

درس دوم: معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب در ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله عبارت است از:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

مثلاً در معادله $2x^2 + 5x - 3 = 0$ داریم:

$$S = -\frac{5}{2}$$

$$P = -\frac{3}{2}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 1 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید.

الف $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

ب $\alpha^2 + \beta^2$

ج $\alpha^3 + \beta^3$

د $|\alpha - \beta|$

پاسخ ابتدا S و P را به دست می‌آوریم:

$$S = -\frac{5}{1} = -5 ; P = -\frac{1}{1} = -1$$

سپس باید هر عبارت را بر حسب S و P، به صورت زیر بنویسیم:

الف $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-5}{-1} = 5$

ب $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta = S^2 - 2P = (-5)^2 - 2(-1) = 25 + 2 = 27$

ج $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS = (-5)^3 - 3(-1)(-5) = -125 - 15 = -140$

د $A = |\alpha - \beta|$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $\Rightarrow A^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \Rightarrow$

$$A^2 = S^2 - 4P = (-5)^2 - 4(-1) = 25 + 4 = 29 \Rightarrow A = |\alpha - \beta| = \sqrt{29}$$

مثال در معادله درجه دوم $2x^2 + kx + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله فوق باشند، طبق فرض داریم:

$$\alpha = 2\beta \rightarrow \alpha^2 = 2\alpha\beta \xrightarrow{\alpha\beta=P=\frac{9}{2}} \alpha^2 = 2\left(\frac{9}{2}\right) = 9 \Rightarrow \alpha = \pm 3 \Rightarrow \alpha = +3 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو ریشه مثبت} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^3 + 2\alpha^2 - \beta)(\beta^3 + 2\beta^2 - \alpha)$ را به دست آورید.

پاسخ چون α و β ریشه‌های معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند. یعنی:

$$\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = 2 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را در } \alpha \text{ ضرب می‌کنیم}} \alpha^3 + 2\alpha^2 = 2\alpha$$

و

$$\beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta = 2 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را در } \beta \text{ ضرب می‌کنیم}} \beta^3 + 2\beta^2 = 2\beta$$

$$\Rightarrow (\alpha^3 + 2\alpha^2 - \beta)(\beta^3 + 2\beta^2 - \alpha) = (2\alpha - \beta)(2\beta - \alpha) = 4\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \alpha\beta = 5\alpha\beta - 2(\alpha^2 + \beta^2) = 5P - 2(S^2 - 2P)$$

$$S = -\frac{b}{a} = -2$$

$$= 5(-2) - 2(4 + 4) = -10 - 16 = -26$$

$$P = \frac{c}{a} = -2$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۱. در معادله $x^2 + px + q = 0$ ، که در آن p و q عددهای مثبت‌اند، اگر تفاضل ریشه‌ها ۱ باشد، آنگاه p برابر است با:

- (۱) $\sqrt{4q+1}$ (۲) $q-1$ (۳) $\sqrt{4q-1}$ (۴) $q+1$

۵۲. **مریم** اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - mx + 8 = 0$ باشند و اعداد $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، آنگاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۳. **مریم** α و β ریشه‌های $2x^2 + px + 8 = 0$ هستند. $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + q = 0$ هستند. حاصل $p + q$ کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۲۰ (۳) -۲۲ (۴) -۲۴

۵۴. **مریم** ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 4 = 0$ اعدادی صحیح هستند. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۰ (۴) -۲

۵۵. به ازای کدام مقدار m ، نسبت ریشه‌های معادله $2x^2 - 10x + m = 0$ برابر ۴ است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۴ (۴) -۸

۵۶. در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری قاجار از کشور ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۵۷. α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و رابطه $\alpha + \beta = \alpha^2\beta^2$ برقرار است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $b^2 + ac = 0$ (۲) $c + ab = 0$ (۳) $c^2 - ab = 0$ (۴) $c^2 + ab = 0$

۵۸. α و β ریشه‌های معادله $(m+2)x^2 + 2nx + 9m + 3n = 0$ هستند. به ازای کدام مقدار n ، اعداد α ، β و ۳ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۹. اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+4)x + m = 0$ باشند، آنگاه حاصل $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰. α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 4x + 7 = 0$ هستند. حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۶۱. **مریم** معادله $2x^2 - (m+1)x + m = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 5$ ، آنگاه مقدار m کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) -۶ (۴) ۷

۶۲. **مریم** به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟ (سنجش ریاضی - ۹۳)

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۶۳. اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) ۷ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۳

۶۴. معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. حاصل $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۴۲۰

۶۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + 3\beta$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۱۴ (۴) ۱۴



۶۶. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 7 = 0$ باشند، آنگاه مقدار $x_1^2 + 5x_1 + x_2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۶۷. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 2x - 7 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{x_1^2(7 - 2x_2)}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

(سنجش ریاضی - ۹۴)

۶۸. **رسور** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^3 - 2\beta^2 + 4\beta$ کدام است؟

- ۰ (۱) -۸ (۲) ۱۶ (۳) -۳۲ (۴)

۶۹. **رسور** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 9 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^2}{(\beta + 3)^2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

۷۰. ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ از دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 6 = 0$ یک واحد بیشتر است. $b + c$ کدام است؟

- ۹ (۱) -۱۶ (۲) -۲۵ (۳) -۳۶ (۴)

۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$

(سراسری ریاضی - ۹۰)

به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

- ۲۷ (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴)

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

☐ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دومی باشند، در این صورت با تشکیل $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha \cdot \beta$ می‌توانیم این معادله درجه دوم را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $(2 - \sqrt{5})^3$ و $(2 + \sqrt{5})^3$ باشد.

$$S = (2 - \sqrt{5})^3 + (2 + \sqrt{5})^3 = 8 - 12\sqrt{5} + 30 - 5\sqrt{5} + 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 76$$

$$P = (2 - \sqrt{5})^3 \cdot (2 + \sqrt{5})^3 = ((2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}))^3 = (4 - 5)^3 = -1$$

پس معادله درجه دوم خواسته شده عبارت است از:

$$x^2 - 76x - 1 = 0$$

مثال معادله درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ باشد.

