

آموزش و آزمون

پاسخ تشریحی سوالات
و مسائل ریاضیات
هفتم

برای دانش آموزان تیزهوش



خواهی بشوی قبول آسان
با رتبه عالی و درخشان
برخیز و کنون ریاضی آموز
از دست مده فرصت امروز
همراه توایم با رشادت
تا باز کنی در سعادت

از مجموعه **رشادت**

رمز شکوفایی استعدادهای دانش آموزان تیزهوش

محمد بُرجی اصفهانی - هادی عزیززاده
مریم بُرجی اصفهانی



به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱، کتاب «ریاضیات ششم ابتدایی برای دانش‌آموزان تیزهوش» را تألیف کردیم. این کتاب که به کتاب «ریاضی رشادت» مشهور شد، با استقبال گسترده دانش‌آموزان، خانواده‌های آن‌ها و معلمان گرامی روبه‌رو گردید. این اقبال عمومی ما را بر آن داشت که به تألیف کتاب هفتم (یا اول دبیرستان - دوره اول) با همان سبک و سیاق و با تغییراتی اقدام کنیم.

کتاب «ریاضیات هفتم برای دانش‌آموزان تیزهوش» کتابی است که کلیه مطالب ریاضی اول دبیرستان (دوره اول) را در سطح پیشرفته ارائه می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با خلاصه مباحث و نکته‌های مهم هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌هایی بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای و تعدادی مسئله تشریحی را حل می‌کند تا بر موضوع تسلط یابد. سؤالات چهارگزینه‌ای و مسائل تشریحی این کتاب به سه گروه آغازین (ساده)، میانی (متوسط) و پایانی (دشوار) تقسیم شده‌اند که ترتیب مطالعه و حل آن‌ها باید رعایت شود. انتظار می‌رود کتاب حاضر، همه نیازهای دانش‌آموزان اول دبیرستان مدارس خاص و تیزهوش را پاسخ‌گو باشد.

گفتنی است از ویرایش دوم به بعد، پنج آزمون تستی و پنج آزمون تشریحی نیز به کتاب اضافه شده است که دو آزمون اول تستی و تشریحی مربوط به پنج فصل اول (ترم اول) و سه آزمون بعدی تستی و تشریحی مربوط به کل کتاب (ترم دوم) است.

در این جا لازم می‌دانیم از جناب آقای یحیی دهقانی مدیرعامل محترم شرکت آموزشی، فرهنگی و انتشاراتی مبتکران که شرایط و امکانات لازم را برای چاپ این کتاب فراهم آوردند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها ناهید صبائی (حروفچین و صفحه‌آرا)، ملیحه محمدی، سمانه ایمان‌فرد، بهاره خدای و مینا هرمزی (گرافیک‌سازها) و مدیران و همکاران واحدهای حروفچینی، تولید و فروش سپاسگزاریم. امیدواریم دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادهای و انتقادهای خود درباره این کتاب یاری فرمایند.

محمد بُرجی اصفهانی

هادی عزیززاده

مریم بُرجی اصفهانی

راهنمای استفاده از کتاب ۶

پاسخ‌نامه تشریحی

۸	راهبردهای حل مسئله	فصل اول
۲۹	اعداد صحیح	فصل دوم
۴۰	جبر و معادله	فصل سوم
۵۲	هندسه و استدلال	فصل چهارم
۷۲	شمارنده‌ها و اعداد اول	فصل پنجم
۸۶	آزمون چهارگزینه‌ای (۱)	
۹۱	آزمون تشریحی (۱)	
۹۷	آزمون چهارگزینه‌ای (۲)	
۱۰۱	آزمون تشریحی (۲)	
۱۰۶	سطح و حجم	فصل ششم
۱۲۲	توان	فصل هفتم
۱۳۹	جذر	
۱۵۰	بردار و مختصات	فصل هشتم
۱۶۴	آمار و احتمال	فصل نهم
۱۷۸	آزمون چهارگزینه‌ای (۳)	
۱۸۲	آزمون تشریحی (۳)	
۱۸۷	آزمون چهارگزینه‌ای (۴)	
۱۹۱	آزمون تشریحی (۴)	
۱۹۷	آزمون چهارگزینه‌ای (۵)	
۲۰۲	آزمون تشریحی (۵)	

راهنمای استفاده از کتاب

دانش آموز گرامی / ولی محترم

قبل از آغاز مطالعه این کتاب به توصیه‌ها و موارد زیر توجه فرمایید:

۱- ابتدا خلاصه درس و مثال‌های فصل موردنظر را مطالعه کنید.

۲- سؤالات چهار گزینه‌ای و تشریحی هر فصل را پاسخ دهید. سؤالات از ساده به سخت تنظیم و به سه گروه آغازین (ساده)، میانی (متوسط) و پایانی (مشکل) تقسیم شده‌اند. پس از آن که به همه سؤالات چهار گزینه‌ای و تشریحی یک گروه پاسخ دادید، به کتاب پاسخ‌نامه مراجعه کنید و پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های درست سؤالات مقایسه کنید. حتماً پاسخ‌نامه را دقیق بخوانید حتی اگر پاسخ شما به سؤالی درست باشد. ممکن است ما راه حل ساده‌تری را پیشنهاد کرده باشیم.

