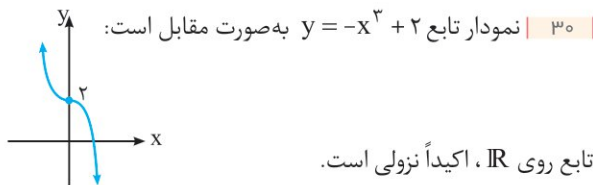


نمودار $y = -(x - 1)^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -(x - 1)^3 - 1$ به دست آید:



دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.

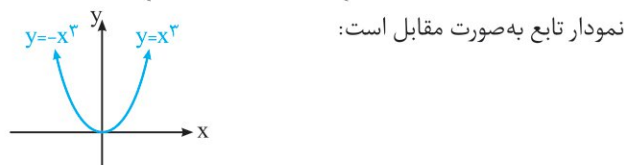
۱۹ | در بازه $(-\infty, 0)$ ، x^2 عددی مثبت و x^3 عددی منفی است. پس در بازه $(-\infty, 0)$ ، نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ است. در $x = 0$ و $x = 1$ ، مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازه $(0, 1)$ ، x^2 بیش‌تر از x^3 است و در نتیجه نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار می‌گیرد و برای $x \in (1, +\infty)$ ، مقادیر x^3



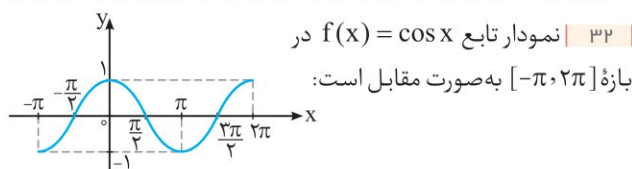
۳۱ | ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای

می‌نویسیم:

$$y = x^2 |x| = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

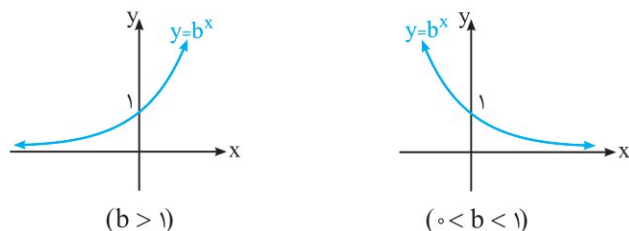


تابع در بازه $[-\infty, 0]$ ، اکیداً نزولی و روی بازه $[0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است.



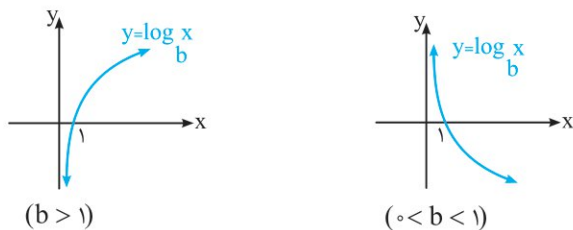
با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi, 0]$ و $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, \pi]$ ، اکیداً نزولی است. تابع روی بازه $[-\pi, 2\pi]$ غیریکنوا است.

۳۳ | نمودار تابع نمایی $y = b^x$ به صورت زیر است:

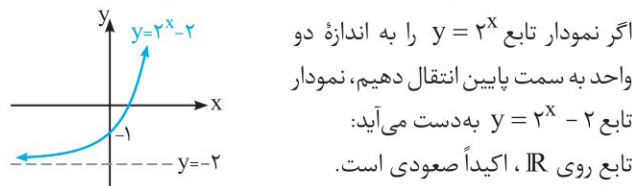


در حالت $b > 1$ ، تابع $y = b^x$ روی \mathbb{R} ، اکیداً صعودی و در حالت $0 < b < 1$ ، تابع $y = b^x$ ، اکیداً نزولی است.

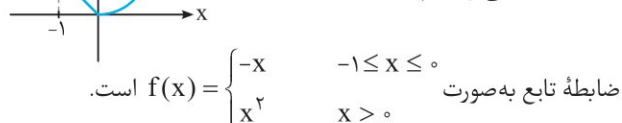
نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_b x$ به صورت زیر است:



در حالت $b > 1$ ، تابع $y = \log_b x$ روی $(0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی و در حالت $0 < b < 1$ ، تابع $y = \log_b x$ ، تابعی اکیداً نزولی است.