پاسخ راه حل اول:

$$x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow (x - 1)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\alpha = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}$$

راه حل دوم: اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم با ضرایب گویا $m + \sqrt{n}$ باشد، حتماً ریشه دیگر $m - \sqrt{n}$ است. پس در این سؤال ریشه دیگر یعنی β برابر $1 - \sqrt{3}$ است و داریم:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{3} \\ \beta &= 1 - \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = 2, P = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

پس معادله درجه دوم عبارت است از:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

تشکیل معادله درجه دوم جدید

۱۹

فصل اول: جبر و معادله

هرگاه معادله درجه دومی داشته باشیم و معادله درجه دومی دیگری بخواهیم که ریشه‌هایش رابطه‌ای با ریشه‌های معادله اول داشته باشد، باید با تشکیل S و P معادله جدید بر حسب S و P معادله اول، معادله دوم خواسته شده را از فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ بنویسیم.

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۹ برابر ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد و α' و β' ریشه‌های معادله مورد نظر باشد داریم:

$$\alpha' = 9\alpha \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha + \beta) \frac{\alpha + \beta = S = 1}{9(1)} = 9 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = 9\alpha \cdot 9\beta = 81(\alpha\beta) \frac{\alpha\beta = P = -3}{81(-3)} = -243 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $S' = 9$ و $P' = -243$ ، معادله جدید به صورت $x^2 - 9x - 243 = 0$ است.

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ و α' و β' ریشه‌های معادله مورد نظر باشد، داریم:

$$\alpha' = \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \frac{S=4}{P=1} = 16 - 2 = 14 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = P^2 = (1)^2 = 1 \end{cases}$$

با داشتن $S' = 14$ و $P' = 1$ ، معادله درجه دوم جدید به صورت $x^2 - 14x + 1 = 0$ است.

پرسش‌های چهارگزینده

۷۲. مربع مستطیلی به محیط ۳۰ و مساحت ۵۴ مفروض است. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟ (کتاب درسی)

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۷۳. می‌دانیم α ، 16 و β تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. همچنین α ، 10 و β تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. α و β ریشه‌های کدام معادله هستند؟

(۱) $x^2 - 16x + 10 = 0$ (۲) $x^2 - 32x + 10 = 0$ (۳) $x^2 - 16x + 100 = 0$ (۴) $x^2 - 32x + 100 = 0$

۷۴. مربع اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری قاجار از کشور ریاضی - ۹۰)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۷۵. مربع ریشه‌های $2 + \sqrt{5}$ و $2 - \sqrt{5}$ کدام یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟ (کتاب درسی)

(۱) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۳) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 4x - 1 = 0$

۷۶. رسوا ریشه‌های $(3 + \sqrt{5})^3$ و $(3 - \sqrt{5})^3$ کدام یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟

(۱) $x^2 - 216x + 72 = 0$ (۲) $x^2 - 144x + 64 = 0$ (۳) $x^2 - 72x + 216 = 0$ (۴) $x^2 - 64x + 144 = 0$

۷۷. ریشه‌های کدام معادله از مربع ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ یک واحد بیشتر است؟ (سبزش ریاضی - ۹۳)

(۱) $x^2 - 9x + 9 = 0$ (۲) $x^2 + 9x + 9 = 0$ (۳) $x^2 - 5x - 5 = 0$ (۴) $x^2 + 5x - 5 = 0$

۷۸. مربع اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 2 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}\right\}$ است؟

(۱) $2x^2 - 18x + 9 = 0$ (۲) $2x^2 - 18x - 9 = 0$ (۳) $2x^2 + 18x + 9 = 0$ (۴) $2x^2 + 18x - 9 = 0$

۷۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

(سراسری ریاضی - ۹۲)

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۸۰. ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۸۱. جواب‌های معادله $2x^2 + 5x + 1 = 0$ معکوس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + 4 = 0$ است. حاصل ab کدام است؟

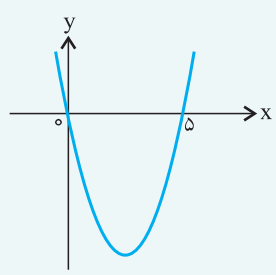
- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

صفرهای تابع درجه ۲

برای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌گویند. اگر نمودار تابع درجه ۲ که یک سهمی است را رسم کنیم، صفرهای تابع طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور x ها است.

مثال صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 5x$ را به دست آورید.

پاسخ

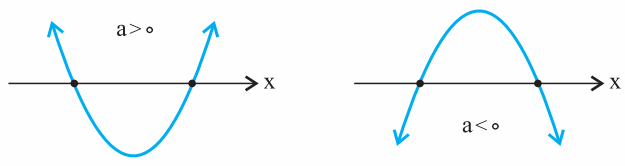


$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$$

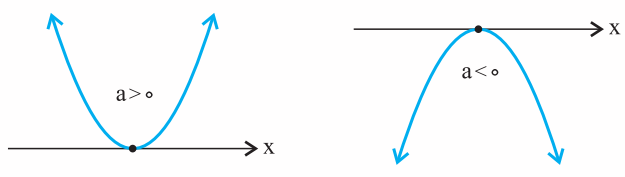
تعیین تعداد صفرهای تابع درجه ۲ به کمک علامت Δ

در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:

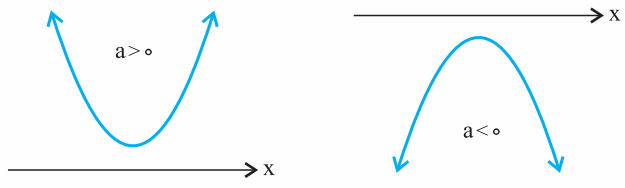
اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ دو ریشه دارد و سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.



اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد و سهمی در یک نقطه بر محور x ها مماس است.



اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ ریشه ندارد و سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند.



