درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی ۳ تجربی

(دوازدهم)

ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضی ۳ سال دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعهٔ این کتاب، تقریباً هر آن‌چه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دستهٔ اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دستهٔ دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شوند. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دستهٔ اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دستهٔ سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دستهٔ دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است. در انتهای کتاب هم آزمون‌هایی برای جمع‌بندی و مرور هر فصل قرار داده‌ایم.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعهٔ هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «ریاضی ۳ دوازدهم سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد ویراستاری خانم‌ها مهدیه جمشیدی (ویراست اول) و عاطفه ربیعی (ویراست اول و دوم) و خانم نسیم نوریان برای صفحه‌آرایی کتاب تشکر کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس و خانم‌ها هاله ایمانی و زینب آدینه‌وند برای کمک به ویرایش کتاب و خانم سکینه مختار، مدیر واحد فنی و ویرایش که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

فصل اول

تـــابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

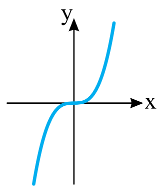
توابع چندجمله‌ای

تعریف هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را که ضابطهٔ آن به صورت

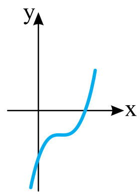
$$f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱ x + a_۰$$

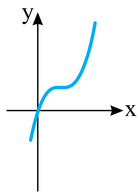
است، که در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است و $a_۰$، $a_۱$، ... و a_n عددهایی حقیقی هستند و $a_n \neq ۰$، **تابعی چندجمله‌ای** از **درجهٔ n** می‌نامند.

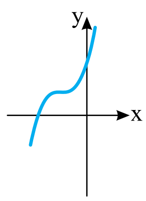
نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ ۳ با ضابطهٔ $f(x)=x^۳$ به صورت مقابل است. چون هر خط موازی محور x نمودار این تابع را قطع می‌کند، پس برد این تابع $\mathbb{R}$ است (توجه کنید که طبق تعریف، دامنهٔ این تابع هم $\mathbb{R}$ است). همین‌طور، چون هر خط موازی محور x این نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس این تابع یک‌به‌یک نیز هست. به این ترتیب، تابع f وارون‌پذیر است.

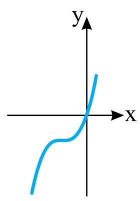


تست ۱ نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۳-۱$ کدام است؟

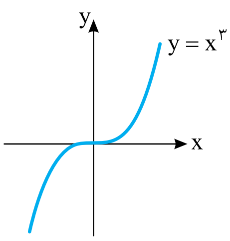
۱) 

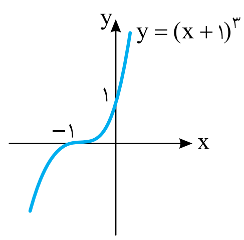
۲) 

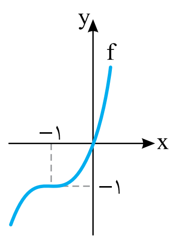
۳) 

۴) 

راه‌حل برای رسم کردن نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.





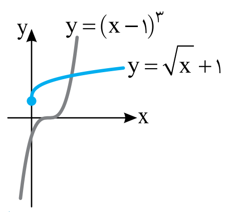


تست ۲ نمودار تابع $y=\sqrt{x}+۱$ در چند نقطه نمودار تابع $y=(x-۱)^۳$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x}+۱$ به‌دست بیاید. نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=(x-۱)^۳$ به‌دست بیاید. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که این دو نمودار یک نقطهٔ تقاطع دارند.

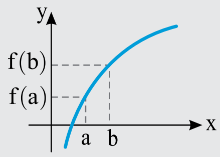


توابع صعودی و نزولی

تعریف تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **اکیداً صعودی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$$

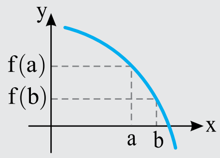
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **اکیداً صعودی** است.



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **اکیداً نزولی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$$

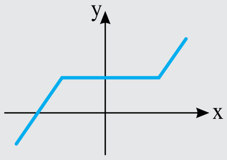
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **اکیداً نزولی** است.



- اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A **اکیداً یکنوا**ست.
- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **صعودی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\le f(b)$$

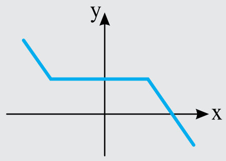
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **صعودی** است.



- تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ **نزولی** می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\ge f(b)$$

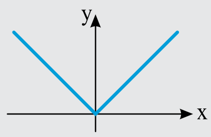
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش **نزولی** است.



- اگر تابع f روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A **یکنوا**ست.

تذکر تابع ثابت روی هر زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش هم صعودی است هم نزولی. همچنین، تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

تعریف اگر تابع f که روی مجموعهٔ $A\subseteq D_f$ نه صعودی باشد نه نزولی، روی این مجموعه **غیریکنوا**ست.



تابعی غیریکنوا

تذکر ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا باشد، اما روی زیرمجموعه‌هایی از دامنه‌اش یکنوا باشد.

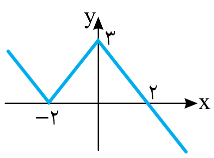
تست ۳ تابع $f=\{(۱,۲),(۲,m-۱),(۳,۷-m)\}$ صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $۳\le m\le ۴$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $m\ge ۴$ ۴) $m\le ۳$

راه‌حل با توجه به تعریف تابع صعودی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱<۲\Rightarrow f(۱)\le f(۲)\Rightarrow ۲\le m-۱\Rightarrow m\ge ۳\\ ۲<۳\Rightarrow f(۲)\le f(۳)\Rightarrow m-۱\le ۷-m\Rightarrow ۲m\le ۸\Rightarrow m\le ۴\end{cases}\Rightarrow ۳\le m\le ۴$$

تست ۴ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. تابع f روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(-۲,۲)$
۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(۰,+\infty)$

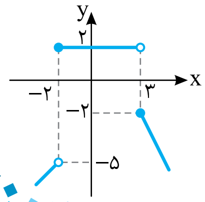
راه‌حل تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۲]$ و $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-۲,۰]$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(-۲,۰)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[-۲,۰]$ است.