۳- تا زمانی که به سؤالات یک گروه پاسخ نداده‌اید، سراغ سؤالات گروه بالاتر نروید. سؤالات گروه پایانی باید در آخرین مرحله پاسخ داده شوند.

۴- برای آن که بدانید سطح علمی شما در درس ریاضی چیست، پس از پاسخ دادن به سؤالات چهار گزینه‌ای پایانی، تعداد انتخاب‌های درست و تعداد انتخاب‌های غلط خود را بشمارید و نمره خودتان را با رابطه زیر محاسبه کنید:

$$\text{نمره} = \frac{\text{تعداد پاسخ‌های غلط}}{۳} - \text{تعداد پاسخ‌های درست}$$

(یعنی هر سه انتخاب غلط، یک انتخاب درست را خنثی می‌کند). سپس نمره خود را از ۲۰ محاسبه کرده و با مراجعه به جدول زیر، سطح علمی خود را مشخص کنید.

سطح علمی	نمره
متوسط	۱ - ۵
خوب	۶ - ۱۰
خیلی خوب	۱۱ - ۱۵
عالی	۱۶ - ۱۹
نابغه	۲۰

ضمناً سطح علمی خود را می‌توانید با پاسخ به آزمون‌های تستی پایان کتاب نیز ارزیابی کنید (دو آزمون اول مربوط به پنج فصل اول کتاب است و مناسب ترم اول می‌باشد و سه آزمون بعدی کل کتاب را شامل می‌شود که مناسب ترم دوم است).
۵- برای آن که با روش درست مطالعه و روش درست تست زدن آشنا شوید و از خدمات مشاوره‌ای آموزشی بهره‌مند گردید، به شما توصیه می‌شود که با آرمان و آیدا در سفر مطالعه این کتاب همراه شوید و نکات مهمی را که همراه با تصویر آن‌ها، در قالب شعر یا نثر بیان شده است به دقت مطالعه و به آن‌ها عمل کنید.

موفق باشید.

پاسخ نامه



جواب تست رو شانسی

یه امتیاز می شه تباه

نمره ی منفی همونه

مداد رو می گیره دست

پاسخ داره برایشون

آفرشم می بازه!

آیدا نمیده الکی

با سه جواب اشتباه

این قانون آزمونه

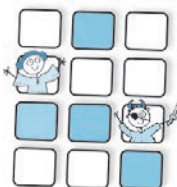
آرمانه جور دیگه ست

بلد نباشه هم اون

هی شیر و فط می ندازه



پاسخ‌نامه تشریحی راهبردهای حل مسئله



★ آغازین

۱- گزینه (۳)

حل: از راهبرد حدس و آزمایش استفاده می‌کنیم و گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$$5 \times 1/4 = 7$$

$$5 \times 2/2 = 11$$

$$5 \times 2/7 = 13/5$$

$$5 \times 1/8 = 9$$

و با راهبرد حذف حالات غیرمطلوب گزینه (۳) را حذف می‌کنیم، چون تعداد نفرات نمی‌تواند اعشار بگیرد و عددی طبیعی است.

۲- گزینه (۲)

حل: راهبرد زیرمسئله

- چند عدد یک رقمی داریم؟

- چند عدد دو رقمی داریم؟

- برای شماره‌گذاری ارقام اعداد یک رقمی چند رقم به کار می‌رود؟

- برای شماره‌گذاری ارقام اعداد دو رقمی چند رقم به کار می‌رود؟

- در مجموع چند رقم برای شماره‌گذاری به کار می‌رود؟

۹ عدد → اعداد ۱ تا ۹

عدد $66 = 9 - 75$ → اعداد ۱۰ تا ۷۵

$$9 \times 1 = 9$$

$$66 \times 2 = 132$$

$$132 + 9 = 141$$

۳- گزینه (۱)

حل: راهبرد رسم شکل



سانتی‌متر $60 = 120 \div 2$ = فاصله بین دو نفر پشت سر هم

$14 = 15 - 1$ = تعداد فواصل بین افراد

سانتی‌متر $840 = 14 \times 60$ = طول صف



۴- گزینه (۳)

حل: راهبرد مدل‌سازی

در هر دو حالت پول سارا مقدار یکسانی است. قیمت هر خودکار را \bigcirc فرض می‌کنیم. بنابراین:

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc + ۳۲۰ = \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc - ۴۸۰$$

اگر مقادیر مساوی را از دو طرف تساوی خط بزنیم، خواهیم داشت:

$$\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc} + ۳۲۰ = \cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc}\cancel{\bigcirc} - ۴۸۰$$

$$۳۲۰ + ۴۸۰ = \bigcirc\bigcirc$$

قیمت خودکار (تومان) $\bigcirc = ۴۰۰ \rightarrow \bigcirc\bigcirc = ۸۰۰$

تومان $۲۳۲۰ = ۲۰۰۰ + ۳۲۰ = (۵ \times ۴۰۰) + ۳۲۰ =$ پول سارا

و یا

تومان $۲۳۲۰ = ۲۸۰۰ - ۴۸۰ = (۷ \times ۴۰۰) - ۴۸۰ =$ پول سارا

۵- گزینه (۴)

حل: راهبرد الگویابی

۵, ۷, ۱۱, ۱۹, ?