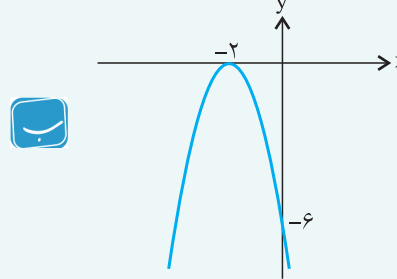
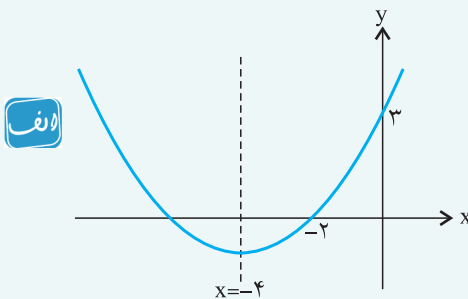
تعیین معادله سهمی به کمک صفرهای تابع درجه ۲

۲۱

فصل اول: جبر و معادله

اگر نمودار سهمی محور x ها را در ۲ نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کرده باشد (x_1 و x_2 صفرهای تابع‌اند)، در این صورت معادله سهمی را می‌توان به صورت $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ نوشت و اگر نمودار سهمی محور x ها را در یک نقطه به طول x_1 قطع کرده باشد (x_1 صفر تابع است)، در این صورت معادله سهمی را به صورت $f(x) = a(x-x_1)^2$ می‌توان نوشت که در هر حالت با داشتن مختصات یک نقطه دیگر از سهمی و صدق دادن در معادلات فوق، به راحتی می‌توانیم a را به دست آوریم و معادله سهمی را بنویسیم.

مثال معادله هریک از سهمی‌های زیر را بنویسید.



پاسخ

الف چون محور تقارن تابع است، پس نقطه برخورد دیگر سهمی با محور x ها نقطه $x = -6$ است. یعنی صفرهای تابع -2 و -6 است و داریم:

$$f(x) = a(x+2)(x+6)$$

چون نمودار محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده پس $f(0) = 3$. یعنی:

$$3 = a(0+2)(0+6) \Rightarrow 12a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x+6) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$$

ب نمودار سهمی محور x ها را فقط در نقطه $x = -2$ قطع کرده، پس فقط تابع یک صفر دارد و داریم:

$$f(x) = a(x+2)^2$$

چون نمودار محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -6 قطع کرده، پس $f(0) = -6$. یعنی:

$$-6 = a(0+2)^2 \Rightarrow a = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

در نتیجه معادله سهمی عبارت است از:

$$f(x) = -\frac{3}{2}(x+2)^2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 6x - 6$$

تذکره در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، علامت a و b و c را می‌توان با توجه به نمودار تابع، به صورت زیر تعیین کرد:

- ۱ علامت a را با توجه به ماکزیمم و یا مینیمم داشتن تابع تعیین می‌کنیم.
- ۲ علامت b را با توجه به علامت طول رأس سهمی یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ مشخص می‌کنیم.
- ۳ علامت c را با توجه به محل برخورد نمودار با محور y ها به دست می‌آوریم، چون محل برخورد نمودار تابع با محور y ها برابر $f(0) = c$ است.

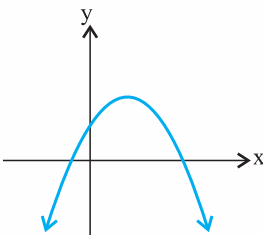
مثلاً اگر نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد:

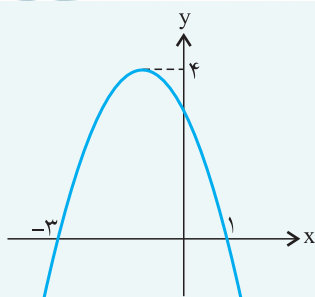
اولاً $a < 0$ است، چون سهمی ماکزیمم دارد.

ثانیاً چون رأس سهمی در ناحیه اول است، پس $x = -\frac{b}{2a} > 0$ و با توجه به اینکه

$a < 0$ است، باید $b > 0$ باشد.

ثالثاً نمودار تابع محور y ها را در قسمت مثبت‌ها قطع کرده، پس $c > 0$ است.





مثال اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $a + b$ را بیابید.

پاسخ چون نمودار تابع محور x ها را در نقاط $x = -3$ و $x = 1$ قطع کرده، پس صفرهای تابع 1 و -3 است و ضابطه آن را می‌توانیم به صورت $f(x) = a(x-1)(x+3)$ بنویسیم.

از طرفی چون نقاط برخورد نمودار با محور x ها نسبت به محور تقارن تابع متقارن هستند لذا طول رأس سهمی به صورت $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ است و با توجه به عرض رأس سهمی که در شکل داده شده مختصات رأس سهمی $A(-1, 4)$ است که در معادله تابع صدق می‌کند. یعنی:

$$4 = a(-1-1)(-1+3) \Rightarrow 4 = -4a \Rightarrow a = -1$$

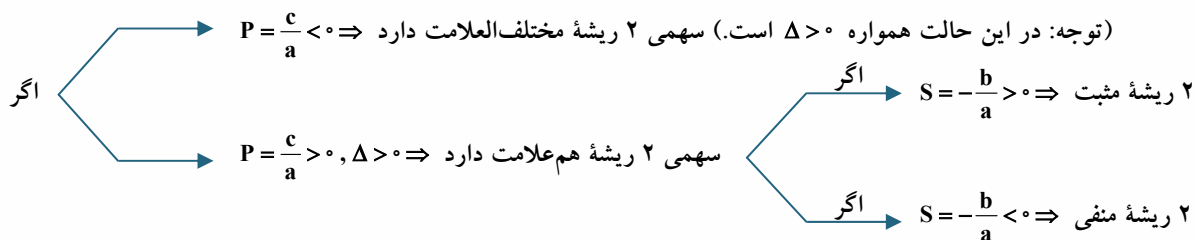
پس تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = -1(x-1)(x+3) \Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow a + b = -1 + (-2) = -3$$

علامت صفرهای تابع درجه ۲

□ برای تعیین علامت صفرهای تابع درجه ۲ (در صورت وجود) که همان علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است، می‌توانیم از علامت S و P به صورت زیر کمک بگیریم:



مثال تعداد و علامت صفرهای هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

الف $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$

ب $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

پاسخ

الف $f(x) = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4(5)(-1) = 29 > 0 \rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ متمایز دارد

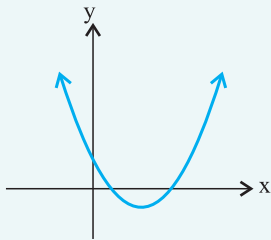
$P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5} < 0 \rightarrow$ ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت‌اند

ب $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1 > 0 \rightarrow$ سهمی ۲ ریشهٔ متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند



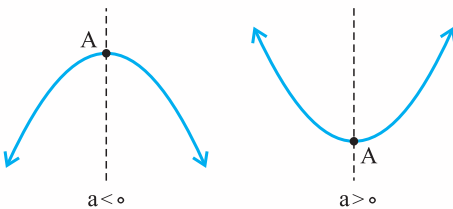
مثال اگر نمودار سهمی به معادله $f(x) = 2x^2 - 4x + m - 3$ مطابق شکل مقابل باشد، حدود تغییرات m را به دست آورید.