۲۵ | نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطه آن را می‌نویسیم:

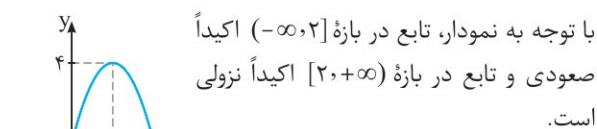


۲۶ | برای رسم نمودار $y = -x^2 + 4x$ ، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \Rightarrow y_S = -(2)^2 + 4(2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

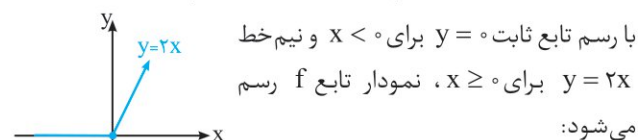


۲۷ | با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم

و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

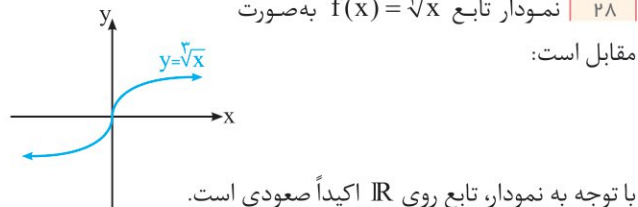
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq 0 \\ x + (-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

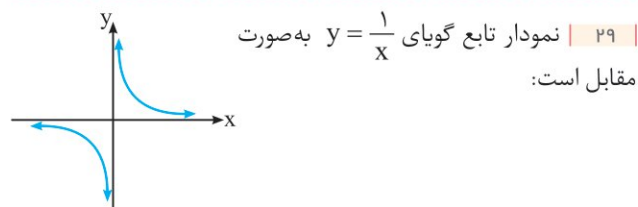


نمودار f در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-\infty, 0]$ ، هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازه $(-\infty, +\infty)$ صعودی است.

۲۸ | نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ به صورت



۲۹ | نمودار تابع گویای $y = \frac{1}{x}$ به صورت



تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی \mathbb{R} غیریکنوا است.

۳

بخش سوم



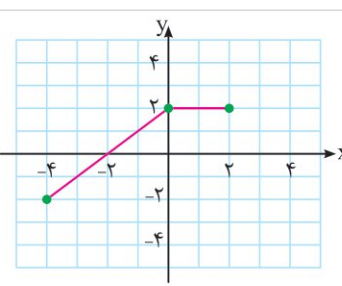
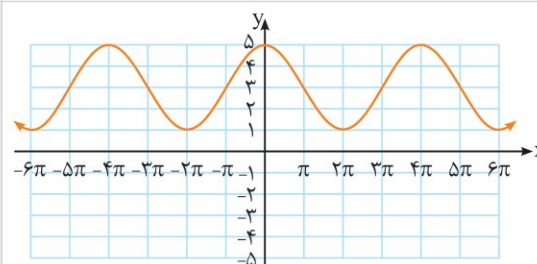
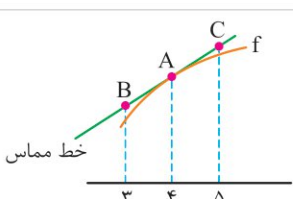
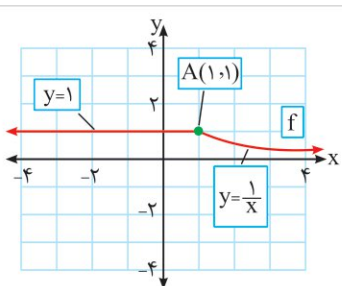
امتحان نهایی

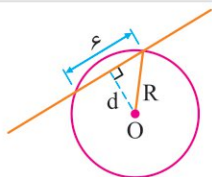


نمره

سؤالات امتحانی

ردیف

۰/۵	۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (آ) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. (ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.
۰/۵	۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (آ) بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر است. (ب) شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.
۰/۷۵	۳	با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید. 
۱/۲۵	۴	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد؛ (ب) مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.
۱	۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید. 
۱	۶	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.
۲	۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (آ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{ 3x+1 }$ (پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$
۱	۸	برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید. 
۱	۹	با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه A ، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست. 