تست ۵

تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<-۲ \\ ۲ & -۲\leq x<۳ \\ -۲x+۴ & x\geq ۳ \end{cases}$ روی بازهٔ $(-\infty, a)$ صعودی است. بیشترین مقدار a کدام است؟

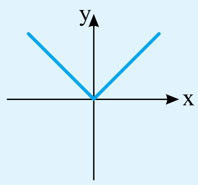
۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

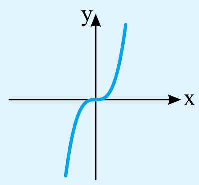
راه‌حل تابع $y=x-۳$ روی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ اکیداً صعودی است. تابع $y=۲$ روی بازهٔ $[-۲, ۳)$ تابعی ثابت است، پس هم نزولی است هم صعودی. تابع $y=-۲x+۴$ روی بازهٔ $[۳, +\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty, ۳)$ صعودی است، پس بیشترین مقدار a برابر ۳ است.

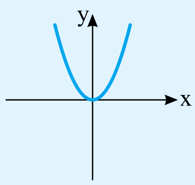


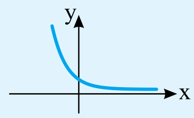
نکته

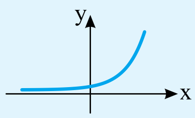
یکنوایی برخی توابع معروف را می‌توان از روی نمودار آنها مشخص کرد.

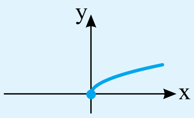

$y=|x|$، غیریکنوا

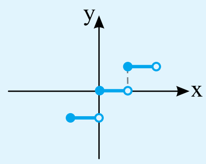

$y=x^۳$، اکیداً صعودی

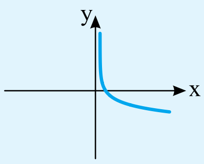

$y=x^۲$، غیریکنوا

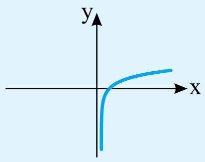

$y=a^x$، $۰<a<۱$، اکیداً نزولی

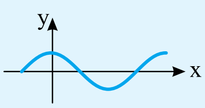

$y=a^x$، $a>۱$، اکیداً صعودی

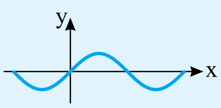

$y=\sqrt{x}$، اکیداً صعودی


$y=[x]$، صعودی


$y=\log_a x$، $۰<a<۱$، اکیداً نزولی


$y=\log_a x$، $a>۱$، اکیداً صعودی


$y=\cos x$، غیریکنوا


$y=\sin x$، غیریکنوا

تست ۶

تابع نمایی $f(x)=(۳k+۱)^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $۰<k<\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}<k<۰$ ۳) $-\frac{۱}{۳}<k<\frac{۱}{۳}$ ۴) $k>۰$

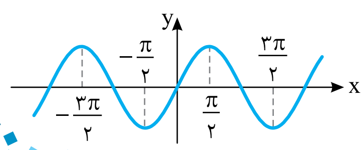
راه‌حل اگر تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a>۱$. بنابراین $۳k+۱>۱$، پس $k>۰$.

تست ۷

تابع $f(x)=\sin x$ روی بازهٔ $[a, \frac{۳\pi}{۲}]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

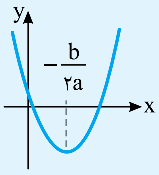
راه‌حل با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ معلوم می‌شود که حداقل مقدار a برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.



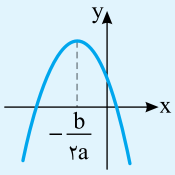
نکته

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{2}+bx+c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

- اگر $a>0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
- اگر $a<0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



$a>0$



$a<0$

تست ۸

تابع $f(x)=2x^{2}-10x$ روی بازهٔ $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

راه‌حل تابع $f(x)=2x^{2}-10x$ روی بازهٔ $(-\infty, \frac{5}{2}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[\frac{5}{2}, +\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین حداقل مقدار a برابر $\frac{5}{2}$ است.

تست ۹

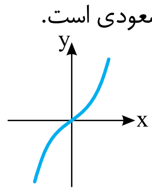
کدام تابع روی $\mathbb{R}$ یکنوا نیست؟

۱) $y=x|x|$ ۲) $y=x+|x|$ ۳) $y=|x|-x$ ۴) $y=x|x-1|$

راه‌حل نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

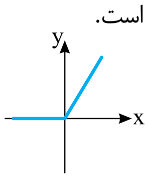
گزینهٔ (۱) تابع $y=x|x|$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

$$y=x|x|=\begin{cases} x^{2} & x\geq 0 \\ -x^{2} & x<0 \end{cases}$$



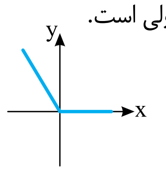
گزینهٔ (۲) تابع $y=x+|x|$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است.

$$y=x+|x|=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



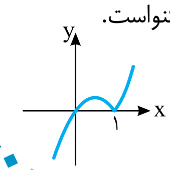
گزینهٔ (۳) تابع $y=|x|-x$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

$$y=|x|-x=\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$$



گزینهٔ (۴) تابع $y=x|x-1|$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

$$y=x|x-1|=\begin{cases} x^{2}-x & x\geq 1 \\ -x^{2}+x & x<1 \end{cases}$$



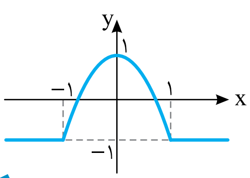
تست ۱۰

تابع $f(x)=|x^{2}-1|-x^{2}$ روی بازهٔ $[a , b]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 1 ۴) 2

راه‌حل ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

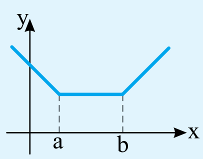
$$f(x)=\begin{cases} x^{2}-1-x^{2} & x^{2}\geq 1 \\ -x^{2}+1-x^{2} & x^{2}\leq 1 \end{cases}=\begin{cases} -1 & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ -2x^{2}+1 & -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$



بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1 , 0]$ اکیداً صعودی است. پس $a=-1$، $b=0$ و در نتیجه $b-a=1$.