پاسخ مطابق شکل، سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کرده است، پس معادله $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ باید دو ریشه مثبت داشته باشد. یعنی باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(2)(m-3) > 0 \Rightarrow m < 5 & \text{1} \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m-3 > 0 \Rightarrow m > 3 & \text{2} \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{2} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} & \text{3} \end{cases} \Rightarrow \text{1} \cap \text{2} \cap \text{3} \Rightarrow 3 < m < 5$$

ماکزیمم یا مینیمم سهمی

نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک سهمی است. به یکی از دو صورت زیر:



نقطه A را رأس سهمی می‌گویند.

طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

اگر $a > 0$ باشد، سهمی رو به بالا و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ سهمی مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.

اگر $a < 0$ باشد، سهمی رو به پایین و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ سهمی ماکزیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.

مثال بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ را بیابید.

پاسخ

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow f(2) = -4 + 8 - 3 = 1$$

نکته 1 مختصات رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت $A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.

نکته 2 سهمی دارای یک خط محور تقارن به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ است.

مثال نمودار تابع به معادله $f(x) = mx^2 + 4x + m$ مینیممی به عرض -3 دارد، در این صورت تابع با کدام عرض محور y ها را قطع می‌کند؟

پاسخ

$$y_A = -3 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -3 \Rightarrow \frac{-(16 - 4m^2)}{4m} = -3 \Rightarrow 4m^2 - 16 = -12m \Rightarrow 4m^2 + 12m - 16 = 0 \Rightarrow$$

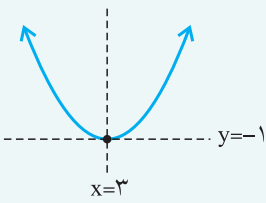
$$m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ یا } m = 1$$

چون تابع مینیمم دارد، باید $a > 0$ باشد، پس $m = -4$ غیرقابل قبول است و فقط $m = 1$ قابل قبول است و داریم:

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \xrightarrow{x=0} f(0) = 1$$

برخورد با محور y ها

مثال خط به معادله $y = -1$ محور تقارن تابع با ضابطه $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می کند. مقدار a را بیابید.

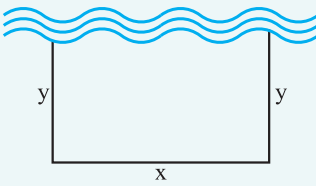


پاسخ
محور تقارن: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{\frac{2}{3}} = 3$

مطابق شکل چون محور تقارن خط $y = -1$ را روی منحنی قطع می کند، در واقع مختصات رأس سهمی به صورت $A(3, -1)$ است، پس:

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + a \xrightarrow{(3, -1)} -1 = \frac{1}{3}(9) - 6 + a \Rightarrow a = 2$$

مثال بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می توان توسط یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، 648 متر مربع است. طول طناب چند متر است؟



پاسخ چون یک طرف زمین مستطیل شکل رودخانه است (مطابق شکل) پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیل شکل را پوشش می دهد و داریم:

$$L = 2y + x$$

از طرفی خود مسئله بیشترین مساحت را تعیین کرده که می توان با استفاده از آن طول طناب را به دست آورد:

$$\text{مساحت } S = xy \xrightarrow{x=L-2y} S = (L-2y)y = Ly - 2y^2 = -2y^2 + Ly$$

با توجه به اینکه معادله یک سهمی است، بیشترین مقدار S به ازای $y = \frac{-L}{-4} = \frac{L}{4}$ به دست می آید، پس:

$$S_{\max} = -2\left(\frac{L}{4}\right)^2 + L\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{8} = 648 \Rightarrow L^2 = 8 \times 648 = 16 \times 324 \Rightarrow L = 4 \times 18 = 72$$

پس طول طناب 72 متر است.

پرسش های چهارگزینیه

۸۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = mx^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع می کند؟

- (۱) $(-3, 2)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(0, 6)$ (۴) $(-3, 3)$

۸۳. به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

۸۴. به ازای چند مقدار m ، نمودار تابع $f(x) = \left(3 - \frac{x}{m}\right)(mx - 1)$ مماس بر محور x ها است؟ (سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۲)

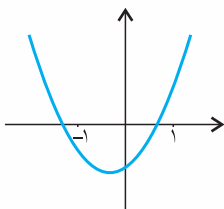
- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 0

۸۵. یک موشک با سرعت اولیه 160 متر بر ثانیه از زمین پرتاب می شود. ارتفاع آن (h) در زمان t از رابطه

$$h(t) = -5t^2 + 160t$$

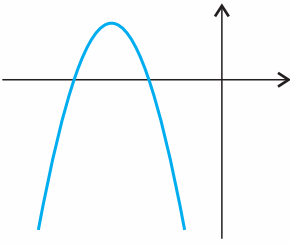
به دست می آید. در ثانیه های چندم ارتفاع موشک از سطح زمین 560 متر است؟ ارتفاع ماکزیمم موشک کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ثانیه های 6 و 26 ، ارتفاع 2560 متر
(۲) ثانیه های 4 و 28 ، ارتفاع 1280 متر
(۳) ثانیه های 6 و 26 ، ارتفاع 1280 متر
(۴) ثانیه های 4 و 28 ، ارتفاع 2560 متر



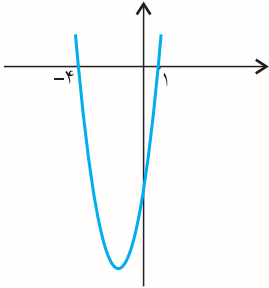
۸۶. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a - b + c > 0$ و $a + b + c > 0$
(۲) $a - b + c < 0$ و $a + b + c > 0$
(۳) $a - b + c > 0$ و $a + b + c < 0$
(۴) $a - b + c < 0$ و $a + b + c < 0$



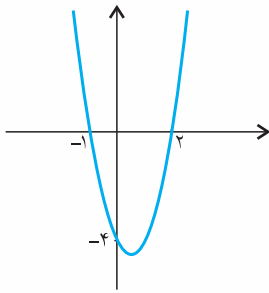
۸۷. سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $ab < 0$
- (۲) $bc < 0$
- (۳) $ab > 0$
- (۴) $ab \leq 0$



