# مقدمه

هندسه در بین شاخه‌های مختلف ریاضی از جایگاه والایی برخوردار است. از نظر تاریخی این علم را به اقلیدس، ریاضی‌دان یونانی نسبت می‌دهند ولی سال‌ها قبل از اقلیدس وجود داشته است و مورد استفاده قرار گرفته و در واقع اقلیدس اولین کسی بود که هندسه را مدون کرد.
در هندسه اقلیدسی تعداد بسیار زیادی مسئله و قضیه وجود دارد که حاصل سال‌ها تلاش و تفکر اندیشمندان بسیار زیادی بوده و اکنون گنجینه‌ای عظیم از تفکر بشری به دست ما رسیده ولی افسوس که این نسل شتابزده فرصت استفاده کافی از آن‌را ندارند. از آنجا که مخاطب این کتاب دانش‌آموزان رشته ریاضی بوده و غالباً قصد ادامه تحصیل در رشته‌های مهندسی را دارند، بد نیست اشاره کنیم به واژهٔ مهندسی، به معنای شخصی است که هندسه می‌داند و این خود بیانگر اهمیت این درس در رشته‌های مهندسی و علوم مرتبط می‌باشد متأسفانه در کتاب‌های درسی جدید از تعمق هندسه کاسته شده و کتاب‌ها به‌صورت سطحی و گذرا مفاهیم هندسه را بررسی می‌کنند و این باعث می‌شود تا دانش‌آموزان با قدرت و زیبایی استدلال در هندسه، آن‌چنان که شایسته این علم است آشنا نشوند. در این کتاب که با هدف جمع‌بندی مطالب هر سه کتاب هندسه در ماه‌های نزدیک به کنکور تألیف شده، سعی شده تمام مطالب هندسهٔ دبیرستانی به همراه تمامی تست‌های کنکورهای قبلی به‌طور کامل بررسی شود و در عین فشرده بودن مطالب به حدی جامع باشد که برای استفاده دانش‌آموزان از ابتدای سال تحصیلی هم مناسب باشد. از طرف دیگر تجربهٔ سال‌ها تدریس اینجانب در رشته‌های ریاضی و آماده‌سازی دانش‌آموزان برای کنکور سراسری باعث شده تا این کتاب در عین جامع بودن، از نکات اضافی که خارج از چارچوب‌های کتاب درسی و طرح سوال برای کنکور سراسری هستند پرهیز شود.

## ساختار و ویژگی‌های کتاب

این کتاب در ۱۰ فصل و به‌صورت موضوعی در کم‌ترین حجم، تمامی مباحث کنکور را پوشش می‌دهد که شامل قسمت‌های زیر است:

- **درسنامه:** تمامی مطالبی که در کنکور به آن نیاز دارید را به صورت عمیق توضیح داده‌ایم و در این قسمت تست‌هایی قرارداده‌ایم و کنار هر تست آیکون‌هایی وجود دارد که میزان اهمیت و نزدیکی به سؤالات کنکور را از طریق کم یا زیاد شدن آنتن نشان می‌دهد. (آنتن پر به معنی مهم بودن تست است.)

- **پرسش‌های چهار گزینه‌ای:** شامل تست‌های تألیفی و تست‌های کنکور دهۀ ۹۰ است.
- **پاسخنامۀ تشریحی:** به تمامی سؤالات به‌صورت کاملاً دقیق و مفهومی پاسخ داده‌ایم.
- **فرمول نامه:** تمامی فرمول‌های مورد نیاز را گردآوری کردیم.

## سپاس و قدردانی


- در این‌جا لازم است از تمامی عزیزانی که در آماده‌سازی این کتاب تلاش کرده‌اند، قدردانی کنم:
- جناب آقای احمد اختیاری مدیر فرهیختۀ انتشارات
- جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف
- جناب آقای عباس اشرفی مدیر محترم گروه ریاضی
- جناب آقای احسان لعل مسئول ویراستاری، خانم‌ها مهرنوش رضوی، آزاده غنی‌فرد و هستی مخدوم ویراستاران علمی کتاب
- سرکار خانم مریم تاجداری مدیر تولید، جناب آقای میلاد صفایی مدیر فنی تولید و سرکار خانم رویا طبسی و جناب آقای مجتبی حسنی صفحه‌آرایان کتاب


**علی سعیدی زاد**

**بهار ۱۳۹۹**

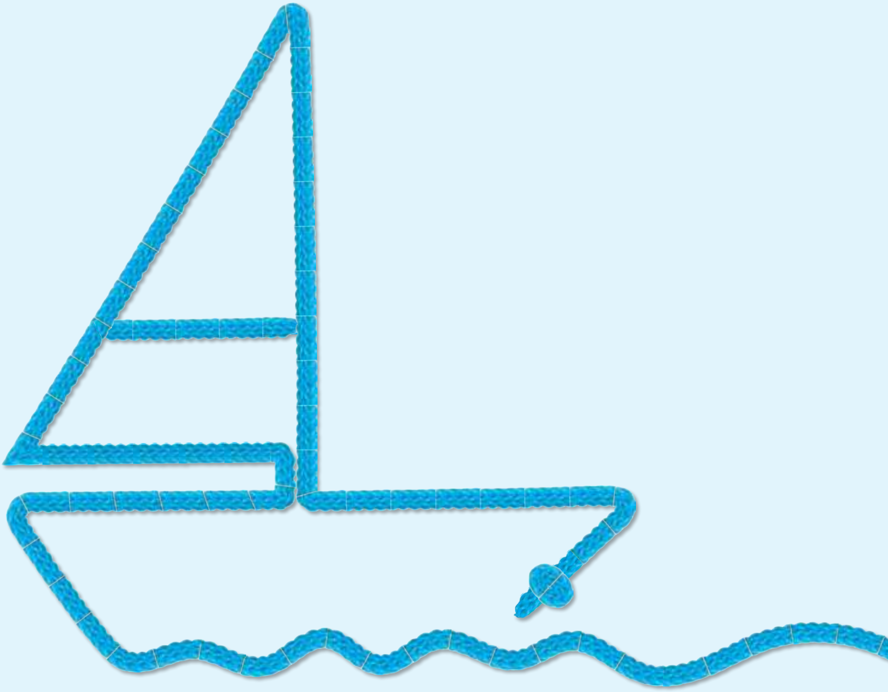
# هندسه ۱ (پایهٔ دهم)

کتاب هندسه (۱) پایهٔ دهم، ۴ فصل اول این کتاب را به خود اختصاص می‌دهد.

فصل اول «ترسیم‌های هندسی» شامل بخش‌هایی از هندسه مانند تعاریف، قضایا و مکان‌های هندسی است.