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ +۲ \quad +۴ \quad +۸ \\ \textcircled{\times ۲} \quad \textcircled{\times ۲} \end{array}$$

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌کنید هر بار مقداری به عدد اضافه شده و عدد بعدی به دست آمده است و مقادیری که به اعداد افزوده می‌شوند، هر بار دو برابر می‌شوند. بنابراین:

$$۲ \times ۸ = ۱۶$$

$$۱۹ + ۱۶ = ۳۵$$

۶- گزینه (۱)

حل: راهبرد الگوسازی

تمام حالات ممکن برای ۳ عدد A و B و C را می‌نویسیم.

تنها حالت ممکن (که میانگین آن برابر ۴ است)، اعداد ۸ و ۳ و ۱ هستند، بنابراین بزرگ‌ترین عدد ۸ است.

A	B	C	مجموع	میانگین
۱	۱	۲۴	۲۶	$\frac{۲۶}{۳}$
۱	۲	۱۲	۱۵	$\frac{۱۵}{۳} = ۵$
۱	۳	۸	۱۲	$\frac{۱۲}{۳} = ۴$
۱	۴	۶	۱۱	$\frac{۱۱}{۳}$
۲	۲	۶	۱۰	$\frac{۱۰}{۳}$
۲	۳	۴	۹	$\frac{۹}{۳} = ۳$



۷- گزینه (۲)

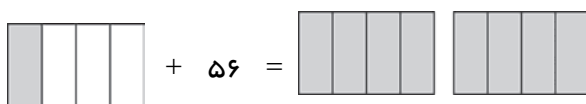
حل: راهبرد حدس و آزمایش

\overline{AB}	\overline{BA}	$\overline{AB - BA}$
۷۵	۵۷	۱۸
۸۲	۲۸	۶۳
۹۱	۱۹	(۷۲)

$$A + B = 9 + 1 = 10$$

۸- گزینه (۳)

حل: راهبرد رسم شکل



در سمت چپ تساوی ۱ قسمت و در سمت راست آن ۸ قسمت (۷ قسمت بیشتر) رنگ شده است. بنابراین اندازه هر قسمت ۸ (۵۶ ÷ ۷ = ۸) است. از آنجا که هر شکل از ۴ قسمت تقسیم شده، عدد برابر با ۳۲ (۴ × ۸ = ۳۲) می‌باشد.

۹- گزینه (۲)

حل: راهبرد حذف حالات نامطلوب

A	B	مساحت = A × B
۱	۱۲	۱۲
۲	۱۱	۲۲
۳	۱۰	۳۰
۴	۹	۳۶
۵	۸	۴۰
۶	۷	۴۲

محیط مستطیل دو برابر مجموع طول و عرض آن است. بنابراین مجموع طول و عرض این مستطیل ۱۳ (۲۶ ÷ ۲ = ۱۳) می‌باشد. تمام اعداد طبیعی که مجموع آن‌ها ۱۳ می‌شود را می‌نویسیم و حالتی که مساحت، کوچکتر از محیط می‌شود را حذف می‌کنیم. مساحت این مستطیل ۴ مقدار مختلف (۳۰، ۳۶، ۴۰، ۴۲) می‌تواند داشته باشد.

۱۰- گزینه (۴)

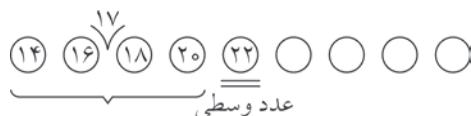
حل: راهبرد زیرمسئله

- پس فردا چندشنبه است؟
- امروز چندشنبه است؟
- دیروز چندشنبه بود؟

جمعه → ۴ روز بعد از دوشنبه
 چهارشنبه → ۲ روز قبل از جمعه
 سه‌شنبه → ۱ روز قبل از امروز

۱۱- گزینه (۱)

حل: راهبرد رسم شکل



میانگین چند عدد متوالی برابر با عدد وسطی است: پس میانگین ۴ عدد نخست برابر با عدد ۱۷ است.



۱۲- گزینه (۳)

حل: راهبرد زیرمسئله

- چند درصد قیمت کتاب را پرداخته‌ایم؟

$$۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\% \quad \text{تخفیف} - \text{قیمت کتاب پیش از تخفیف} = \text{قیمتی که پرداخته‌ایم}$$

- قیمت کتاب پیش از ۲۰٪ تخفیف چه قدر بوده است؟

قیمتی که پرداخته‌ایم	۸۰	۱۲۰۰۰
قیمت اصلی	۱۰۰	۱۵۰۰۰

- اگر ۳۰٪ تخفیف بگیریم، چند درصد قیمت کتاب را باید بپردازیم؟

$$۱۰۰\% - ۳۰\% = ۷۰\%$$

- قیمت کتاب پس از ۳۰٪ تخفیف چه قدر می‌شود؟

قیمتی که باید بپردازیم	۷۰	۱۰۵۰۰
قیمت اصلی	۱۰۰	۱۵۰۰۰

۱۳- گزینه (۱)

حل: راهبرد حل مسئله ساده‌تر

به‌جای آن‌که شکل را به شکل‌های مختلف تقسیم کرده و مساحت هر یک را به دست آوریم و حاصل جمع آن‌ها را حساب کنیم، می‌توانیم راه حل ساده‌تری به کار ببریم.