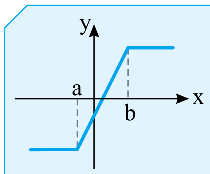
نکته

نمودار تابع $f(x)=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$ به شکل مقابل است. واضح است که تابع f روی بـازهٔ $(-\infty, b]$ نزولـی، روی بازهٔ $(-\infty, a]$ اکیـداً نزولی، روی بازهٔ $[a, +\infty)$ صعـودی، روی بازهٔ $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.

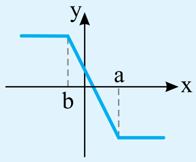


نکته

اگر $a<b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی، روی بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



اگر $a>b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[b, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه‌های $(-\infty, b]$ و $[a, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

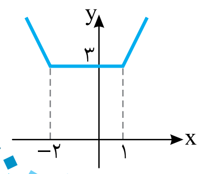


تست ۱۱

تابع $f(x)=|x-1|+|x+2|$ روی بازهٔ $[a , +\infty)$ صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) -2

راه‌حل نمودار تابع f به صورت مقابل است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $[-2 , +\infty)$ و هر بازه‌ای به صورت $[b , +\infty)$ که $b \geq -2$، صعودی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر -2 است.



تست ۱۲

به‌ازای چه مقادیری از m، تابع $f(x)=|x-m+1|-|x-3m+3|$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $m \leq 1$ ۲) $m \geq 1$ ۳) $m>1$ ۴) $m<1$

راه‌حل نمودار تابع $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت  یا  است، که حالت اول به شرط $a<b$ و حالت دوم به شرط $a>b$ رخ می‌دهد. اکنون دقت کنید که $f(x)=|x-\underbrace{(m-1)}_{a}|-|x-\underbrace{(3m-3)}_{b}|$. بنابراین برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، باید $a \geq b$:

$$m-1 \geq 3m-3 \Rightarrow 2m \leq 2 \Rightarrow m \leq 1$$

نکته

۱) اگر تابع f صعودی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a<b$.

۲) اگر تابع f نزولی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a>b$.

تست ۱۳

تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی است و $f(3x-1)<f(2-x)$. حدود x کدام است؟

۱) $x>1$ ۲) $x<1$ ۳) $x>\frac{3}{4}$ ۴) $x<\frac{3}{4}$

راه‌حل چون تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی است، پس

$$f(3x-1)<f(2-x) \Rightarrow 3x-1>2-x \Rightarrow 4x>3 \Rightarrow x>\frac{3}{4}$$

تست ۱۴

اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-f(x)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 2]$ ۲) $[2, +\infty)$ ۳) $[0, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 0]$

راه‌حل باید $-f(x) \geq 0$، پس $f(x) \leq 0$. از طرف دیگر، چون تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $f(2)=0$، پس

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(2) \Rightarrow x \geq 2$$

بنابراین $D_g=[2, +\infty)$.

نکته

۱) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.

۲) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.

۳) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز صعودی است.

۴) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز نزولی است.

۵) اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.

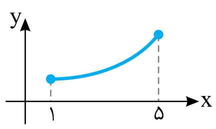
۶) اگر f تابعی نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است.

۷) اگر f تابعی صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ نزولی است.

۸) اگر f تابعی نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ صعودی است.

تست ۱۵

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟



۱) $y=\frac{1}{f(x)}$

۲) $y=f^2(x)$

۳) $y=x^2f(x)$

۴) $y=xf(x)$

راه‌حل تابع f روی دامنه‌اش اکیداً صعودی با مقادیر مثبت است. بنابراین تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

تست ۱۶

اگر تابع f^3 روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر حتماً روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $y=f(x)+2x^2$

۲) $y=x^2f(x)$

۳) $y=x^2-f(x)$

۴) $y=-f(x)$

راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع‌های f و f^3 یکسـان اسـت. همچنین، اگر a و b در دامنهٔ f باشـند و $a<b$، چون تابع f^3 روی $\mathbb{R}$ صعودی است، پس

$$f^3(a)\le f^3(b)\Rightarrow f(a)\le f(b)\Rightarrow -f(a)\ge -f(b)$$

یعنی تابع $-f$ حتماً روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

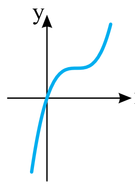
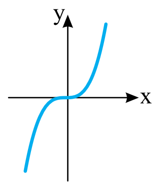
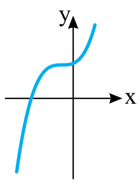
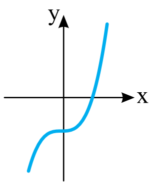
فصل اول

درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

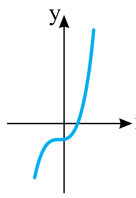
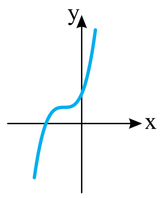
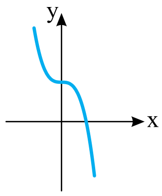
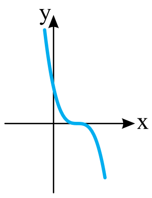
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توابع چندجمله‌ای، صعودی و نزولی ۱

۱- نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۳+۱$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲- نمودار تابع $f(x)=-x^۳+۲$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳- نمودار تابع $f(x)=x^۳-۲$ چند بار خط $y=x$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴- نقطهٔ تلاقی نمودار توابع $f(x)=x^۳-۲$ و $g(x)=-x^۳$ در کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۵- کدام تابع صعودی است؟

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴)\}$
۲) $f=\{(۲,۳),(۴,۳),(۵,۷)\}$
۳) $f=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۱)\}$
۴) $f=\{(-۱,-۱),(-۲,۱),(۳,۰)\}$