۸۸. نمودار تابع $f(x) = 2x^2 + bx + c$ به شکل روبه‌رو است. این نمودار محور y را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

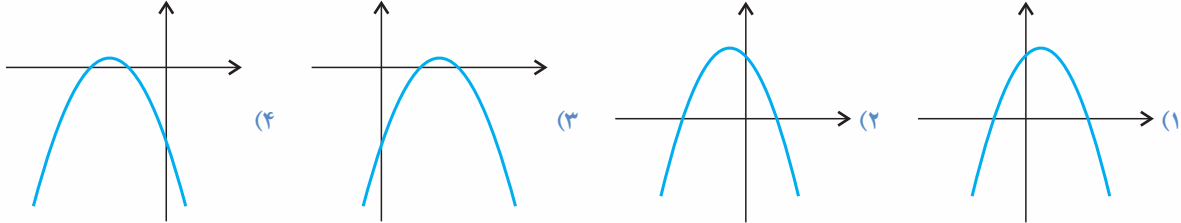
- (۱) -۶
- (۲) -۷
- (۳) -۸
- (۴) -۹



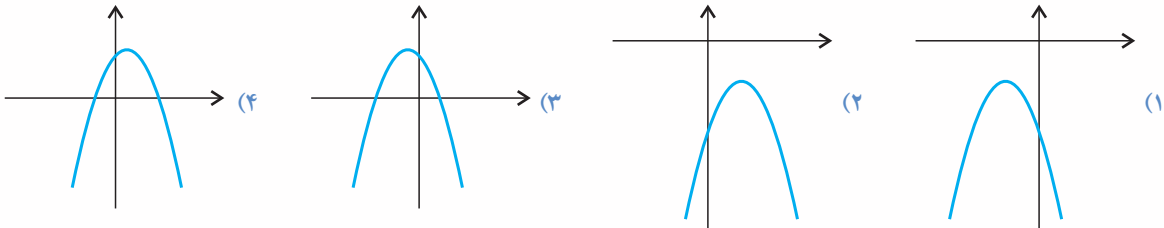
۸۹. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. حاصل $f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۲

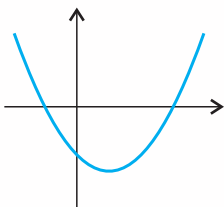
۹۰. نمودار $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ شبیه کدام گزینه است؟



۹۱. نمودار $f(x) = x - (x + 2)^2$ شبیه کدام گزینه است؟

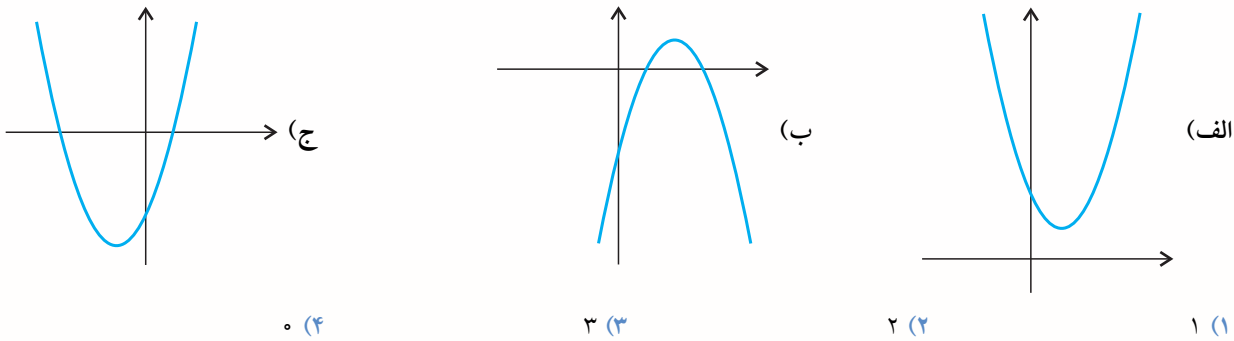


۹۲. مربع نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل است. همچنین α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. کدام گزینه درست است؟



- (۱) $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ و $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 > 0$
- (۲) $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ و $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 > 0$
- (۳) $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ و $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 < 0$
- (۴) $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ و $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 < 0$

۹۳. نمودارهای زیر مربوط به توابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. در چه تعداد از آن‌ها $abc > 0$ است؟



- (الف) ۱ (۱) (ب) ۲ (۲) (ج) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۴. به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها است؟

- (۱) $m < -\frac{1}{2}$ (۲) $-1 < m < 1$ (۳) $1 < m < \frac{3}{2}$ (۴) $m > \frac{3}{2}$

۹۵. محور تقارن سهمی $y = x^2 - 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۹۶. تابع $f(x) = x^2 - 6x + k$ مفروض است. خط $y = 3$ محور تقارن تابع را در نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۹۷. رأس سهمی به معادله $y = x^2 + 2x - 8$ و نقاط تلاقی این سهمی با محور x ها، سه رأس یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۹۸. مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ ، در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{1}{4}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ (سراسری تهرانی - ۸۹)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵٫۵ (۴) ۶

۹۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟ (سراسری قاجار از کشور ریاضی - ۹۵)

- (۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$

۱۰۰. نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟ (سراسری قاجار از کشور تهرانی - ۹۳)

- (۱) ۱ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

۱۰۲. حدود a کدام باشد، تا نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (2a+1)x + (a-1)$ فقط از ناحیه چهارم محورهای مختصات نگذرد؟

- (۱) $a \geq 1$ (۲) $-\frac{1}{8} < a < 1$ (۳) $-\frac{1}{8} < a < \frac{3}{2}$ (۴) $a < -\frac{1}{8}$

۱۰۳. به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) $a \leq -2$ (۲) $a > 0$ (۳) $a > -2$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۱۰۴. به ازای کدام مقادیر m ، سهمی $y = (m+1)x^2 - 2x + m - 3$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

- (۱) $m > 3$ یا $m < -1$ (۲) $-1 < m < 3$ (۳) $m > 1$ یا $m < -3$ (۴) $-3 < m < 1$

۱۰۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - kx + 3k - 2 = 0$ باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار k ، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ (کمترین مقدار) می‌شود؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۱۰۶. **رَسُر** α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (m+1)x + 6 = 0$ هستند. حدود m برای آن که $\alpha < -3 < \beta$ باشد، کدام است؟

$m < -9$ (۴)

$m > -9$ (۳)

$m < -6$ (۲)

$m > -6$ (۱)

صفرهای توابع درجه بالاتر از ۲

صفرهای تابع f (در صورت وجود) مفادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ صفر می‌شود، یعنی ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. می‌توان گفت صفرهای تابع طول نقاط تلاقی نمودار f با محور x ها هستند.