شکل را مستطیلی به طول ۸ و عرض ۶ فرض می‌کنیم که دو مثلث به ارتفاع ۲ و قاعده ۳ (مجموع این دو مثلث را هم یک مستطیل ۲×۳ فرض می‌کنیم) از آن بریده شده است.

$$= ۴۲ = (۸ \times ۶) - (۲ \times ۳) \quad \text{مساحت شکل}$$

۱۴- گزینه (۴)

حل: راهبرد روش نمادین

خود عدد را \bigcirc فرض می‌کنیم.

$$\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc = ۷۰$$

$$\text{عدد} = ۷۰ \div ۷ = ۱۰$$

$$\text{عدد نصف} = ۱۰ \div ۲ = ۵$$

۱۵- گزینه (۳)

حل: راهبرد زیرمسئله

- سارا هم‌اکنون چند ساله است؟

- سارا ۷ سال قبل چند ساله بود؟

- سوسن ۷ سال قبل چند ساله بود؟

- سوسن هم‌اکنون چند ساله است؟

$$۱۷ - ۵ = ۱۲$$

$$۱۲ - ۷ = ۵$$

$$۱۳ - ۵ = ۸$$

$$۸ + ۷ = ۱۵$$



★ میانی

۱۶- گزینه (۳)

حل: راهبرد الگوسازی

اعدادی که یکان آن‌ها ۸ است:

۸, ۱۸, ۲۸, ۳۸, ۴۸, ۵۸, ۶۸, ۷۸, ۸۸, ۹۸

اعدادی که دهگان آن‌ها ۸ است:

۸۰, ۸۱, ۸۲, ۸۳, ۸۴, ۸۵, ۸۶, ۸۷, ۸۸, ۸۹

از آنجایی که عدد ۸۸ را دو بار شمرده‌ایم، ۱۹ عدد داریم:

$$(10 + 10) - 1 = 19$$

۱۷- گزینه (۳)

حل: راهبرد حذف حالات نامطلوب

از آنجا که مستطیل جدید نباید در هیچ نقطه‌ای با مربع و مستطیل سیاه تماس داشته باشد، داخل خانه‌هایی را که نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد، علامت × می‌زنیم و ۶ خانه باقی‌مانده را با اعداد ۱ تا ۶ مشخص می‌کنیم.

۱	۲	۳	۴
۵	۶	×	×
×	×	×	
		×	×

مستطیل‌ها را می‌توان در این خانه‌ها قرار داد:

(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۵, ۶), (۱, ۵), (۲, ۶)

یعنی ۶ جای مختلف برای مستطیل‌ها وجود دارد.

۱۸- گزینه (۱)

حل: راهبرد حدس و آزمایش

اگر تعداد اعداد متوالی زوج باشد، تعداد اعداد زوج و فرد برابر است (نصف اعداد زوج و نصفی فرد هستند). مثلاً: (ز، ف، ز، ف) یا (ف، ز، ف، ز) و اگر تعداد اعداد متوالی فرد باشد، اختلاف تعداد اعداد زوج و فرد برابر با یک است. مثلاً:

$$(ز، ف، ز) = \begin{cases} ۲ \text{ زوج} \\ ۱ \text{ فرد} \end{cases}$$

$$(ف، ز، ف، ز) = \begin{cases} ۳ \text{ فرد} \\ ۲ \text{ زوج} \end{cases}$$

پس در چند عدد متوالی اختلاف تعداد اعداد زوج و فرد یا صفر است و یا یک. گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

	تعداد	درصد
اعداد زوج	۵ / ۷۵	۴۶
اعداد فرد	۶ / ۷۵	۵۴
اختلاف	۱	۸
مجموع	۱۲ / ۵	۱۰۰

قابل قبول نیست، چون تعداد اعداد حتماً باید عددی طبیعی باشد.



	تعداد	درصد
اعداد زوج	۱۲	۵۰
اعداد فرد	۱۲	۵۰
اختلاف	۰	۰
مجموع	۲۴	۱۰۰

همان‌طور که قبلاً گفتیم برای هر تعداد زوج اعداد متوالی درست است. یعنی نیمی از آن‌ها فرد و نیمی زوج هستند. به عنوان مثال در این جدول ۲۴ عدد متوالی را فرض کرده‌ایم.

	تعداد	درصد
اعداد زوج	۱۲	۴۸
اعداد فرد	۱۳	۵۲
اختلاف	۱	۴
مجموع	۲۵	۱۰۰

۲۵ عدد متوالی داریم که ۱۳ تای آن‌ها فرد و ۱۲ تای آن‌ها زوج هستند.

برای درصد ۵۲٪ اعداد زوج هم، جدولی مشابه جدول بالا داریم با این تفاوت که از مجموع ۲۵ عدد متوالی ۱۳ تای آن‌ها زوج و ۱۲ تای آن‌ها فرد هستند.

۱۹- گزینه (۲)

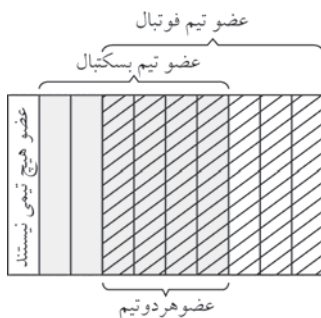
حل: راهبرد الگوسازی

۳۰, ۳۱, ۳۲	عدد ۳
۴۰, ۴۱, ۴۲, ۴۳	عدد ۴
۵۰, ۵۱, ۵۲, ۵۳, ۵۴	عدد ۵
۶۰, ۶۱, ۶۲, ۶۳, ۶۴, ۶۵	+ عدد ۶
۷۰, ۷۱, ۷۲, ۷۳, ۷۴, ۷۵	عدد ۶
	عدد ۲۴

۲۰- گزینه (۳)

حل: راهبرد رسم شکل

همان‌طور که در شکل می‌بینید، از ۱۰۰٪ افراد ۴۰٪ (۴ قسمت ۱۰ درصدی) عضو هر دو تیم هستند.