در فصل دوم علاوه بر بیان قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها، به بررسی قضیهٔ فیثاغورس و خواص مثلث قائم‌الزاویه نیز می‌پردازیم. در فصل سوم به منظور گسترش مفهوم چندضلعی، انواع چندضلعی‌ها و خواص آن‌ها را مطالعه می‌کنیم.

و نهایتاً در فصل چهارم به دلیل اهمیت هندسهٔ فضایی در پرورش قوای تفکر، به بررسی تجسم چندوجهی‌های فضایی و اشکال حاصل از برش آن‌ها، همچنین توسعهٔ تفکر تجسمی از طریق مشاهدهٔ یک جسم فضایی از زوایای مختلف می‌پردازیم.



# فهرست

فصل دوم

# قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن‌ها

## ۱ نسبت و تناسب

نسبت عدد a به عدد b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

نسبت دو مقدار، واحد ندارد، یعنی دو عدد a و b باید از یک واحد باشند. تساوی دو نسبت را یک تناسب می‌گویند. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, bd \neq 0$

### خواص تناسب

۱ طرفین وسطین: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

۲ معکوس کردن: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

۳ تعویض وسطین: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

۴ تعویض طرفین: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

۵ ترکیب در صورت: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

۶ تفضیل در صورت: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

۷ ترکیب در مخرج: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

۸ تفضیل در مخرج: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

۹ ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

۱۰ ترکیب یا تفضیل یک طرف: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$ ، $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$

### واسطهٔ هندسی (میانگین هندسی)

اگر $a^2=bc$ باشد، آن‌گاه عدد مثبت a را واسطهٔ هندسی دو عدد مثبت c و b می‌گویند.

به بیان دیگر اگر در یک تناسب طرفین دو عدد یکسان و مثبت باشند، آن‌گاه آن عدد واسطهٔ هندسی اعداد مثبتی است که در وسطین تناسب قرار گرفته‌اند.

a واسطهٔ هندسی b و c است. $\frac{a}{b}=\frac{c}{a} \Rightarrow a^2=bc$

**تست** واسطهٔ هندسی دو عدد مثبت a و b سه برابر b است. حاصل $\frac{a^{۲}}{b^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸۱ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۸۱}$

**پاسخ** **گزینهٔ«۲»** اگر واسطهٔ هندسی a و b را c بنامیم، آن‌گاه:

$$c^{۲}=ab\Rightarrow(۳b)^{۲}=ab\Rightarrow ۹b^{۲}=ab\Rightarrow a=۹b\Rightarrow\frac{a}{b}=۹\Rightarrow\frac{a^{۲}}{b^{۲}}=۸۱$$

---

اگر $۳a=۷b$ و a و b دو عدد مثبت باشند، کدام رابطه درست است؟

۱) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{a+b}{b}=\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{a}{b-a}=\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۳a-b}{b}=۶$

**پاسخ** **گزینهٔ«۴»** طبق فرض $\frac{a}{b}=\frac{۷}{۳}$ بنابراین طبق ویژگی‌های تناسب به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینهٔ «۱»}:\frac{a+b}{a-b}=\frac{۷+۳}{۷-۳}=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}$$ (ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج)

$$\text{گزینهٔ «۲»}:\frac{a+b}{b}=\frac{۷+۳}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$ (ترکیب در صورت)

$$\text{گزینهٔ «۳»}:\frac{a}{b-a}=\frac{۷}{۳-۷}=-\frac{۷}{۴}$$ (تفضیل در مخرج)

$$\text{گزینهٔ «۴»}:\frac{a}{b}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{۳a}{b}=\frac{۷}{۱}\Rightarrow\frac{۳a-b}{b}=\frac{۷-۱}{۱}=۶$$

---

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ و $k>۰$، آن‌گاه حاصل $\sqrt{\frac{۲a^{۲}+۳c^{۲}}{۲b^{۲}+۳d^{۲}}}$ کدام است؟

۱) $k$ ۲) $-k$ ۳) $\frac{۱}{k}$ ۴) $-\frac{۱}{k}$

**پاسخ** **گزینهٔ«۱»** طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

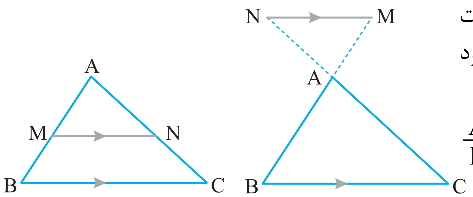
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Leftrightarrow\frac{a^{۲}}{b^{۲}}=\frac{c^{۲}}{d^{۲}}=k^{۲}\Rightarrow\frac{۲a^{۲}}{۲b^{۲}}=\frac{۳c^{۲}}{۳d^{۲}}=k^{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲a^{۲}+۳c^{۲}}{۲b^{۲}+۳d^{۲}}=k^{۲}\Rightarrow\sqrt{\frac{۲a^{۲}+۳c^{۲}}{۲b^{۲}+۳d^{۲}}}=k$$

## ۲ قضیهٔ تالس

اگر خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر و یا امتداد آنها را قطع کند، آن‌گاه نسبت پاره‌خط‌هایی که بر روی آن اضلاع ایجاد می‌شود یکسان است.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

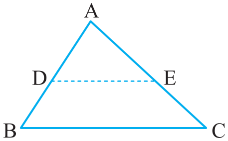



- عکس قضیهٔ تالس نیز برقرار است.

■ با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌توانیم قضیهٔ تالس را به صورت زیر بنویسیم:

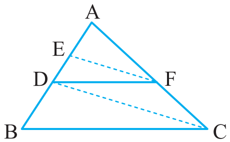
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

**نتیجه:** اگر پاره‌خطی وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل کند حتماً موازی ضلع سوم مثلث است و اندازهٔ آن نصف طول ضلع سوم مثلث می‌باشد و برعکس.




$$\begin{cases}AD=DB\\AE=EC\end{cases}\Rightarrow DE\parallel BC\ ,\ DE=\frac{۱}{۲}BC$$

**تست** در شـکل روبـه‌رو $DF\parallel BC$ ، $EF\parallel CD$ و $AD=۲BD=۶$ می‌باشند. طول پاره‌خط $AE$ کدام است؟




۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

**پاسخ** گزینهٔ «۳»

از موازی بودن $DC$ و $EF$ نتیجه می‌گیریم: $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AD}$

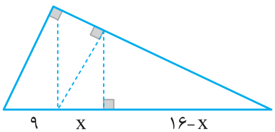
از موازی بودن $DF$ و $BC$ نتیجه می‌گیریم: $\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}$

بنابراین $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$ و درنتیجه: $AD^۲=AB.AE$