مثال صفرهای تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) - 4(x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2-4) = 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{یا} \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

مثال اگر $x=1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

پاسخ

چون $x=1$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ است، پس تابع f عاملی به صورت $(x-1)$ دارد که با تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ عوامل دیگر $f(x)$ را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - x - 3 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 4x^2 - x - 3 \\ \underline{-4x^2 + 4x} \\ 3x - 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 4x + 3)$$

و از حل معادله $f(x) = 0$ صفرهای دیگر تابع را می‌یابیم:

$$(x-1)(x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \checkmark \\ x = -3 \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

مثال اگر یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 - 2a$ برابر (-2) باشد، صفرهای دیگر تابع را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ

چون $x = -2$ یکی از صفرهای تابع است، پس $f(-2) = 0$ و داریم:

$$(-2)^4 + a(-2)^3 + (-2)^2 - 2a = 0 \Rightarrow 16 - 8a + 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

پس تابع به صورت $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$ است و عاملی به صورت $(x+2)$ دارد که با تقسیم $f(x)$ بر $(x+2)$ داریم:

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 \quad | \quad x+2 \\ \underline{-x^4 - 2x^3} \\ 3x^2 - 4 \\ \underline{-3x^2 - 6x} \\ 3x - 4 \\ \underline{-3x - 6} \\ 9x - 4 \\ \underline{-9x - 18} \\ 22x - 4 \\ \underline{-22x - 44} \\ 48x - 4 \\ \underline{-48x - 96} \\ 100x - 4 \\ \underline{-100x - 200} \\ 204x - 4 \\ \underline{-204x - 408} \\ 412x - 4 \\ \underline{-412x - 824} \\ 828x - 4 \\ \underline{-828x - 1656} \\ 1660x - 4 \\ \underline{-1660x - 3320} \\ 3324x - 4 \\ \underline{-3324x - 6648} \\ 6652x - 4 \\ \underline{-6652x - 13304} \\ 13308x - 4 \\ \underline{-13308x - 26608} \\ 26616x - 4 \\ \underline{-26616x - 53216} \\ 53232x - 4 \\ \underline{-53232x - 106432} \\ 106464x - 4 \\ \underline{-106464x - 212864} \\ 212928x - 4 \\ \underline{-212928x - 425728} \\ 425856x - 4 \\ \underline{-425856x - 851456} \\ 851712x - 4 \\ \underline{-851712x - 1702912} \\ 1703424x - 4 \\ \underline{-1703424x - 3405824} \\ 3406848x - 4 \\ \underline{-3406848x - 6811648} \\ 6813696x - 4 \\ \underline{-6813696x - 13623296} \\ 13627392x - 4 \\ \underline{-13627392x - 27246592} \\ 27254784x - 4 \\ \underline{-27254784x - 54493184} \\ 54509568x - 4 \\ \underline{-54509568x - 108986368} \\ 109019136x - 4 \\ \underline{-109019136x - 217972736} \\ 218038272x - 4 \\ \underline{-218038272x - 435945472} \\ 436076544x - 4 \\ \underline{-436076544x - 871890944} \\ 872153088x - 4 \\ \underline{-872153088x - 1743781888} \\ 1744306176x - 4 \\ \underline{-1744306176x - 3487563776} \\ 3488612352x - 4 \\ \underline{-3488612352x - 6975127552} \\ 6977224704x - 4 \\ \underline{-6977224704x - 13950255104} \\ 13954449408x - 4 \\ \underline{-13954449408x - 27900510208} \\ 27908898816x - 4 \\ \underline{-27908898816x - 55801020416} \\ 55817797632x - 4 \\ \underline{-55817797632x - 111602040832} \\ 111635595264x - 4 \\ \underline{-111635595264x - 223204081664} \\ 223271190528x - 4 \\ \underline{-223271190528x - 446408163328} \\ 446542381056x - 4 \\ \underline{-446542381056x - 892816326656} \\ 893084762112x - 4 \\ \underline{-893084762112x - 1785632653312} \\ 1786169524224x - 4 \\ \underline{-1786169524224x - 3571265306624} \\ 3572339048448x - 4 \\ \underline{-3572339048448x - 7142530613248} \\ 7144678096896x - 4 \\ \underline{-7144678096896x - 14285061226496} \\ 14289356193792x - 4 \\ \underline{-14289356193792x - 28570122452992} \\ 28578712387584x - 4 \\ \underline{-28578712387584x - 57140244905984} \\ 57157424775168x - 4 \\ \underline{-57157424775168x - 114280489811968} \\ 114314849550336x - 4 \\ \underline{-114314849550336x - 228560979623936} \\ 228629699100672x - 4 \\ \underline{-228629699100672x - 457121959247872} \\ 457259398201344x - 4 \\ \underline{-457259398201344x - 914243918495744} \\ 914518796402688x - 4 \\ \underline{-914518796402688x - 1828487836991488} \\ 1829037592805376x - 4 \\ \underline{-1829037592805376x - 3656975673982976} \\ 3658075185610752x - 4 \\ \underline{-3658075185610752x - 7313951347965952} \\ 7316150371221504x - 4 \\ \underline{-7316150371221504x - 14627902695931904} \\ 14632300742443008x - 4 \\ \underline{-14632300742443008x - 29255805391863808} \\ 29264601484886016x - 4 \\ \underline{-29264601484886016x - 58511610783727616} \\ 58529202969772032x - 4 \\ \underline{-58529202969772032x - 117023221567455232} \\ 117058405939544064x - 4 \\ \underline{-117058405939544064x - 234046443134910464} \\ 234116811879088128x - 4 \\ \underline{-234116811879088128x - 468092886269820928} \\ 468233623758176256x - 4 \\ \underline{-468233623758176256x - 936185772539641856} \\ 936467247516352512x - 4 \\ \underline{-936467247516352512x - 1872371545079283712} \\ 1872934495032705024x - 4 \\ \underline{-1872934495032705024x - 3744743090158567424} \\ 3745868990065410048x - 4 \\ \underline{-3745868990065410048x - 7489486180317134848} \\ 7491737980130820096x - 4 \\ \underline{-7491737980130820096x - 14978972360634269696} \\ 14983475960261640192x - 4 \\ \underline{-14983475960261640192x - 29957944721268539392} \\ 29966951920523280384x - 4 \\ \underline{-29966951920523280384x - 59915889442537078784} \\ 59933903841046560768x - 4 \\ \underline{-59933903841046560768x - 119831778885074157568} \\ 119867807682093121536x - 4 \\ \underline{-119867807682093121536x - 239663557770148315136} \\ 239735615364186243072x - 4 \\ \underline{-239735615364186243072x - 479327115540296630272} \\ 479471230728372486144x - 4 \\ \underline{-479471230728372486144x - 958654231080593260544} \\ 958942461456744972288x - 4 \\ \underline{-958942461456744972288x - 1917308462161186521088} \\ 1917884922913489944576x - 4 \\ \underline{-1917884922913489944576x - 3834616924322373042176} \\ 3835769845826979889152x - 4 \\ \underline{-3835769845826979889152x - 7669233848644746084352} \\ 7671539691653959778304x - 4 \\ \underline{-7671539691653959778304x - 15338467697289492168704} \\ 15343079383307919556608x - 4 \\ \underline{-15343079383307919556608x - 30676935394578984337408} \\ 30686158766615839113216x - 4 \\ \underline{-30686158766615839113216x - 61353870789157968674816} \\ 61372317533231678226432x - 4 \\ \underline{-61372317533231678226432x - 122707741578315937349632} \\ 122744635066463356452864x - 4 \\ \underline{-122744635066463356452864x - 245415483156631874699264} \\ 245489270132926712905728x - 4 \\ \underline{-245489270132926712905728x - 490830966313263749398528} \\ 490978540265853425811456x - 4 \\ \underline{-490978540265853425811456x - 981661932626527498797056} \\ 981957080531706851622912x - 4 \\ \underline{-981957080531706851622912x - 1963323865253054997594112} \\ 1963934001063413703245824x - 4 \\ \underline{-1963934001063413703245824x - 3926647730506109995188224} \\ 3927868002126827406491648x - 4 \\ \underline{-3927868002126827406491648x - 7853295461012219990376448} \\ 7855736004253654812983296x - 4 \\ \underline{-7855736004253654812983296x - 15706590922024439980752896} \\ 15711472008507309625966592x - 4 \\ \underline{-15711472008507309625966592x - 31413181844048879961505792} \\ 31422944017014619251933184x - 4 \\ \underline{-31422944017014619251933184x - 62826363688097759923011584} \\ 62845888034029238503866368x - 4 \\ \underline{-62845888034029238503866368x - 125652727376195519846023168} \\ 125691776068058477007732736x - 4 \\ \underline{-125691776068058477007732736x - 251305454752391039692046336} \\ 251383552136116954015465472x - 4 \\ \underline{-251383552136116954015465472x - 502610909504782079384092672} \\ 502767104272233908030930944x - 4 \\ \underline{-502767104272233908030930944x - 1005221819009564158768185344} \\ 1005534208544467816061861888x - 4 \\ \underline{-1005534208544467816061861888x - 2010443638019128317536370688} \\ 2011068417088935632123723776x - 4 \\ \underline{-2011068417088935632123723776x - 4020887276038256635072741376} \\ 4022136834177871264247447552x - 4 \\ \underline{-4022136834177871264247447552x - 8041774552156513270144482752} \\ 8044273668355742528494895104x - 4 \\ \underline{-8044273668355742528494895104x - 16083549104313026540288965504} \\ 16087547336711485056989790208x - 4 \\ \underline{-16087547336711485056989790208x - 32167098208626053080577931008} \\ 32175094673422970113979580416x - 4 \\ \underline{-32175094673422970113979580416x - 64334196417252106161155862016} \\ 64350189346845940227959160832x - 4 \\ \underline{-64350189346845940227959160832x - 128668392834504212322311724032} \\ 128700378693691880455918321664x - 4 \\ \underline{-128700378693691880455918321664x - 257336785669008424644623448064} \\ 257400757387383760911836633328x - 4 \\ \underline{-257400757387383760911836633328x - 514673571338016849289246896128} \\ 514801514774767521823673266656x - 4 \\ \underline{-514801514774767521823673266656x - 1029347142676033698578493792256} \\ 1029603029549535043647346533312x - 4 \\ \underline{-1029603029549535043647346533312x - 2058694285352067397156987584512} \\ 2059206059099070087294693066624x - 4 \\ \underline{-2059206059099070087294693066624x - 4117388570704134794313975169024} \\ 4118412118198140174589386133248x - 4 \\ \underline{-4118412118198140174589386133248x - 8234777141408269588627950338048} \\ 8236824236396280349178772266496x - 4 \\ \underline{-8236824236396280349178772266496x - 16469554282816539177255900676096} \\ 16473648472792560698357544532992x - 4 \\ \underline{-16473648472792560698357544532992x - 32939108565633078396711801352192} \\ 32947296945585121396715089065984x - 4 \\ \underline{-32947296945585121396715089065984x - 65878217131266156793423602704384} \\ 65894593891170242793430178131968x - 4 \\ \underline{-65894593891170242793430178131968x - 131756434262532313586847205408768} \\ 131810187782340485586860356263936x - 4 \\ \underline{-131810187782340485586860356263936x - 263512868525064627173694410817536} \\ 263640375564680971173720712527872x - 4 \\ \underline{-263640375564680971173720712527872x - 527025737050129254347388821635072} \\ 527160751129361942347441425055744x - 4 \\ \underline{-527160751129361942347441425055744x - 1054051474100258508694777643270144} \\ 1054323002258723884948882850111488x - 4 \\ \underline{-1054323002258723884948882850111488x - 2108102948200517017389555286540288} \\ 2108646004517447769897765700222976x - 4 \\ \underline{-2108646004517447769897765700222976x - 4216205896401034034779110573080576} \\ 4217292009034895539795531400445952x - 4 \\ \underline{-4217292009034895539795531400445952x - 8432411792802068069558221146161152} \\ 8434584018069791079591062800891904x - 4 \\ \underline{-8434584018069791079591062800891904x - 16864823585604136139184442292322304} \\ 16869168036139582159182125601783808x - 4 \\ \underline{-16869168036139582159182125601783808x - 33729647171208272278368884584644608} \\ 33738336072279164318364251203567616x - 4 \\ \underline{-33738336072279164318364251203567616x - 67458294342416544556737769169289216} \\ 67476672144558328636728502407135232x - 4 \\ \underline{-67476672144558328636728502407135232x - 134916588284833089113475538338578432} \\ 134944144289116657273457004814270464x - 4 \\ \underline{-134944144289116657273457004814270464x - 269833176569666178226951076677156864} \\ 269968288578233314546914009628540928x - 4 \\ \underline{-269968288578233314546914009628540928x - 539766353138532357053828153354313728} \\ 539936577156466629093828019257081856x - 4 \\ \underline{-539936577156466629093828019257081856x - 1079532714277064714107656306708627456} \\ 1080105554312933258187656038514163712x - 4 \\ \underline{-1080105554312933258187656038514163712x - 2159065428544129428215312613417254912} \\ 2160211108625866516375312077028327424x - 4 \\ \underline{-2160211108625866516375312077028327424x - 43181308570882588564306252268345088} \\ 4320422217251733032750624154056654872x - 4 \\ \underline{-4320422217251733032750624154056654872x - 863626171416651771286125045366911664} \\ 8640844434503466065501248298113309744x - 4 \\ \underline{-8640844434503466065501248298113309744x - 1727252342833303542572250090733823328} \\ 17281688869006932131002496596226619488x - 4 \\ \underline{-17281688869006932131002496596226619488x - 3454504685666607085144500181467646656} \\ 34563377738013864262004993192453238976x - 4 \\ \underline{-34563377738013864262004993192453238976x - 6909013167333214152400998638935293312} \\ 69126755476027728524009986384906477952x - 4 \\ \underline{-69126755476027728524009986384906477952x - 13824126334666428304801997277870586624} \\ 138315910952055457048039969769813955904x - 4 \\ \underline{-138315910952055457048039969769813955904x - 27648252669332856409603994955961173248} \\ 276631821904108914096079939539627911808x - 4 \\ \underline{-276631821904108914096079939539627911808x - 55296505338665712819207989911922346496} \\ 553103643808217828192159879079255823616x - 4 \\ \underline{-553103643808217828192159879079255823616x - 110581010677331425638431979823844692992} \\ 11063632876164356563843195781585116522304x - 4 \\ \underline{-11063632876164356563843195781585116522304x - 221162657543262851276863879647689385984} \\ 22129265752328713127686381563170233044608x - 4 \\ \underline{-22129265752328713127686381563170233044608x - 442325315086525702553727759295378771968} \\ 4425853150465742625537275112634046609120x - 4 \\ \underline{-442585$$