۲۱- گزینه (۱)

حل: راهبرد الگویابی

$\times 7$	$\times 6$	$\times 5$	$\times 4$	$\times 3$
\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
(۲, ۱۴)	(۵, ۳۰)	(۱۱, ۵۵)	(۱۸, ۷۲)	(۲۳, ۶۹)

۲۲- گزینه (۴)

حل: راهبرد حل مسئله ساده‌تر

فرض می‌کنیم مجموع سیب‌های دو نفر ۱۴ و اختلاف آن‌ها ۴ تا است، برای به دست آوردن تعداد سیب‌های هر کدام ابتدا ۴ سیب از فردی که تعداد سیب‌هایش بیش‌تر است می‌گیریم، تا تعداد سیب‌های هر دو نفر مساوی شود:

$$\begin{array}{r} \text{عدد بزرگتر} \\ ۱۴ \\ + \\ \text{عدد کوچکتر} \\ ۴ \\ \hline ۱۰ \end{array}$$

برایمان ۱۰ سیب باقی می‌ماند: $۱۴ - ۴ = ۱۰$

آن را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم می‌کنیم که به هر کدام ۵ سیب می‌رسد، در نتیجه یکی از افراد ۹ سیب و دیگری ۵ سیب دارد:

پس با داشتن اختلاف و مجموع دو عدد می‌توان عدد کوچکتر را از رابطه زیر به دست آورد (راهبرد الگویابی):

$$\text{عدد کوچکتر} = (\text{مجموع} - \text{اختلاف}) \div ۲$$

و با داشتن عدد کوچکتر، عدد بزرگتر قابل محاسبه است:

$$\text{عدد کوچکتر} - \text{مجموع} = \text{عدد بزرگتر}$$

حال این مسئله را برای دو کسر موردنظر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{کسر کوچکتر} &= \left(\frac{۴}{۵} - \frac{۲}{۳}\right) \div ۲ = \left(\frac{۱۲}{۱۵} - \frac{۱۰}{۱۵}\right) \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۱۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۵} \\ \text{کسر بزرگتر} &= \text{مجموع} - \text{کسر کوچکتر} = \frac{۴}{۵} - \frac{۱}{۱۵} = \frac{۱۲}{۱۵} - \frac{۱}{۱۵} = \frac{۱۱}{۱۵} \end{aligned}$$

۲۳- گزینه (۲)

حل: راهبرد حذف حالات نامطلوب

اعداد سه رقمی که مجموع ارقام آن‌ها ۱۲ و رقم صدگان آن‌ها دو برابر دهگان است را می‌نویسیم و اعداد فرد را حذف می‌کنیم.

$$۲ \text{ عدد} \rightarrow ۸۴۰, ۶۳۳, ۴۲۶, ۲۱۹$$

۲۴- گزینه (۳)

حل: محیط مستطیل دو برابر مجموع طول و عرض است، پس مجموع طول و عرض مستطیل‌ها $۳۲ (۳۲ = ۶۴ \div ۲)$ است.

ضلع مربع برابر با طول مستطیل و یا ۷ برابر عرض آن است. بنابراین باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها ۳۲ و یکی ۷ برابر دیگری باشد.

از دو راهبرد مختلف می‌توانیم استفاده کنیم:

الف) راهبرد روش نمادین

$$\begin{aligned} \bigcirc + \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc &= ۳۲ \\ \text{عدد کوچکتر} \quad ۳۲ \div ۸ &= ۴ \\ \text{عدد بزرگتر} \quad ۷ \times ۴ &= ۲۸ \\ \text{مساحت مستطیل} \quad ۲۸ \times ۴ &= ۱۱۲ \end{aligned}$$



ب) راهبرد حدس و آزمایش

عرض	طول	(عرض \times ۷)
۲	۳۰	$۷ \times ۲ = ۱۴$
۳	۲۹	$۷ \times ۳ = ۲۱$
۴	(۲۸)	$۷ \times ۴ = (۲۸)$

→ ۷ برابر عرض با طول مساوی است، پس طول و عرض مستطیل به ترتیب ۲۸ و ۴ می‌باشد.

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول} = ۲۸ \times ۴ = ۱۱۲$$

۲۵- گزینه (۱)

حل: راهبرد حل مسئله ساده‌تر

مسئله را برای اعداد کوچک‌تری مثلاً ۴ و ۱۰ حل می‌کنیم:

$$\{۱, ۲, ۴\} = \text{مقسوم‌علیه‌های ۴}$$

$$۷ = ۱ + ۲ + ۴ = \text{مجموع مقسوم‌علیه‌های ۴}$$

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴}{۴} + \frac{۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۴} = \text{مجموع معکوس مقسوم‌علیه‌های ۴}$$

$$\{۱, ۲, ۵, ۱۰\} = \text{مقسوم‌علیه‌های ۱۰}$$

$$۱۸ = ۱ + ۲ + ۵ + ۱۰ = \text{مجموع مقسوم‌علیه‌های ۱۰}$$

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۰}{۱۰} + \frac{۵}{۱۰} + \frac{۲}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۸}{۱۰} = \text{مجموع معکوس مقسوم‌علیه‌های ۱۰}$$