۶- کدام تابع اکیداً نزولی است؟

۱) $f=\{(-۳,-۱),(-۲,۲),(-۱,۰)\}$
۲) $f=\{(۱,۲),(۰,۲),(-۱,۰)\}$
۳) $f=\{(-۱,-۲),(-۳,۰),(۱,-۶)\}$
۴) $f=\{(۰,-۱),(-۱,-۲),(-۲,-۲)\}$

۷- کدام تابع غیریکنوا است؟

۱) $f=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۱,۳)\}$
۲) $g=\{(۲,۱),(۳,۰),(۴,-۱)\}$
۳) $h=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲)\}$
۴) $k=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۰)\}$

۸- اگر تابع $f=\{(۱,۲a+۱),(۲,a-۲),(۳,۲-a)\}$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a\geq -۳$ ۲) $a\geq -۲$ ۳) $a\geq ۲$ ۴) $a\geq ۳$

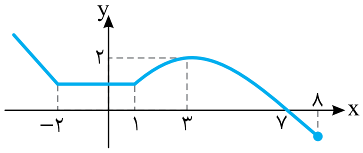
۹- اگر تابع $f=\{(۱,a^۲-۱),(۲,a+۱),(۳,۳a-۱)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-۱<a<۲$ ۲) $۱<a<۲$ ۳) $۰<a<۲$ ۴) $-۱<a<۱$

۱۰- تابع $f=\{(۱,a-۲),(۲,۳a+۴),(۳,۲a-b)\}$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) -۵

۱۱- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۸

۱۲- تابع $f(x)=۲x^۲-۴x+۳$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-۲,۱)$
۲) $(۱,۲)$
۳) $(-۲,۲)$
۴) $(۰,+\infty)$

۱۳- اگر $-۱<m<۱$ و $m\neq ۰$، آن‌گاه تابع $g(x)=|m|^x$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

۱) نه صعودی نه نزولی
۲) صعودی
۳) اکیداً صعودی
۴) اکیداً نزولی

۱۴- کدام تابع روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ x-۱ & x<۰ \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} -x+۱ & x\geq ۰ \\ -x-۱ & x<۰ \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} -x-۱ & x\geq ۰ \\ -x+۱ & x<۰ \end{cases}$

۱۵- تابع $f(x)=\dfrac{۱}{-x+۲}$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۱۶- اگر f، تابعی اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد و $f(۲x+۱)<f(x)$، مجموعهٔ مقادیر x کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$
۲) $(-\infty,۱)$
۳) $(-\infty,۵)$
۴) $(-\infty,-۱)$

۱۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۱۶^{۲x-۲}\geq ۸^{۳x-۱}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۵]$
۲) $(۵,+\infty)$
۳) $(-۵,۵)$
۴) $(-\infty,-۵]$

۱۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\sqrt{۲}-۱)^{۳x-۱}+۱>\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$
۲) $(-\infty,\frac{۲}{۳})$
۳) $(\sqrt{۲},+\infty)$
۴) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$

۱۹- اگر $-۱<\log x<۱$، حدود x کدام است؟

۱) $x\in(۰,۱۰)$
۲) $x\in(\frac{۱}{۱۰},۱)$
۳) $x\in(\frac{۱}{۱۰},۱۰)$
۴) $x\in(\frac{۱}{۱۰},+\infty)$

۲۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_۳(۱۰-x)\leq ۲$ کدام است؟

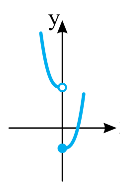
۱) $(۱,۲]$
۲) $[۱,+\infty)$
۳) $[۱,۹)$
۴) $[۱,۱۰)$

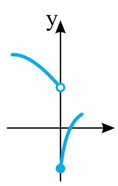
۲۱- اگر $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)>۲$، حدود x کدام است؟

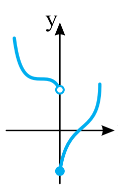
۱) $x>-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۳}{۴}<x<۱$
۳) $x<-\frac{۳}{۴}$
۴) $-۱<x<-\frac{۳}{۴}$

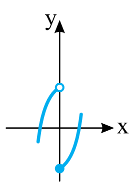
توابع چندجمله‌ای، صعودی و نزولی (۲)

۲۲- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳-۱ & x\geq ۰ \\ -x^۳+۲ & x<۰ \end{cases}$ کدام است؟

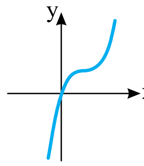
۱)


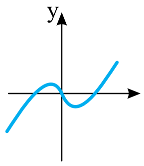
۲)


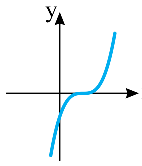
۳)


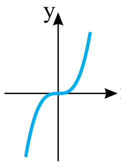
۴)


۲۳- نمودار تابع $f(x)=x^{۲}(x-۳)+۳x$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}(x^{۳}+۱)$ خط $y=k$ را در یک نقطه قطع می‌کند. حدود k کدام است؟

۱) $-۱\leq k\leq ۱$ ۲) $-۱\leq k<۱$ ۳) $-۱<k<۱$ ۴) $-۱<k\leq ۱$

۲۵- به‌ازای چند عدد صحیح x تابع $f=\{(-۲,۴x-۳),(۰,x^{۲}),(x^{۲},۹)\}$ صعودی است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۶- تابع $f=\{(۱,۵),(۲,|m|),(۴,\frac{۴}{|m|})\}$ نزولی است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۷- تابع نمایی $f(x)=(k^{۲}-۱)^{x}$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $|k|>\sqrt{۲}$ ۲) $|k|>۱$ ۳) $۱<|k|<\sqrt{۲}$ ۴) $|k|<\sqrt{۲}$

۲۸- تابع $f(x)=(k^{۲}+\frac{۱}{۲})^{x}$ روی $\mathbb{R}$ هم صعودی است و هم نزولی. تابع $g(x)=k^{۲x}$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیریکنوا ۴) ثابت

۲۹- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(a^{۲}-۱)>f(۳a+۳)$، حدود a کدام است؟