طبق فرض $AD=۶$ ، $BD=۳$ و $AB=۳+۶=۹$ . بنابراین: $۶^۲=۹AE\Rightarrow AE=۴$

---

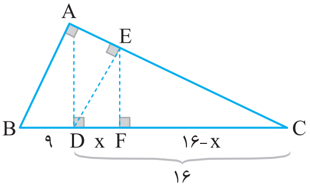
در شکل مقابل ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ $x$ کدام است؟




۱) ۴/۵۴ ۲) ۵/۳۶

۳) ۵/۷۶ ۴) ۶/۷۵

**پاسخ** گزینهٔ «۳»




از موازی بودن $EF$ و $AD$ نتیجه می‌شود: $\frac{CE}{CA}=\frac{CF}{CD}$

از موازی بودن $DE$ و $AB$ نتیجه می‌شود: $\frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{CD}{CB}=\frac{CF}{CD}\Rightarrow CD^۲=CF\times CB$$

$$۱۶^۲=(۱۶-x)\times ۲۵\Rightarrow ۱۶-x=\frac{۱۶^۲}{۲۵}=\frac{۲^۸}{۲۵}=\frac{۲^۸\times ۲^۲}{۲۵\times ۴}=۱۰/۲۴$$

$$۱۶-x=۱۰/۲۴\Rightarrow x=۵/۷۶$$

اکنون در مثلث GDC، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{GAB}}}{S_{\overset{\Delta}{GDC}}}=\left(\frac{GA}{GD}\right)^{۲}=(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{\overset{\Delta}{GAB}}}{S_{\overset{\Delta}{GDC}}-S_{\overset{\Delta}{GAB}}}=\frac{۴}{۹-۴}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{GAB}}}{S_{ABCD}}=\frac{۴}{۵}$$

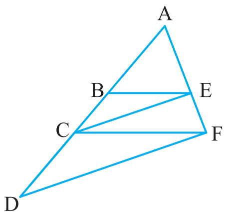
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{GAB}}=\frac{۴}{۵}S_{ABCD}$$

با توجه به (※) داریم:

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{GAF}}=\frac{۲}{۵}(\frac{۴}{۵}S_{ABCD})=\frac{۸}{۲۵}S_{ABCD}$$

که ۳۲ درصد مساحت ذوزنقه است.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای




**۱. در شکل روبه‌رو اگر $CF \| BE$، $DF \| CE$، $AB=۵$ و $BC=۳$ باشند، آن‌گاه اندازهٔ CD کدام است؟**

۱) ۴/۵
۲) ۴/۸
۳) ۵/۴
۴) ۵/۶

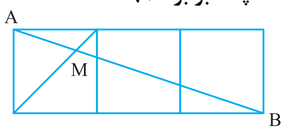
**۲. مثلثی به اضلاع a، b و ۳ با مثلثی به اضلاع ۵، ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟** (ریاضی ۹۰)

۱) ۱۳/۵
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۷/۲

**۳. در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A دو برابر اندازهٔ زاویهٔ B است. رابطهٔ بین اضلاع این مثلث کدام است؟** (تجربی ۸۸)

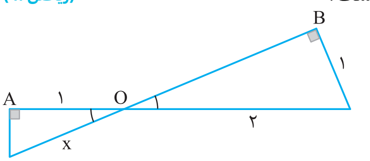
۱) $a^{۲}=bc$
۲) $b^{۲}=ac$
۳) $a^{۲}-b^{۲}=bc$
۴) $a^{۲}-c^{۲}=bc$

**۴. در شکل زیر سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. فاصلهٔ MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟**




۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

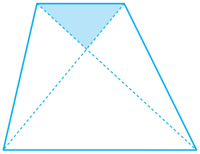
**۵. در شکل زیر دو زاویهٔ A و B قائمه‌اند. مقدار x چقدر است؟** (ریاضی ۹۱)




۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

**۶. اندازهٔ قاعده‌های یک ذوزنقه ۹ و ۶ واحد و طول پاره خطی که دو نقطهٔ وسط قاعده‌ها را به هم وصل می‌کند برابر ۱۲ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو قطر این ذوزنقه از وسط قاعدهٔ کوچک‌تر چقدر است؟**

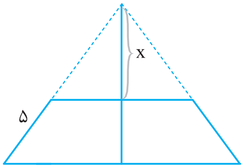
۱) ۳/۶
۲) ۴/۲
۳) ۴/۸
۴) ۵/۴
(ریاضی ۸۵)



**۷. قاعدهٔ بزرگ‌تر ذوزنقه دو برابر قاعدهٔ کوچک‌تر آن است. مساحت کل ذوزنقه چند برابر مساحت سایه زده است؟** (ریاضی خارج ۸۷)

۱) ۷ ۲) ۸

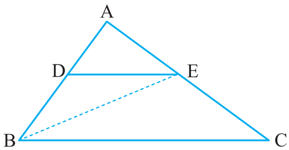
۳) ۹ ۴) ۱۰




**۸. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازهٔ ساق‌ها ۵ واحد است. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟** (ریاضی خارج ۸۵)

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸




**۹. در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC و $AD=\frac{۴}{۵}DB$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟** (ریاضی ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵

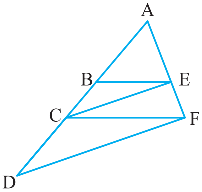
۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

**۱۰. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع این مربع کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۲) $۲\sqrt{۳}-۳$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $۴-۲\sqrt{۳}$

## پاسخ‌نامه تشریحی

**۱. گزینهٔ «۲»**




از موازی بودن BE و CF نتیجه می‌شود: ① $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}$

از موازی بودن DF و CE نتیجه می‌شود: ② $\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AF}$

$$①,②\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow AC^{۲}=AB\cdot AD\Rightarrow (۵+۳)^{۲}=۵AD\Rightarrow AD=۱۲/۸$$

$$CD=۱۲/۸-(۵+۳)=۴/۸$$

**۲. گزینهٔ «۲»**

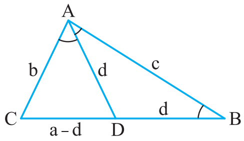
چون دو مثلث متشابه هستند، پس اضلاع آنها متناسب‌اند و چون قابل انطباق نیستند، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد.

$$\frac{۳}{a}=\frac{۴}{۳}=\frac{۵}{b}\Rightarrow a=\frac{۹}{۴},\ b=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow \text{محیط}=۳+\frac{۹}{۴}+\frac{۱۵}{۴}=۹$$

$$\frac{۳}{a}=\frac{۴}{b}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow a=\frac{۹}{۵},\ b=\frac{۱۲}{۵}\Rightarrow \text{محیط}=\frac{۹}{۵}+\frac{۱۲}{۵}+۳=۷/۲$$

بنابراین بیشترین مقدار محیط برابر ۹ می‌باشد.