با استفاده از راهبرد الگویابی، نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد دلخواه، مجموع معکوس مقسوم‌علیه‌های آن را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\text{مجموع مقسوم‌علیه‌های آن عدد} = \frac{\text{مجموع معکوس مقسوم‌علیه‌های آن عدد}}{\text{خود عدد}}$$

حال مسئله را برای عدد ۱۲۰ حل می‌کنیم:

$$\frac{۳۶۰}{۱۲۰} = ۳ = \text{مجموع معکوس مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰}$$

۲۶- گزینه (۲)

حل: راهبرد حدس و آزمایش

تعداد کل سکه‌ها باید ۲۰ و ارزش کل سکه‌ها باید ۲۲۰۰ تومان شود. بنابراین:

تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی	تعداد سکه‌های ۲۰۰ تومانی	ارزش سکه‌های ۵۰ تومانی	ارزش سکه‌های ۲۰۰ تومانی	ارزش کل سکه‌ها
۱۰	۱۰	$۱۰ \times ۵۰ = ۵۰۰$	$۱۰ \times ۲۰۰ = ۲۰۰۰$	۲۵۰۰
۱۱	۹	$۱۱ \times ۵۰ = ۵۵۰$	$۹ \times ۲۰۰ = ۱۸۰۰$	۲۳۵۰
۱۲	۸	$۱۲ \times ۵۰ = ۶۰۰$	$۸ \times ۲۰۰ = ۱۶۰۰$	۲۲۰۰

تعداد سکه‌های ۲۰۰ تومانی ۸ عدد است.



۲۷- گزینه (۳)

حل: راهبرد روش نمادین

سن هادی را H ، علی را A و نیما را N فرض می‌کنیم و داریم:

$$\begin{array}{r} H + A = 37 \\ A + N = 44 \\ + H + N = 33 \\ \hline \end{array}$$

مجموع سن هر سه نفر $2(H + A + N) = 114 \rightarrow H + A + N = 114 \div 2 = 57$

کافی است مجموع سن علی و هادی ($H + A = 37$) را از مجموع سن هر سه ($H + A + N = 57$) کم کنیم، تا سن نیما به دست آید.

$سن\ نیما = 57 - 37 = 20$

۲۸- گزینه (۴)

حل: راهبرد زیرمسئله

۱- در حالت دوم چند دفتر بیش‌تر خریده است؟

۲ دفتر بیش‌تر خریده $7 - 5 = 2$

۲- در حالت دوم چند خودکار کم‌تر خریده است؟

۸ خودکار کم‌تر خریده $10 - 2 = 8$

۳- قیمت دفتر چند برابر قیمت خودکار بوده است (چند خودکار را با ۱ دفتر عوض کرده است)؟

قیمت ۸ خودکار = قیمت ۲ دفتر

قیمت ۴ خودکار = قیمت ۱ دفتر $\rightarrow 4 = 8 \div 2$

۴- در حالت اول به‌جای ۵ دفتر چند خودکار می‌تواند بخرد؟

۲۰ خودکار $5 \times 4 = 20$ به‌جای ۵ دفتر

۵- در حالت اول، با کل پولش در مجموع چند خودکار می‌تواند بخرد؟

خودکارهایی که به‌جای دفترها خریده + خودکارهای قبلی = کل خودکارها

کل خودکارها $10 + 20 = 30$

۶- با کل پولش چند خودکار می‌تواند بخرد؟

۳۰ خودکار = با ۲ برابر پولش

۱۵ خودکار $30 \div 2 = 15$ با پولش

تذکره: سوالات ۴ و ۵ را می‌توانستیم برای حالت دوم هم طرح کنیم که باز هم پاسخ نهایی تغییری



نمی‌کرد.



۲۹- گزینه (۱)

حل: راهبرد زیرمسئله

- ۹ سال بعد در مجموع چند سال بزرگتر می‌شوند؟
- هم‌اکنون مجموع سن آنها چه قدر است؟
- هم‌اکنون هر کدام چند سال دارند؟

$$3 \times 9 = 27$$

$$45 - 27 = 18$$

مهدی	۱	۳
آرش	۲	۶
رامین	۳	۹
مجموع	۶	۱۸

$$9 - 2 = 7$$

- رامین ۲ سال پیش چند سال داشته است؟

۳۰- گزینه (۳)

حل: راهبرد الگوسازی

یکان حاصل ضرب چند عدد، برابر با یکان حاصل ضرب یکان‌های آن‌هاست. مثلاً: ساده‌تر است که به جای ضرب کردن خود اعداد، یکان‌های آن‌ها را در هم ضرب کنیم، چون پاسخ تفاوتی نمی‌کند.

$$\left. \begin{array}{l} 12 \times 27 \times 34 = 1101 \boxed{6} \\ 2 \times 7 \times 4 = 5 \boxed{6} \end{array} \right\} \rightarrow$$

حاصل ضرب یکان‌های ۳ عدد زوج متوالی می‌تواند یکی از حالات زیر باشد:

یکان حاصل ضرب ۳ عدد متوالی	حاصل ضرب یکان‌های ۳ عدد متوالی
۰	$0 \times 2 \times 4 = 0$
۸	$2 \times 4 \times 6 = 48$
۲	$4 \times 6 \times 8 = 192$
۰	$6 \times 8 \times 0 = 0$
۰	$8 \times 0 \times 2 = 0$

بنابراین یکان حاصل ضرب ۳ عدد زوج متوالی همواره یکی از ارقام ۰، ۲ یا ۸ است.