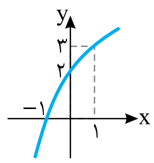
۱) $a<۴$ ۲) $-۱<a<۴$ ۳) $a<-۱$ ٤) $a>۴$

۳۰- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x^{۲})\leq ۰$ ۲) $x\neq ۰\Rightarrow f(x)\leq f(\frac{۱}{x})$

۳) $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(|x|)\leq f(x)$ ۴) $x\geq ۰\Rightarrow f(x)\leq f(\sqrt{x})$

۳۱- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، کدام نابرابری همواره برقرار نیست؟



۱) $f(|x|)\geq ۲$ ۲) $f(x^{۲}+۱)\geq ۳$

۳) $f([x]-x)>۰$ ۴) $f(\sin x)\geq ۳$

۳۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\frac{۷}{۵})^{۳-۲x}<(\frac{۵}{۷})^{x+۲}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۵)$ ۲) $(-۵,+\infty)$ ۳) $(-۵,۵)$ ۴) $(۵,+\infty)$

۳۳- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴^{x-۳}<۳۲^{۵-x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۳۱}{۷})$ ۲) $(-\infty,\frac{۳۵}{۳})$ ۳) $(\frac{۲۱}{۵},+\infty)$ ۴) $(\frac{۳۲}{۳},+\infty)$

۳۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲x+۱}>(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{x+۲}$ کدام است؟

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $(-\infty,۰)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۳۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴^{x+۱}-۵\times ۲^{x}+۱\geq ۰$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

۳۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۳-۳^{۱-۲x}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $[۰,+\infty)$

۳۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲^x-۸}}{\sqrt{۸۱-۳^x}}$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۳۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲^{x+۱}-۴^x}$ بازهٔ $(-\infty,a]$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۹- چند عدد طبیعی در نامعادلهٔ $\log_۲(\log_۳(۲x+۱))>۲$ صدق نمی‌کنند؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۹ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۴۰- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $-۳<\log_{\frac{۱}{۵}}(۴x+۱)<-۲$ صدق می‌کنند؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۴۱- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log(x+۲)>\log(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(-\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۲,-\frac{۱}{۲})$

۴۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{۰/۵}(\log_۲ x)>۱$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,\sqrt{۲})$ ۳) $(۱,\sqrt{۲})$ ۴) $(\sqrt{۲},+\infty)$

۴۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log_۳(x+۲)}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۲)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

۴۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\log(\log_{۰/۲}(۴-x)-۱)$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۲ ۳) ۱ ۴) ۰/۴

۴۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log\frac{۵x-۱}{x+۲}}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۴۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_۳ x-\log_x ۳}$ به صورت $D_f=[\frac{۱}{a},b)\cup[a,+\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۷- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $f(۴)=۰$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{۹-x^۲}{f(x)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) نامتناهی ۴) صفر

۴۸- f یک تابع اکیداً نزولی روی $\mathbb{R}$ است که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد و $g(x)=-x^۲+۲x$. دامنهٔ تابع $h(x)=\frac{۱}{\sqrt{f(x)g(x)}}$ کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $[۲,+\infty)$

۴۹- تابع $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ روی بازهٔ $[a,b]$ هم صعودی است هم نزولی. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰- تابع $f(x)=|x-۳|-|x+۱|$ روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۱- کدام تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی نیست؟

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=|x|-x$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=\frac{x}{|x|}$

۵۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۱ & x\ge ۱\\ ۳x-k & x<۱\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\le ۲$ ۲) $k\le ۱$ ۳) $k\ge ۲$ ۴) $k\ge ۱$

۵۳- تابع درجهٔ دوم $f(x)=(k+۲)x^{۲}+x$ روی بازهٔ $(-\infty,۱]$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k<-۲$ ۲) $k\ge -\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}\le k<-۲$ ۴) $-۲<k<-۱$

۵۴- تابع $f(x)=x^{۲}+۲(k-۱)x+۱$ روی بازهٔ $[۲,۴]$ غیریکنواست. حدود k کدام است؟

۱) $۱<k<۳$ ۲) $k>-۱$ ۳) $-۳<k<-۱$ ۴) $k<۱$

۵۵- تابع $f(x)=x+k^{۲}|x|$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\ge ۱$ ۲) $k\le -۱$ ۳) $-۱\le k\le ۱$ ۴) $k\in\mathbb{R}$

توابع چندجمله‌ای، صعودی و نزولی ۳

۵۶- چند تابع اکیداً صعودی از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲۷ ۳) ۶۴ ۴) ۸۱

۵۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{-۳^{۲x}+۴\times ۳^{x}-۳}}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,۹)$

۵۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{x} x^{۲}\ge x$ کدام است؟

۱) $(۰,۲]$ ۲) $(۱,۲]$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,۲]-\{۱\}$

۵۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱}{۱+\log x}+\frac{۱}{۱-\log x}>۲$ کدام است؟

۱) $(۰,۱۰)-\{۱\}$ ۲) $(۱,۱۰)$ ۳) $(\frac{۱}{۱۰},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۱۰},۱۰)-\{۱\}$

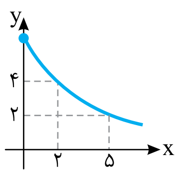
۶۰- مجموع عددهای صحیحی که در نامعادلهٔ $|\log_{۴}(x-۱)|<۱$ صدق می‌کنند، چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۱- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{x}(۱۲-x)>۱$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۲- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(|x|)-۴}$ کدام است؟



۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۲,۲]$
۳) $[-۱,۱]$
۴) $[۲,۴]$

۶۳- اگر f تابعی اکیداً نزولی روی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(|۲x|)-f(|x-۱|)}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ ۲) $[-\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-\frac{۱}{۳},۱]$ ۴) $[-۱,\frac{۱}{۳}]$

۶۴- اگر توابع $f+g$ و $g-f$ روی $\mathbb{R}$ نزولی باشند، کدام تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$

۶۵- اگر تابع $f(x)=\frac{x^{3}+4}{x^{2}}$ روی بازه‌ای صعودی باشد، آن‌گاه تابع $g(x)=\frac{3x^{3}-x^{2}+12}{x^{2}}$ روی همان بازه چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۶۶- اگر تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0)$ نزولی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر روی همین بازه صعودی است؟

۱) $y=f(x)-x$ ۲) $y=f(x^{3})$ ۳) $y=f^{3}(x)$ ۴) $y=x-f(x)$

۶۷- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی و با مقادیر منفی باشد، کدام تابع روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $y=2^{x}f(x)$ ۲) $y=\frac{f(x)}{2^{x}}$ ۳) $y=2^{x}+f(x)$ ۴) $y=2^{x}-f(x)$

۶۸- اگر $g(x)=3x+2f(x)$ تابعی صعودی روی $\mathbb{R}$ و $h(x)=2x-3f(x)$ تابعی نزولی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه تابع f روی $\mathbb{R}$

۱) صعودی است. ۲) نزولی است.