**۳. گزینهٔ «۳»**



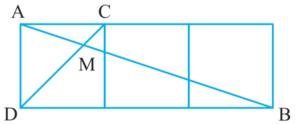

نیمساز داخلی زاویهٔ A را رسم می‌کنیم.

مثلث‌های ABC و DAC متشابه هستند.

$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{C}\\ C\hat{A}D=\hat{B}\end{cases}\Rightarrow C\overset{\triangle}{A}D\sim C\overset{\triangle}{B}A\Rightarrow \frac{CA}{CB}=\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{AC}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{a-d}{b}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{a-d}{b}\Rightarrow b^۲=a^۲-ad\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow a^۲-b^۲=bc\end{cases}$$

**۴. گزینهٔ «۲»**



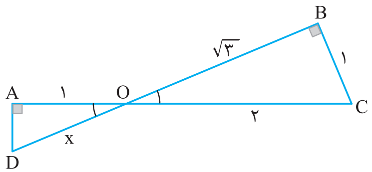

دو مثلث MAC و MBD متشابه هستند.

$$M\overset{\triangle}{A}C\sim M\overset{\triangle}{B}D\Rightarrow\frac{MA}{MB}=\frac{MC}{MD}=\frac{AC}{BD}$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{BD}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{MA}{MA+MB}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow MA=\frac{۱}{۴}AB=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

**۵. گزینهٔ «۲»**

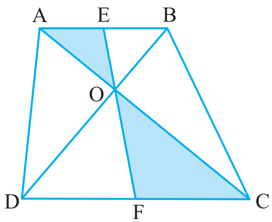
دو مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویهٔ حادهٔ هم‌اندازه داشته باشند، متشابه‌اند.




$$A\overset{\triangle}{D}O\sim B\overset{\triangle}{C}O\Rightarrow\frac{AD}{BC}=\frac{AO}{BO}=\frac{DO}{CO}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{x}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

**۶. گزینهٔ «۳»**



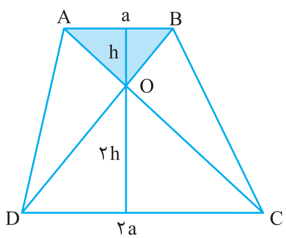

مثلث‌های AOE و COF متشابه هستند.

$$A\overset{\triangle}{O}E\sim C\overset{\triangle}{O}F\Rightarrow\frac{AO}{CO}=\frac{OE}{OF}=\frac{AE}{CF}$$

$$\frac{OE}{OF}=\frac{۶}{۹}\Rightarrow\frac{OE}{OE+OF}=\frac{۶}{۶+۹}$$

$$\Rightarrow\frac{OE}{۱۲}=\frac{۶}{۱۵}\Rightarrow OE=\frac{۶\times۴}{۵}=۴/۸$$

**۷. گزینهٔ «۳»**




مثلث‌های ABO و CDO متشابه هستند. بنابراین ارتفاع وارد بر ضلع DC در مثلث ODC دو برابر ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث OAB است.

$$S_{ABCD}=\frac{۳h(a+۲a)}{۲}=\frac{۹ah}{۲}$$

$$S_{OAB}=\frac{h(a)}{۲}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{OAB}}=۹$$

# هندسه ۲ (پایهٔ یازدهم)

مطالب کتاب هندسه (۲) پایهٔ یازدهم، فصل ۵، ۶ و ۷ این کتاب را به خود اختصاص می‌دهند.

در فصل پنجم به بررسی خواص دایره می‌پردازیم که همواره یکی از پرتکرارترین مباحث هندسه در کنکورهای سراسری است.

در فصل ششم با استفاده از تبدیلات هندسی، روش‌های ساده‌تری برای حل مسائل پیچیدهٔ هندسی ارائه می‌دهیم.

در فصل هفتم به بررسی روابط طولی در مثلث می‌پردازیم که کاربرد زیادی در رشته‌های مهندسی و همین‌طور رشتهٔ معماری دارد.

فصل پنجم

# دایره

## ۱ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

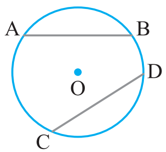
**دایره:** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت به یک مقدار ثابت باشد.

**وتر دایره:** هر پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره است وتر نامیده می‌شود. وتری که از مرکز بگذرد قطر دایره نامیده می‌شود. قطر یک دایره بزرگ‌ترین وتری است که در آن دایره رسم می‌شود و اندازهٔ آن دوبرابر شعاع دایره است.

### ویژگی‌های وترهای دایره

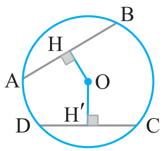
۱ در هر دایره اگر دو وتر هم‌اندازه باشند، کمان‌های متناظر آن‌ها نیز هم‌اندازه‌اند و برعکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

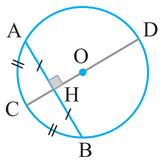



۲ در هر دایره وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز دایره کمتر و برعکس.

$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$



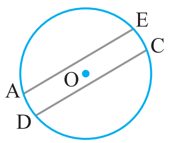

۳ در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان متناظرش را نصف می‌کند.



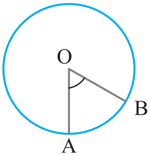

**تذکر** از هر نقطه درون دایره بی‌شمار وتر می‌گذرد که بزرگ‌ترین آن‌ها قطر است و کوچک‌ترین آن‌ها وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

۴ در هر دایره اندازهٔ کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابر است.

$$AE \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{EC}$$

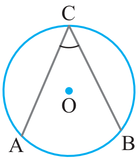


## انواع زاویه در دایره



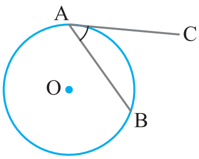

**زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌هایی از دایره است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر با اندازهٔ کمان مقابلش است.

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$




**زاویهٔ محاطی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره است. اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابلش است.

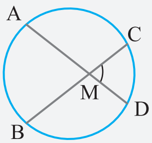
$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$




**زاویهٔ ظلی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ظلی نصف کمان مقابلش است.

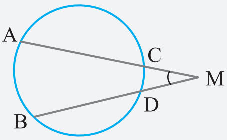
$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

**نکته:**




الف) زاویهٔ بین دو وتر متقاطع در درون دایره برابر است با نصف مجموع دو کمان مقابلش.

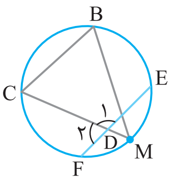
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$




ب) زاویهٔ بین دو وتر متقاطع در خارج دایره برابر است با نصف تفاضل دو کمان مقابلش.