★ پایانی

۳۱- گزینه (۲)

حل: راهبرد حل مسئله ساده‌تر

از آن‌جا که یکان عدد فرد است، حتماً یکان‌های اعداد ۴ رقمی و ۳ رقمی متفاوت هستند، زیرا اگر یکان‌ها یکسان بود، حاصل جمع آن‌ها دو برابر یکان و عددی زوج می‌شد. پس مرتبه حذف شده یکان است. مسئله را برای یک عدد کوچکتر، مثلاً سه رقمی حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم: حاصل جمع یک عدد سه رقمی با عددی دو رقمی که از حذف مرتبه یکان این عدد سه رقمی به دست آمده، ۴۹۷ است. عدد سه رقمی را پیدا می‌کنیم.



$$\begin{array}{r} \text{ی د ص} \\ + \text{ص د} \\ \hline ۴۹۷ \end{array} \rightarrow \begin{cases} \text{ص} = ۴ \\ \text{ص} + \text{د} = ۹ \rightarrow ۴ + \text{د} = ۹ \rightarrow \text{د} = ۵ \\ \text{ی} + \text{د} = ۷ \rightarrow \text{ی} + ۵ = ۷ \rightarrow \text{ی} = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} ۴۵۲ \\ + ۴۵ \\ \hline ۴۹۷ \end{array}$$

بنابراین عدد سه رقمی برابر با ۴۵۲ است و داریم:

حال مسئله را برای عدد چهار رقمی داده شده حل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} \text{ه ص د ی} \\ + \text{ه ص د} \\ \hline ۳۹۳۹ \end{array} \rightarrow \begin{cases} \text{ه} = ۳ \\ \text{ص} + \text{ه} = ۹ \rightarrow \text{ص} + ۳ = ۹ \rightarrow \text{ص} = ۶ \\ \text{د} + \text{ص} = ۳ \rightarrow \text{د} + ۶ = ۳ \rightarrow \text{د} = -۳ \end{cases}$$

قابل قبول نیست.

پس به‌طور حتم، مجموع ارقام مرتبه‌های دهگان و یکان ۱۳ است و داریم:

$$\textcircled{1} \begin{array}{r} \text{ه ص د ی} \\ + \text{ه ص د} \\ \hline ۳۹۳۹ \end{array} \rightarrow \begin{cases} \text{ه} = ۳ \\ \text{ص} + \text{ه} + ۱ = ۹ \rightarrow \text{ص} + ۳ + ۱ = ۹ \rightarrow \text{ص} = ۵ \\ \text{د} + \text{ص} = ۱۳ \rightarrow \text{د} + ۵ = ۱۳ \rightarrow \text{د} = ۸ \\ \text{ی} + \text{د} = ۹ \rightarrow \text{ی} + ۸ = ۹ \rightarrow \text{ی} = ۱ \end{cases}$$

بنابراین عدد چهار رقمی برابر با ۳۵۸۱ و مجموع ارقام آن برابر با ۱۷ است.

$$(۳ + ۵ + ۸ + ۱ = ۱۷)$$

۳۲- گزینه (۳)

حل: راهبرد زیرمسئله

- سرعت اتوبوس چند متر بر ثانیه است؟

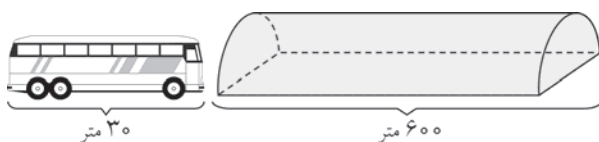
$$۷۲۰۰۰ \text{ متر} = ۷۲ \times ۱۰۰۰ = ۷۲ \text{ کیلومتر} \rightarrow ۱ \text{ کیلومتر} = ۱۰۰۰ \text{ متر}$$

$$۳۶۰۰ \text{ ثانیه} = ۱ \text{ ساعت}$$

$$\text{سرعت اتوبوس} = \frac{۷۲۰۰۰}{۳۶۰۰} = ۲۰ \text{ متر بر ثانیه}$$

- این اتوبوس باید چه مسافتی را طی کند تا به‌طور کامل از تونل عبور کند؟

از راهبرد رسم شکل استفاده می‌کنیم:



از زمانی که ابتدای اتوبوس وارد تونل می‌شود تا زمانی که انتهای آن از تونل خارج می‌شود، ۶۳۰ متر (۳۰ + ۶۰۰ = ۶۳۰) طی می‌کند.