۳) هم صعودی است و هم نزولی. ۴) نه صعودی است نه نزولی.

۶۹- اگر تابع f روی بازهٔ $(0,+\infty)$ صعودی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر روی همین بازه حتماً نزولی است؟

۱) $y=f(x)-2x$ ۲) $y=-\frac{3}{f(x)}$ ۳) $y=-f^{3}(x)$ ۴) $y=4+f(x)$

۷۰- تابع $f(x)=\frac{1}{x^{2}+1}$ روی بازهٔ $(0,+\infty)$

۱) صعودی است. ۲) نزولی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۷۱- کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً یکنواست؟

۱) $f(x)=x-[x]$ ۲) $f(x)=x+[x]$ ۳) $f(x)=x[x]$ ۴) $f(x)=\frac{[x]}{x}$

۷۲- تابع $f(x)=\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

۱) نزولی است. ۲) صعودی است.

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۷۳- کدام تابع روی دامنه‌اش صعودی است؟

۱) $y=2^{x}\sqrt{x}$ ۲) $y=\frac{x}{2^{x}}$ ۳) $y=x^{2}\times 2^{x}$ ۴) $y=\frac{x^{2}}{2^{x}}$

۷۴- تابع $f(x)=\frac{x(x+k)^{2}}{|x|}$ روی دامنه‌اش صعودی است. مجموعهٔ مقادیر k کدام است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\varnothing$

کنکور سراسری

۷۵- تابع $f(x)=x^{2}-2x-3$ با دامنهٔ $\{x\,|\,|x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟ ریاضی - ۹۱

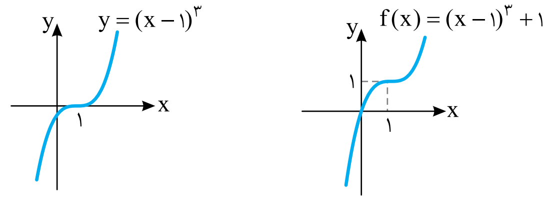
۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

فصل هشتم

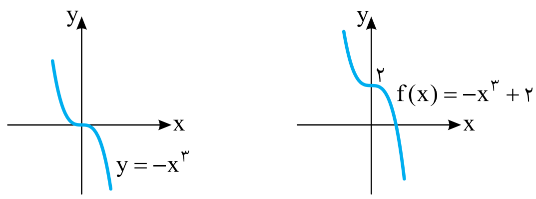
پاسخ‌های تشریحی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=(x-۱)^۳$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۳+۱$ به‌دست بیاید.

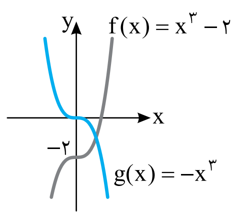


۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $y=x^۳$ را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-x^۳$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-x^۳+۲$ به‌دست بیاید.



۳- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^۳$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=x^۳-۲$ به‌دست می‌آید که یک‌بار خط $y=x$ را قطع می‌کند.

۴- گزینهٔ ۴ نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده است. واضح است که نقطهٔ تلاقی آنها در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.



۵- گزینهٔ ۲ تابع گزینهٔ (۱) صعودی نیست، زیرا $۱<۲$، اما $f(۱)>f(۲)$. تابع گزینهٔ (۲) صعودی است، زیرا $۲<۴<۵$ و $f(۲)=f(۴)<f(۵)$. تابع گزینهٔ (۳) صعودی نیست، زیرا $۲<۳$، اما $f(۲)>f(۳)$. تابع گزینهٔ (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-۲<۳$، اما $f(-۲)>f(۳)$.

۶- گزینهٔ ۳ تابع گزینهٔ (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۳<-۱$، اما $f(-۳)<f(-۱)$. تابع گزینهٔ (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $۰<۱$، اما $f(۰)=f(۱)$. تابع گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-۳<-۱<۱$ و $f(-۳)>f(-۱)>f(۱)$. تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۲<-۱$، اما $f(-۲)=f(-۱)$.

۷- گزینهٔ ۴ تابع f صعودی، تابع g نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۸- گزینهٔ ۳ چون تابع f نزولی است و $۱<۲<۳$، پس

$$f(۱)\ge f(۲)\ge f(۳)\Rightarrow ۲a+۱\ge a-۲\ge ۲-a$$

اکنون توجه کنید که

$$۲a+۱\ge a-۲\Rightarrow a\ge -۳ \qquad (۱)$$

$$a-۲\ge ۲-a\Rightarrow a\ge ۲ \qquad (۲)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a\ge ۲$.

۹- گزینهٔ ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$۱<۲\Rightarrow f(۱)<f(۲)\Rightarrow a^۲-۱<a+۱$$

$$(a+۱)(a-۲)<۰\Rightarrow -۱<a<۲ \qquad (۱)$$

همین‌طور،

$$۲<۳\Rightarrow f(۲)<f(۳)\Rightarrow a+۱<۳a-۱\Rightarrow a>۱ \quad (۲)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $۱<a<۲$.