۱/۵	مشق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ (آ) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$ (ب)	۱۰
۱/۵	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید؛ (آ) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید. (ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم 35 m/s است.	۱۱
۱/۵	اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	۱۲
۱/۵	در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.	۱۳
۱/۵	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(-5, 1)$ است. (آ) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. (ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. (اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است).	۱۴
۱/۵	مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.	۱۵
		
۲	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟	۱۶

★ موفق و مؤید باشید. ★

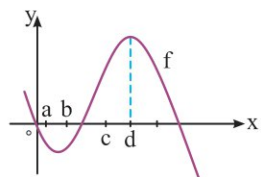


ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۵: شهریور ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره															
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (الف) دامنه توابع چندجمله‌ای برابر \mathbb{R} است. (ب) دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند. (پ) تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.	۰/۷۵															
۲	نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.	۰/۷۵															
۳	با توجه به جدول مقابل، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. $(g \circ f)(1)$ (آ) $(f \circ (f + g))(0)$ (ب)	۱/۵															
	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-۱</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>۰</td> <td>-۱</td> <td>۲</td> <td>-۵</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>-۲</td> </tr> </table>	x	-۱	۰	۱	۲	$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵	$g(x)$	۲	۳	۴	-۲	
x	-۱	۰	۱	۲													
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵													
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲													
۴	معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دوره تناوب آن 8π است.	۱															
۵	مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟	۱															
۶	حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ محاسبه نمایید.	۱															
۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ (پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \tan x$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$ (آ)	۲															

۸	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول های a, b, c, d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.										
۱	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f'(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>۰</td> </tr> <tr> <td>۰/۵</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-۰/۵</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> 	x	$f'(x)$		۰	۰/۵		۲		-۰/۵	
x	$f'(x)$										
	۰										
۰/۵											
۲											
-۰/۵											
۹	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.										
۱۰	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده ترین مشتق الزامی نیست). $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ آ $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}$ ب										
۱۱	تابع با ضابطه $f(x) = 7\sqrt{x} + 5$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آ) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟										
۱۲	تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟										
۱۳	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن ها ۱۰ باشد و حاصل ضرب شان کمترین مقدار ممکن گردد.										
۱۴	در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه ای با مختصات $(4, 5)$ باشد؛ آ) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.										
۱۵	وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.										
۱۶	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟										
۲۰	★ موفق و مؤید باشید. ★										



ساعت شروع: ۱۰ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۶ دی ۱۴۰۰

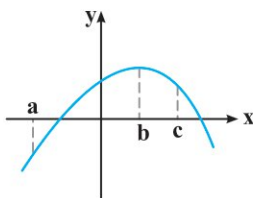
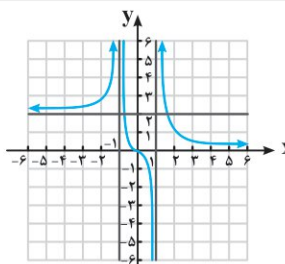
ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. آ) تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است. ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آن گاه $(f \circ g)(4) = 5$. پ) دو تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.	۰/۷۵
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. آ) نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالتر، پایین تر) ب) چند جمله ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله ای بخش پذیر است. $((x+1), (x-1))$	۰/۵



ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۷: خرداد ۱۴۰۱

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>آ) تابع $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ یک تابع درجه دوم است.</p> <p>ب) تابع $f(x) = x^3$، تابعی اکیداً صعودی است.</p> <p>پ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.</p>	۰/۷۵
۲	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>آ) اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.</p> <p>ب) باقی مانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ برابر است.</p> <p>پ) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر است.</p>	۰/۷۵
۳	<p>سؤالات چهارگزینه‌ای:</p> <p>I. برد تابع f بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ کدام یک از موارد زیر است؟</p> <p>آ) $(-8, 0)$ ب) $(-12, 0)$ پ) $(1, 9)$ ت) $(-10, 2)$</p> <p>II. کدام یک از نقاط زیرروی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟</p> <p>آ) $(0, 0)$ ب) $(1, 0)$ پ) $(0, -1)$ ت) $(-1, 0)$</p> <p>III. با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_a, m_b, m_c نمایش داده شود. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟</p> <p>آ) $m_c > m_b > m_a$</p> <p>ب) $m_b > m_a > m_c$</p> <p>پ) $m_a > m_b > m_c$</p> <p>ت) $m_c = m_b = m_a$</p> 	۱/۵
۴	<p>اگر ورودی ماشین زیر ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟</p> <p>خروجی $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow x$ ورودی</p>	۰/۷۵
۵	<p>معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.</p>	۱
۶	<p>معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.</p>	۱
۷	<p>نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.</p> <p>آ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$</p> <p>پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$</p> <p>ت) $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) =$</p> 	۱
۸	<p>حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$</p>	۰/۷۵
۹	<p>اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.</p>	۱