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

**تست** **در شکل مقابل نقطهٔ M وسط کمان EF است. اندازهٔ $\hat{B}+\hat{D}_۱$ چند درجه است؟**



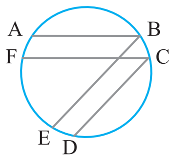

۱) ۱۶۰
۲) ۱۷۵
۳) ۱۸۰
۴) ۲۳۰

**پاسخ** **گزینهٔ «۳»** چون M وسط EF است، پس:

$$\overset{\frown}{MF} = \overset{\frown}{ME}$$

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{CM}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{MF}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{ME}}{۲} = \hat{D}_۲$$

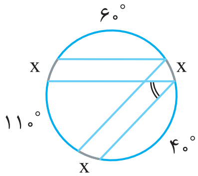
$$\hat{D}_۲ + \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ$$




در شکل روبه‌رو اگر $AB \parallel FC$ ، $CD \parallel BE$ ، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ ، $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۱۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ FCD چقدر است؟

۱) $۹۰^\circ$ ۲) $۵۵^\circ$
۳) $۷۰^\circ$ ۴) $۸۰^\circ$

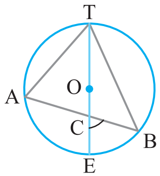
**پاسخ** گزینهٔ «۴» کمان‌های محصور بین دو وتر موازی هم‌اندازه هستند.




$$۳x + ۶۰^\circ + ۴۰^\circ + ۱۱۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$F\hat{C}D = \frac{۱۱۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$$

---




در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\hat{A} = ۶۵^\circ$ و $\hat{B} = ۳۵^\circ$ می‌باشد. زاویهٔ $\hat{C}$ چند درجه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۱
۳) ۶۲ ۴) ۶۳

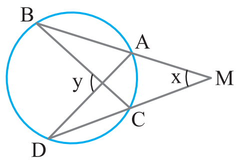
**پاسخ** گزینهٔ «۱»

$$\hat{A} = ۶۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{TB} = ۱۳۰^\circ$$

قطر است $TE \Rightarrow \overset{\frown}{TBE} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = ۱۸۰ - ۱۳۰ = ۵۰^\circ$

$$\hat{B} = ۳۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = ۷۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = \frac{۷۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

---



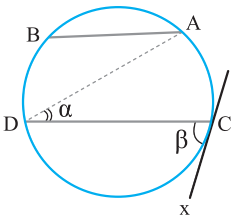

در شکل روبه‌رو $\overset{\frown}{AC} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = ۱۶۰^\circ$ می‌باشد. حاصل $y - x$ چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰
۳) ۴۵ ۴) ۵۰

**پاسخ** گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{۱۶۰^\circ + ۴۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ \\ \hat{x} &= \frac{۱۶۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow y - x = ۴۰^\circ$$

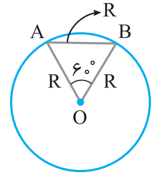
---




در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ ، زاویهٔ $\beta = ۲\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟ (ریاضی ۹۸)

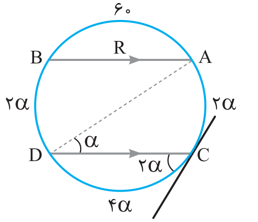
۱) ۵۰ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۷۵

**پاسخ** گزینهٔ «۴»




$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$$

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۲\alpha$$




$$AB\parallel CD\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=۲\alpha$$

$$\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=۲\alpha\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۴\alpha$$

$$\Rightarrow ۸\alpha+۶۰^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۷۵^\circ$$

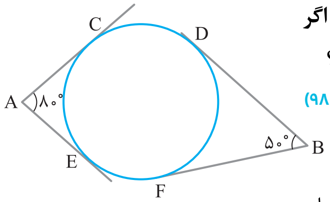
---

در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویهٔ $E\hat{D}F$ چند درجه است؟

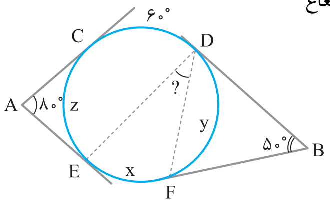
(ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۲۵    ۲) ۳۰

۳) ۳۵    ۴) ۴۰




**پاسخ** گزینهٔ «۳» با توجه به این‌که اندازهٔ وتر CD برابر با شعاع دایره است، پس $\overset{\frown}{CD}=۶۰^\circ$ است. (چرا؟) اکنون داریم:



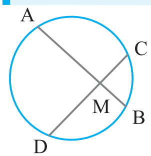

$$\begin{cases}\hat{A}=۸۰^\circ\Rightarrow \dfrac{(۶۰^\circ+y+x)-z}{۲}=۸۰^\circ\\[2mm] \hat{B}=۵۰^\circ\Rightarrow \dfrac{(۶۰^\circ+z+x)-y}{۲}=۵۰^\circ\end{cases}$$

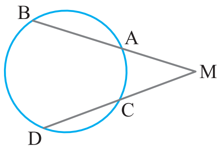
از جمع این دو تساوی داریم:

$$۶۰^\circ+x=۱۳۰^\circ\Rightarrow x=۷۰^\circ\Rightarrow \underset{\text{(محاطی)}}{E\hat{D}F}=\frac{x}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$

## ۲ روابط طولی در دایره

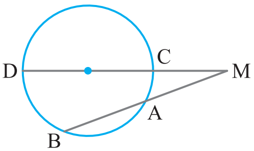
هرگاه خط‌های شامل دو وتر AB و CD از یک دایره همدیگر را در نقطه‌ای به نام M (درون یا بیرون دایره) قطع کنند، آن‌گاه:




$$MA.MB=MC.MD$$

**نتیجه:** حالتی را در نظر بگیرید که یکی از وترها از مرکز دایره عبور کند. در این حالت اگر فاصلهٔ M تا مرکز دایره را با d و شعاع دایره را با r نمایش دهیم، داریم:




$$MC=d-r,MD=d+r$$

$$MA.MB=MC.MD=(d-r)(d+r)$$

$$\Rightarrow MA.MB=d^۲-r^۲$$

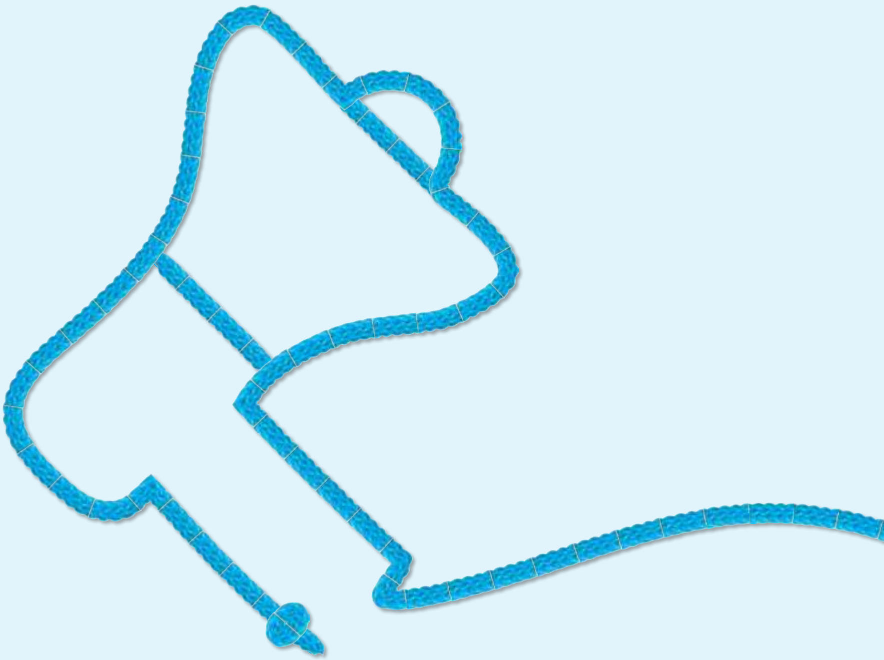
# هندسه ۳ (پایهٔ دوازدهم)

سه فصل پایانی این کتاب را به  کتاب هندسه (۳)، پایهٔ دوازدهم اختصاص داده‌ایم.

در فصل هشتم به معرفی و بررسی خواص ماتریس‌ها می‌پردازیم که یکی از پرکاربردترین ابزارهای ریاضی امروزی هستند.

در فصل نهم به معرفی مقاطع مخروطی و مکان‌های هندسی، هم‌چنین بررسی معادلات دایره و سهمی و نیز توصیف بیضی و بررسی برخی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم که همواره از مباحث پرتکرار کنکورهای سراسری بوده‌اند.

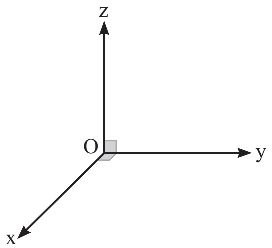
و نهایتــاً در فصل پایانــی به معرفی بردارها در فضای ســه‌بعدی می‌پردازیم و انواع ضرب بردارها را بررسی می‌کنیم و کاربرد آن در ریاضیات عمومی رشته‌های مهندسی و پیش نیاز ورود مباحث درس حسابان به فضای سه بعدی می‌باشد.



فصل دهم

# بردارها

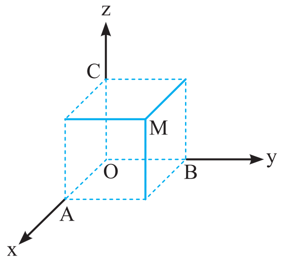
## ۱ معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$




دستگاه مختصات سه بعدی از سه محور دو به دو عمود بر هم $Ox$ و $Oy$ و $Oz$ تشکیل شده به طوری‌که اگر چهار انگشت دست راست را در جهت محور $x$ ها قرار داده و به سمت محور $y$ ها خم کنیم، انگشت شست جهت مثبت محور $z$ ها را نمایش می‌دهد.

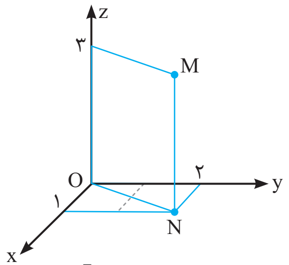
- دستگاه مختصات سه‌بعدی کل فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کند که فقط در کنج $Oxyz$ هر سه مؤلفه مثبت هستند.

### نمایش یک نقطه در فضا

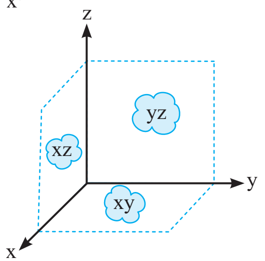



اگر $M$ نقطه‌ای در فضا باشد، برای تعیین مختصات آن سه صفحهٔ گذرنده از $M$، بر سه محور مختصات عمود می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در نقاط $A$، $B$ و $C$ قطع کند.

$$x_m = |OA| \quad y_m = |OB| \quad z_m = |OC|$$




- در شکل روبه‌رو نقطهٔ $M$ با مختصات $(۱,۲,۳)$ در دستگاه مختصات سه بعدی نمایش داده شده است.
- مختصات نقطهٔ $N$ به صورت $(۱,۲,۰)$ می‌باشد.
- نقطهٔ $N$ در صفحهٔ $xy$ قرار دارد و معادلهٔ کلیهٔ نقاط این صفحه به صورت $z = ۰$ می‌باشد.
- معادلهٔ صفحات مختصات به صورت زیر است:



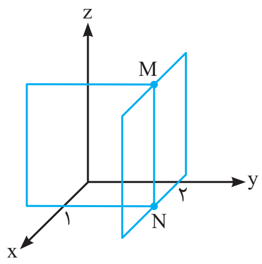

صفحهٔ $xy$ : $z = ۰$

صفحهٔ $xz$ : $y = ۰$

صفحهٔ $yz$ : $x = ۰$

■ خط MN فصل مشترک دو صفحهٔ $x=۱$ و $y=۲$ است

و معادلهٔ آن به صورت $\begin{cases} x=۱ \\ y=۲ \end{cases}$ نوشته می‌شود.




## قرینهٔ نقطه نسبت به صفحات و محورهای مختصات

برای تعیین قرینهٔ یک نقطه نسبت به صفحات و محورهای مختصات باید مؤلفهٔ غایب را قرینه کنیم.

۱ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به صفحهٔ $yOz$ برابر است با: $(-x,y,z)$

۲ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به صفحهٔ $xOz$ برابر است با: $(x,-y,z)$

۳ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به صفحهٔ $xOy$ برابر است با: $(x,y,-z)$

۴ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به محور $Ox$ برابر است با: $(x,-y,-z)$

۵ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به محور $Oy$ برابر است با: $(-x,y,-z)$

۶ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به محور $Oz$ برابر است با: $(-x,-y,z)$

۷ قرینهٔ نقطهٔ $(x,y,z)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با: $(-x,-y,-z)$

## تصویر یک نقطه روی صفحات و محورهای مختصات

برای تعیین تصویر یک نقطه روی صفحات و محورهای مختصات به جای مؤلفهٔ غایب صفر می‌گذاریم.

۱ تصویر نقطهٔ $(x,y,z)$ روی صفحهٔ $xOy$ نقطهٔ $(x,y,۰)$ می‌باشد.

۲ تصویر نقطهٔ $(x,y,z)$ روی صفحهٔ $xOz$ نقطهٔ $(x,۰,y)$ می‌باشد.