- چند ثانیه طول می‌کشد تا این اتوبوس به‌طور کامل از تونل عبور کند؟

$$۶۳۰ \div ۲۰ = ۳۱ \frac{۱}{۵} \text{ ثانیه}$$



۳۳- گزینه (۳)

حل: راهبرد حدس و آزمایش

گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

۱۲۳۴۵ ← پس از اتمام هر کارت یک میهمان سر رسیده و همان کارت را گرفته است. (قابل قبول)
 ۱۳۲۵۴ ← یکی از میهمانان پس از اتمام اولین کارت، دو تای آن‌ها پس از اتمام سومین کارت و دو نفر دیگر پس از اتمام پنجمین کارت رسیده‌اند. (قابل قبول)
 ۴۵۲۳۱ ← اولین میهمان پس از اتمام چهارمین کارت و میهمانان بعدی پس از اتمام پنجمین کارت سر رسیده‌اند، اما در این بین یک اشتباه رخ داده، چراکه باید ترتیب به صورت ۱ ۳۲ ۴۵ باشد و میهمان سوم باید سومین کارت را بگیرد، نه دومین کارت! (غیر قابل قبول)
 ۳۲۴۵۱ ← دو میهمان پس از اتمام سومین کارت، یکی پس از اتمام چهارمین کارت و دو نفر دیگر پس از اتمام پنجمین کارت سر رسیده‌اند. (قابل قبول)

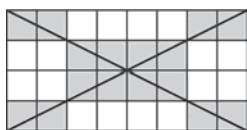
۳۴- گزینه (۱)

حل: راهبرد الگویابی و رسم شکل

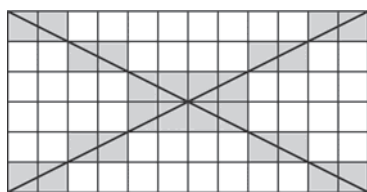
چهارخانه‌های مختلف را رسم و تعداد مربع‌هایی را که قطر با آن‌ها برخورد نمی‌کند را به دست می‌آوریم.



(۲ × ۴)



(۴ × ۸)



(۶ × ۱۲)

شکل	تعداد مربع‌های خط خورده	تعداد مربع‌های خط نخورده (مربع‌های کل خورده - کل مربع‌ها)
اول	۸	$۸ - ۸ = ۰$
دوم	۲×۸	$۳۲ - ۱۶ = ۱۶$
سوم	۳×۸	$۷۲ - ۲۴ = ۴۸$

در چهارخانه $n \times n$ ، تعداد $۸n$ از مربع‌ها خط‌خورده و مابقی خط‌نخورده است. بنابراین در چهارخانه (۸×۱۶) تعداد مربع‌هایی که قطر با آن‌ها برخورد نکرده، برابر است با:

$$(۸ \times ۱۶) - (۴ \times ۸) = ۱۲۸ - ۳۲ = ۹۶$$

۳۵- گزینه (۳)

حل: راهبرد الگویابی

اعداد را ادامه می‌دهیم و متوجه می‌شویم از یک جایی به بعد (که در جدول با رنگ تیره مرز آن مشخص شده است)، اعداد هر ردیف ۴ تا ۴ تا افزوده می‌شوند. بنابراین برای یافتن جایگاه یک عدد کافی است آن را بر ۴ تقسیم کرده و با توجه به باقی‌مانده تقسیم، ردیف آن را مشخص کنیم.



اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴، برابر ۳ است.	A	۷	۱۱	۱۵	۱۹	۲۳		
اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴، برابر ۰ است.	B	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	
اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴، برابر ۱ است.	C	۲	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	...
اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴، برابر ۲ است.	D	۱	۳	۶	۱۰	۱۴	۱۸	۲۲

$$\begin{array}{r} 129 \overline{) 4} \\ -12 \quad 32 \\ \hline 009 \\ -8 \\ \hline 1 \end{array}$$

عدد ۱۲۹ در ردیف C قرار می‌گیرد. →

۳۶- گزینه (۲)

حل: راهبرد روش نمادین

قیمت مداد را □ و قیمت خودکار را ○ فرض می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} \square\square\square\square\square + \circ\circ\circ = 2400 \\ + \quad \square\square + \circ\circ\circ\circ\circ = 2000 \\ \hline \square\square\square + \circ\circ\circ\circ \\ \square\square\square + \circ\circ\circ\circ = 4400 \end{array} \rightarrow \square + \circ = 4400 \div 8 = 550$$

قیمت یک خودکار و یک مداد ۵۵۰ تومان است.

$$\rightarrow \square\square + \circ\circ = 2 \times 550 = 1100 \text{ قیمت ۲ خودکار و ۲ مداد}$$

با مقایسه این قیمت با خرید سیاوش می‌توان قیمت خودکار را به دست آورد:

$$\begin{array}{r} \cancel{\square\square} \cancel{\circ\circ} \circ\circ\circ = 2000 \\ - \cancel{\square\square} \cancel{\circ\circ} \quad \quad = 1100 \\ \hline \circ\circ\circ = 2000 - 1100 = 900 \rightarrow \circ = 300 \text{ قیمت یک خودکار} \end{array}$$

۳۷- گزینه (۳)

حل: راهبرد الگوسازی

تمام حالات ممکن برای این‌که حاصل ضرب سن این افراد ۶۰ سال شود را در نظر می‌گیریم.

در هیچ‌یک از حالات، مجموع سن افراد ۲۲ سال نمی‌شود.

سن افراد	مجموع سن افراد
۱, ۱, ۶۰	۶۲
۱, ۲, ۳۰	۳۳
۱, ۳, ۲۰	۲۴
۱, ۴, ۱۵	۲۰
۱, ۵, ۱۲	۱۸
۱, ۶, ۱۰	۱۷
۲, ۲, ۱۵	۱۹
۲, ۳, ۱۰	۱۵
۲, ۵, ۶	۱۳
۳, ۴, ۵	۱۲