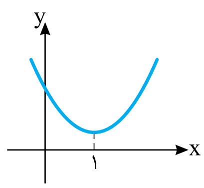
۱۰- گزینهٔ ۳ تنها تابعی که هم صعودی است و هم نزولی تابع ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

$$f(۱)=f(۲)=f(۳)\Rightarrow a-۲=۳a+۴=۲a-b \Rightarrow a=-۳,\ b=-۱$$

در نتیجه $a+b=-۴$.

۱۱- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل رسم شده روی بازهٔ $[-۲,۳]$ تابع f صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

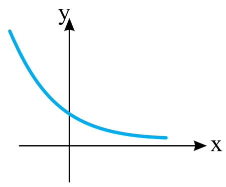
۱۲- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=۲x^۲-۴x+۳$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=۱$. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(۱,۲)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.



۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

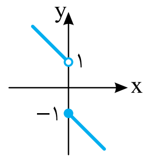
$$-۱<m<۱\Rightarrow ۰\le |m|<۱ \xrightarrow{m\neq ۰} ۰<|m|<۱$$

بنابراین تابع $g(x)=|m|^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



$y=a^x \quad , \quad ۰<a<۱$

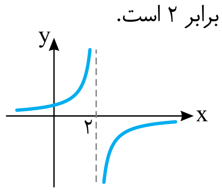
۱۴- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به صورت زیر است و این تابع نزولی است.



$$f(x)=\begin{cases}-x-۱ & x\geq ۰\\ -x+۱ & x<۰\end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آنها را رد کنید.

۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{۱}{-x}$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{-(x-۲)}=\frac{۱}{-x+۲}$ به‌دست بیاید. اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۲)$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.



۱۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در تابع اکیداً صعودی، اگر $x_۱<x_۲$، آن‌گاه $f(x_۱)<f(x_۲)$، و برعکس. بنابراین

$$f(۲x+۱)<f(x)\Rightarrow ۲x+۱<x\Rightarrow x<-۱$$

۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف نامعادله را به‌صورت عبارت‌های نمایی با پایهٔ ۲ می‌نویسیم

$$۱۶^{۲x-۲}=(۲^۴)^{۲x-۲}=۲^{۸x-۸} \quad , \quad ۸^{۳x-۱}=(۲^۳)^{۳x-۱}=۲^{۹x-۳}$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $۲^{۸x-۸}\geq ۲^{۹x-۳}$ را حل کنیم، در نتیجه

$$۸x-۸\geq ۹x-۳\Rightarrow x\leq -۵$$

۱۸- گزینهٔ ۲ نامعادله به‌صورت $(\sqrt{۲}-۱)^{۳x-۱}>\sqrt{۲}-۱$ نوشته می‌شود. چون $(\sqrt{۲}-۱)<۱$، پس

$$۳x-۱<۱\Rightarrow ۳x<۲\Rightarrow x<\frac{۲}{۳}$$

۱۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $\log ۱۰=۱$ و $\log\frac{۱}{۱۰}=-۱$. در نتیجه نابرابری‌ها را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\log\frac{۱}{۱۰}<\log x<\log ۱۰\Rightarrow \frac{۱}{۱۰}<x<۱۰$$

۲۰- گزینهٔ ۴ نامعادله را به صورت $\log_۳(۱۰-x)\leq \log_۳ ۹$ می‌نویسیم. نتیجه می‌گیریم

$$۱۰-x\leq ۹\Rightarrow x\geq ۱$$

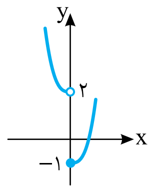
از طرف دیگر عبارت $\log_۳(۱۰-x)$ وقتی معنی‌دار است که $۱۰-x>۰$ و در نتیجه $x<۱۰$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[۱,۱۰)$ است.

۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)>۲$، آن‌گاه

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)>\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۴}\Rightarrow x+۱<\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $x<-\frac{۳}{۴}$. همچنین باید $x+۱>۰$. در نتیجه $x>-۱$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(-۱,-\frac{۳}{۴})$ است.

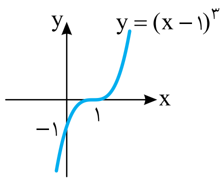
۲۲- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۳-۱$ را به‌ازای x هایی که $x\geq ۰$ رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=x^۳-۱$ به‌دست بیاید، و از این نمودار قسمتی را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=-x^۳+۲$ را به‌ازای x هایی که $x<۰$ رسم می‌کنیم. برای این کار ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $y=x^۳$ را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-x^۳$ به‌دست بیاید، بعد این نمودار را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=-x^۳+۲$ به‌دست بیاید، در آخر قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است حذف می‌کنیم.

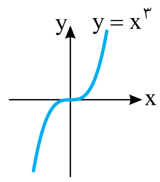


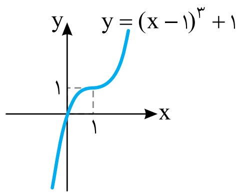
۲۳- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x=(x-۱)^۳+۱$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم.



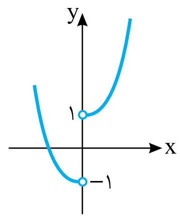




۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^۳+۱) & x>۰\\ \frac{x}{-x}(x^۳+۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳+۱ & x>۰\\ -x^۳-۱ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که اگر نمودار تابع f خط $y=k$ را در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه $-۱<k\leq ۱$.



۲۵- گزینهٔ ۳ با توجه به دو زوج مرتب $(۰, x^۲)$ و $(-۲, ۴x-۳)$ می‌توان نوشت:

$$-۲<۰ \Rightarrow ۴x-۳\le x^۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۳\ge ۰ \Rightarrow x\le ۱ \text{ یا } x\ge ۳$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^۲, ۹)$ و $(-۲, ۴x-۳)$ می‌توان نوشت:

$$-۲<x^۲ \Rightarrow ۴x-۳\le ۹ \Rightarrow ۴x\le ۱۲ \Rightarrow x\le ۳$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^۲, ۹)$ و $(۰, x^۲)$ می‌توان نوشت:

$$۰\le x^۲ \Rightarrow x^۲\le ۹ \Rightarrow -۳\le x\le ۳$$

با توجه به اینکه x مقدار صحیح است، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود $x\in\{۳,۱,۰,-۱,-۲,-۳\}$، ولی اگر $x=۰$،

$$f=\{(-۲,-۳),(۰,۰),(۰,۹)\}$$

که در این صورت f تابع نیست. بنابراین ۵ مقدار صحیح برای x وجود دارد.