۳ تصویر نقطهٔ $(x,y,z)$ روی صفحهٔ $yOz$ نقطهٔ $(۰,y,z)$ می‌باشد.

۴ تصویر نقطهٔ $(x,y,z)$ روی محور $Ox$ نقطهٔ $(x,۰,۰)$ می‌باشد.

۵ تصویر نقطهٔ $(x,y,z)$ روی محور $Oy$ نقطهٔ $(۰,y,۰)$ می‌باشد.

۶ تصویر نقطهٔ $(x,y,z)$ روی محور $Oz$ نقطهٔ $(۰,۰,z)$ می‌باشد.

## فاصلهٔ یک نقطه از صفحات و محورهای مختصات

اگر $A(x,y,z)$ نقطه‌ای در فضا باشد:

۱ فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ $xOy$ برابر است با: $|z|$

۲ فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ $xOz$ برابر است با: $|y|$

۳ فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ $yOz$ برابر است با: $|x|$

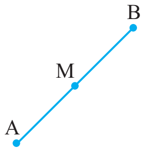
۴ فاصلهٔ نقطهٔ A از محور $Ox$ برابر است با: $\sqrt{y^۲+z^۲}$

۵ فاصلهٔ نقطهٔ A از محور $Oy$ برابر است با: $\sqrt{x^۲+z^۲}$

۶ فاصلهٔ نقطهٔ A از محور $Oz$ برابر است با: $\sqrt{y^۲+x^۲}$

۷ فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$

## فاصلهٔ دو نقطه در فضا، مختصات وسط یک پاره‌خط و قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطه‌ای دیگر:




اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه در فضا باشند، آن‌گاه:

۱ طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

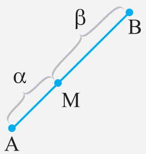
۲ مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M=\frac{A+B}{2}\Rightarrow M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

۳ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B برابر است با:

$$A'=2B-A$$

**نکته:** اگر نقطهٔ M روی پاره‌خط AB چنان قرار داشته باشد که $\frac{AM}{MB}=\frac{\alpha}{\beta}$ آن‌گاه مختصات نقطهٔ M از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:




$$\frac{AM}{MB}=\frac{\alpha}{\beta}\Rightarrow M=\frac{\alpha B+\beta A}{\alpha+\beta}$$

**تست**

**اگر نقطهٔ $A(a+1,2,c+5)$ قرینهٔ نقطهٔ $B(4,b-3,7)$ نسبت به محور yها باشد، $a+b+c$ کدام است؟**

۱) $-22$  ۲) $-12$  ۳) $-17$  ۴) $17$

**پاسخ گزینهٔ «۲»** مؤلفه‌های x و z نقاط A و B باید قرینه هم باشند و مؤلفه‌های y آن‌ها باید مساوی باشد.

$$\begin{cases}a+1=-4\Rightarrow a=-5\\ c+5=-7\Rightarrow c=-12\\ b-3=2\Rightarrow b=5\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-12$$

---

**اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,m-3,2)$ از مبدأ مختصات برابر ۳ واحد باشد، حداکثر m کدام است؟**

۱) ۱  ۲) ۳  ۳) ۵  ۴) ۷

**پاسخ گزینهٔ «۳»**

$$\sqrt{(-1)^2+(m-3)^2+(2)^2}=3\Rightarrow(m-3)^2+5=9$$

$$\Rightarrow(m-3)^2=4\Rightarrow m-3=\pm2\Rightarrow m=5 \text{ یا } m=1$$

---

**نقطهٔ $A(2,-1,3)$ مفروض است. اگر $A'$ قرینهٔ A نسبت به محور Oy و $A''$ تصویر A بر روی صفحهٔ xOy باشد. طول پاره‌خط $A'A''$ کدام است؟**

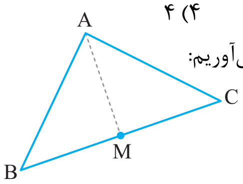
۱) ۲  ۲) ۳  ۳) ۴  ۴) ۵

**پاسخ گزینهٔ «۴»** مختصات $A'$ به صورت $(-2,-1,-3)$ و مختصات $A''$ به صورت $(2,-1,0)$ می‌باشد، بنابراین طول پاره‌خط $A'A''$ برابر است با:

$$|A'A''|=\sqrt{(2+2)^2+3^2}=5$$

نقاط $A(۲,-۱,۲)$ ، $B(۱,-۱,۲)$ و $C(۵,۳,۶)$ رئوس یک مثلث هستند. طول میانهٔ $AM$ کدام است؟

۱) ۳۷   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴




**پاسخ گزینهٔ «۳»** ابتدا مختصات نقطهٔ $M$ وسط ضلع $BC$ را به دست می‌آوریم:

$$M=\frac{B+C}{۲}=\frac{(۱,-۱,۲)+(۵,۳,۶)}{۲}=(۳,۱,۴)$$

$$|AM|=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۱+۱)^۲+(۴-۲)^۲}=۳$$

---

قرینهٔ نقطهٔ $A(-۱,۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $B(۲,۳,-۱)$ کدام است؟

۱) $(۵,۳,-۴)$   ۲) $(۵,۵,-۴)$   ۳) $(-۳,۵,۴)$   ۴) $(۳,۵,۴)$

**پاسخ گزینهٔ «۲»** اگر $A'$ قرینهٔ $A$ نسبت به $B$ باشد، آن‌گاه $B$ وسط پاره‌خط $AA'$ است.

$$B=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲B-A=۲(۲,۳,-۱)-(-۱,۱,۲)=(۵,۵,-۴)$$

---

اگر $A=(-۳,۱,۴)$ و $B=(۲,۶,۹)$ دو نقطه در فضا باشند و نقطهٔ $M$ روی پاره‌خط $AB$ قرار داشته باشد، به طوری که $\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$ ، آن‌گاه مختصات $M$ کدام است؟

۱) $(۱,۳,۶)$   ۲) $(۱,-۳,۶)$   ۳) $(۱,۳,-۶)$   ۴) $(-۱,۳,۶)$

**پاسخ گزینهٔ «۴»**

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow M=\frac{۲B+۳A}{۵}=\frac{۲(۲,۶,۹)+۳(-۳,۱,۴)}{۵}=\frac{(-۵,۱۵,۳۰)}{۵}=(-۱,۳,۶)$$

---

اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از سه محور $Ox$ و $Oy$ و $Oz$ به ترتیب $۲\sqrt{۵}$ و $۲\sqrt{۵}$ و $۴\sqrt{۲}$ باشد، فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۴}}$   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

**پاسخ گزینهٔ «۴»**

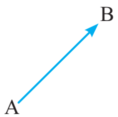
$$Ox \text{ فاصله از محور } =\sqrt{y^۲+z^۲}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow y^۲+z^۲=۲۰$$

$$Oy \text{ فاصله از محور } =\sqrt{x^۲+z^۲}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow x^۲+z^۲=۲۰$$

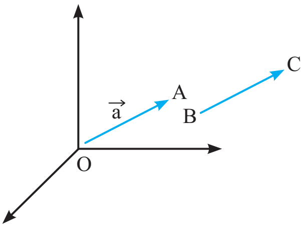
$$Oz \text{ فاصله از محور } =\sqrt{x^۲+y^۲}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow y^۲+x^۲=۳۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲=۷۲\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۳۶\Rightarrow\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۶$$

**بردار:** هر پاره‌خط جهت‌دار به شکل مقابل را یک بردار می‌نامند. $A$ ابتدای بردار و $B$ انتهای بردار نامیده می‌شود و فاصلهٔ دو نقطهٔ $A$ و $B$ را طول بردار می‌نامند.



**تساوی بردارها:** دو بردار را مساوی یا هم‌ارز گوییم هرگاه طول و جهت آن‌ها یکسان باشد.



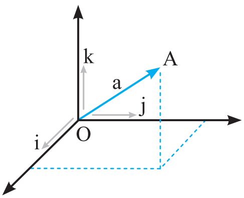

هر بردار دلخواه $\overrightarrow{BC}$ بردار هم‌ارزی دارد که از مبدأ مختصات شروع می‌شود و برای نمایش آن کافیست نقطهٔ انتهایی آن را داشته باشیم. اگر نقطهٔ مورد نظر را A بنامیم آن‌گاه آن را به صورت $\overrightarrow{OA}$ یا $\vec{a}$ نمایش می‌دهیم.

**نمایش یک بردار:** اگر نقاط A و B نقاط ابتدا و انتهای بردار AB باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ و طول آن به صورت مقابل محاسبه می‌شوند:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

اگر $\vec{a}(x,y,z)$ برداری در فضا باشد:




۱. مقادیر x، y و z را مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ یا تصاویر بردار $\vec{a}$ می‌نامیم.

۲. بردارهای $\vec{i}=(1,0,0)$ و $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$ را بردارهای یکه محورهای مختصات می‌نامیم.

۳. بردار $\vec{a}$ را می‌توان به صورت $a=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ نیز نمایش داد.

۴. تصویر بردار $\vec{a}$ روی محورهای مختصات $x\vec{i}$ و $y\vec{j}$ و $z\vec{k}$ می‌باشد.

۵. تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی صفحات مختصات برابر است با:

xOy تصویر روی : $x\vec{i}+y\vec{j}$

xOz تصویر روی : $x\vec{i}+z\vec{k}$

yOz تصویر روی : $y\vec{j}+z\vec{k}$

۶. طول تصاویر بردار $\vec{a}$ روی سه صفحهٔ مختصات برابر است با:

xz تصویر روی : $\sqrt{x^2+z^2}$

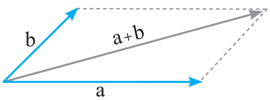
xy تصویر روی : $\sqrt{x^2+y^2}$

yz تصویر روی : $\sqrt{y^2+z^2}$

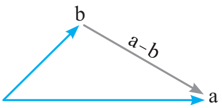
۷. طول بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

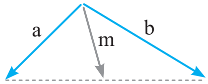
## جمع بردارها (برایند بردارها)




برای محاسبهٔ برآیند دو بردار کافیست مؤلفه‌های آن‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم. از نظر هندسی حاصل‌جمع دو بردار هم‌مبدأ، قطر متوازی‌الاضلاعی است که روی دو بردار ساخته می‌شود.



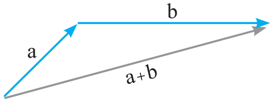

**بردار تفاضل:** تفاضل دو بردار هم‌مبدأ برداری است که دو انتهای بردارها را به هم وصل می‌کند و جهت آن به سمت بردار اول است.

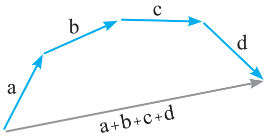



**نتیجهٔ ۱:** با توجه به این‌که در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، حاصل‌جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، دو برابر بردار میانهٔ مثلثی است که روی آن‌ها ساخته می‌شود.

$$\vec{a}+\vec{b}=۲\vec{m}$$

**نتیجهٔ ۲:** اگر دو یا چند بردار به صورتی باشند که ابتدای هر کدام بر انتهای بردار قبلی باشد، برای رسم بردار برآیند، از ابتدای اولی به انتهای آخری وصل می‌کنیم.



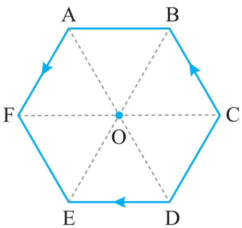




**نتیجهٔ ۳:** اگر O مبدأ مختصات باشد آن‌گاه بردار $\overrightarrow{AB}$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

**تست**

**در شش ضلعی منتظم شکل زیر حاصل $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CB}$ کدام است؟**



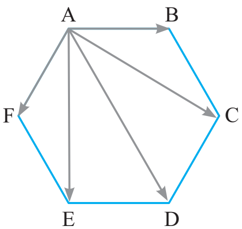

۱) $۲\overrightarrow{OD}$
۲) $۲\overrightarrow{DO}$
۳) $۲\overrightarrow{OC}$
۴) $۲\overrightarrow{CO}$

**پاسخ گزینهٔ «۴»** با توجه به شکل، بردارهای $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{BA}$ هم‌ارز هستند، بنابراین:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CF}=۲\overrightarrow{CO}$$

---

**در شش ضلعی منتظم شکل زیر $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$ چند برابر $\overrightarrow{AD}$ است؟**




۱) ۴
۲) ۳
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۵

**پاسخ گزینهٔ «۲»** با توجه به شکل نتیجه می‌گیریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

بنابراین:

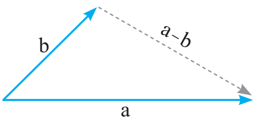
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=۳\overrightarrow{AD}$$

---

**اگر بردارهای $\vec{a}(۲,۲,۴)$ و $\vec{b}(۱,۰,۲)$ دو ضلع یک مثلث باشند، طول ضلع سوم مثلث کدام است؟**

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۴

**پاسخ گزینهٔ «۱»** طبق تعریف ابتدای بردارها بر روی مبدأ مختصات است، بنابراین ضلع سوم مثلث هم‌ارز بردار تفاضل آن‌ها می‌باشد.




$$\vec{a}-\vec{b}=(۱,۲,۲)\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۱^۲+۲^۲+۲^۲}=۳$$