۲۶- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع نزولی نتیجه می‌شود

$$f(۱)\ge f(۲)\Rightarrow ۵\ge |m|\Rightarrow -۵\le m\le ۵$$

$$f(۲)\ge f(۴)\Rightarrow |m|\ge \frac{۴}{|m|}\Rightarrow m^۲\ge ۴\Rightarrow m\le -۲ \text{ یا } m\ge ۲$$

بنابراین اگر $-۵\le m\le -۲$ یا $۲\le m\le ۵$، آن‌گاه تابع f نزولی است. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح ±۲، ±۳، ±۴ و ±۵ را داشته باشد.

۲۷- گزینهٔ ۳ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه تابع نزولی است. بنابراین

$$۰<k^۲-۱<۱\Rightarrow ۱<k^۲<۲\Rightarrow ۱<|k|<\sqrt{۲}$$

۲۸- گزینهٔ ۲ در تابع $y=a^x$ اگر $a>۱$، آن‌گاه تابع صعودی است. اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه تابع نزولی است و اگر $a=۱$، آن‌گاه تابع ثابت است (هم صعودی است و هم نزولی). پس

$$k^۲+\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow k^۲=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $g(x)=k^{۲x}=(k^۲)^x=(\frac{۱}{۲})^x$. بنابراین تابع g نزولی است.

۲۹- گزینهٔ ۲ از تعریف تابع نزولی نتیجه می‌شود $a^۲-۱<۳a+۳$. پس

$$a^۲-۳a-۴<۰\Rightarrow (a+۱)(a-۴)<۰\Rightarrow -۱<a<۴$$

۳۰- گزینهٔ ۳ به‌ازای هر x حقیقی نابرابری $|x|\ge x$ برقرار است. از نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود $f(|x|)\le f(x)$. پس نتیجه‌گیری زیر درست است:

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(|x|)\le f(x)$$

توجه کنید که گزینه‌های دیگر ممکن است درست نباشد. مثلاً در گزینهٔ (۱) فرض کنید $f(x)=۵$ و در گزینه‌های (۲) و (۴) فرض کنید $f(x)=-x$.

۳۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است و $f(۰)=۲$، $f(۱)=۳$ و $f(-۱)=۰$. بنابراین به‌ازای هر x نتیجه‌گیری‌های زیر درست هستند.

گزینهٔ (۱) $|x|\ge ۰\Rightarrow f(|x|)\ge f(۰)\Rightarrow f(|x|)\ge ۲$

گزینهٔ (۲) $x^۲+۱\ge ۱\Rightarrow f(x^۲+۱)\ge f(۱)\Rightarrow f(x^۲+۱)\ge ۳$

گزینهٔ (۳)

$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<[x]-x\le ۰$$

$$f(-۱)<f([x]-x)\le f(۰)\Rightarrow ۰<f([x]-x)\le ۲$$

گزینهٔ (۴)

$$-۱\le \sin x\le ۱\Rightarrow f(-۱)\le f(\sin x)\le f(۱)\Rightarrow ۰\le f(\sin x)\le ۳$$

۳۲- گزینهٔ ۴ ابتدا نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم (دقت کنید که $(\frac{۵}{۷}=(\frac{۷}{۵})^{-۱}$

$$(\frac{۷}{۵})^{۳-۲x}<((\frac{۷}{۵})^{-۱})^{x+۲}=(\frac{۷}{۵})^{-x-۲}$$

چون $\frac{۷}{۵}>۱$، پس $۳-۲x<-x-۲$، در نتیجه $x>۵$.

۳۳- گزینهٔ ۱ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$(۲^۲)^{x-۳}<(۲^۵)^{۵-x}\Rightarrow ۲^{۲x-۶}<۲^{۲۵-۵x}$$

بنابراین

$$۲x-۶<۲۵-۵x\Rightarrow ۷x<۳۱\Rightarrow x<\frac{۳۱}{۷}$$

۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{-۱}$$

بنابراین $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲x+۱}>(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{-x-۲}$. چون $۰<\sqrt{۳}-\sqrt{۲}<۱$، پس

$$۲x+۱<-x-۲\Rightarrow ۳x<-۳\Rightarrow x<-۱$$

۳۵- گزینهٔ ۳ نامعادله را به شکل $۴(۲^x)^۲-۵(۲^x)+۱\ge ۰$ می‌نویسیم. اگر فرض کنیم $۲^x=t$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید

$$۴t^۲-۵t+۱\ge ۰\Rightarrow (t-۱)(۴t-۱)\ge ۰$$

$$t\ge ۱\Rightarrow ۲^x\ge ۱\Rightarrow ۲^x\ge ۲^۰\Rightarrow x\ge ۰$$

$$t\le \frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^x\le \frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^x\le ۲^{-۲}\Rightarrow x\le -۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty)$ است که همان $\mathbb{R}-(-۲,۰)$ است. پس $a=-۲$ و $b=۰$ و در نتیجه $a+b=-۲$.

۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|۳-۳^{۱-۲x}\ge ۰\}$. بنابراین باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$۳^{۱-۲x}\le ۳\Rightarrow ۱-۲x\le ۱\Rightarrow x\ge ۰$$

پس $D_f=[۰,+\infty)$.

۳۷- گزینهٔ ۳ باید نامعادله‌های $۲^x-۸\ge ۰$ و $۸۱-۳^x>۰$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آنها را به‌دست آوریم

$$۲^x-۸\ge ۰\Rightarrow ۲^x\ge ۲^۳\Rightarrow x\ge ۳,\quad ۸۱-۳^x>۰\Rightarrow ۳^x<۳^۴\Rightarrow x<۴$$

بنابراین $D_f=[۳,۴)$. در نتیجه $a=۳$، $b=۴$ و $a+b=۷$.