پس می توان نوشت:

$$f(x) = (x+2)(x^2+x-2)$$

برای تعیین صفرهای این تابع باید (x^2+x-2) را نیز تجزیه کنیم چون $x=1$ یکی از صفرهای x^2+x-2 است پس این عبارت را بر $x-1$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ -x - 2 \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ - 2 - x \\ \underline{-(x^2 + x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

پس تابع $f(x)$ به صورت زیر می شود:

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x^2+x+2)$$

با حل معادله $f(x) = 0$ صفرهای تابع را می یابیم:

$$(x+2)(x-1)(x^2+x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \checkmark \\ (x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \checkmark \\ x^2+x+2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1-8 = -7 < 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس تابع علاوه بر $x = -2$ یک صفر دیگر یعنی $x = 1$ دارد.

روش تغییر متغیر در حل معادلات

در حل برخی از معادلات می توان با تغییر متغیر مناسب معادله را به یکی از انواع معادلات که می شناسیم، مانند معادله درجه ۲، تبدیل کنیم و پس از حل آن و با توجه به تغییر متغیر صورت گرفته جواب های معادله اولیه را بیابیم.

مثال صفرهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف $f(x) = x^4 + 2x^2 - 15$

ب $f(x) = (x^2+x+1)^2 + x^2 + x - 1$

پاسخ

الف $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

با تغییر متغیر $x^2 = t$ داریم:

$$t^2 + 2t - 15 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ یا } t = -5$$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$t = -5 \Rightarrow x^2 = -5 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

پس صفرهای تابع $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ هستند.

ب $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2+x+1)^2 + x^2 + x - 1 = 0$

با تغییر متغیر $x^2+x = t$ داریم:

$$(t+1)^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t + 1 + t - 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 3t = 0 \Rightarrow t(t+3) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ یا } t = -3$$

$$t = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$$

$$t = -3 \Rightarrow x^2 + x = -3 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 = -11 < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد}$$

پس صفرهای تابع 0 و -1 هستند.

پیش‌های چهارگزینده

۱۰۷. معادله $(x^2 + 2)^2 - 5(x^2 + 2) + 4 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سنجش ریاضی - ۹۳)

۱۰۸. تعداد و علامت جواب‌های حقیقی معادله $(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) = 5$ کدام است؟

- (۱) دو ریشه مثبت (۲) دو ریشه با علامت مخالف
(۳) یک ریشه مثبت و سه ریشه منفی (۴) دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی

۱۰۹. معادله $x^4 + 2ax^2 + a^2 - 1 = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. حدود a کدام است؟

- (۱) $a > 1$ (۲) $a < 1$ (۳) $a < -1$ (۴) $-1 < a < 1$

۱۱۰. **مسئله** دو تا از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + ax^2 - 14x + b$ هستند. صفر دیگر تابع کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۱۱. **مسئله** اگر α ، β و γ صفرهای تابع $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x$ باشند، آنگاه حاصل $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۱۲. به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. کوچکترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۴)

- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $1 + \sqrt{5}$ (۳) $-1 - \sqrt{3}$ (۴) $-1 - \sqrt{5}$

۱۱۳. اگر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - m$ محور x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۹)

x ها کدام‌اند؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ و -1 (۲) 1 و $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ و -1 (۴) 3 و $-\frac{1}{4}$

۱۱۴. به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی با قدر نسبت $q > 0$ هستند. مجموع

(سراسری تهرانی - ۹۳)

هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{117}{16}$ (۲) $\frac{125}{16}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴) $\frac{127}{8}$

۱۱۵. **مسئله** تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ مفروض است. می‌دانیم ۱ و ۴ دو تا از صفرهای تابع $f(x)$ هستند، همچنین γ نیز یکی از

صفرهای تابع $f(x-1)$ است. صفرهای تابع $f(x-2)$ کدام است؟

- (۱) ۹ و ۴، ۱ (۲) ۸ و ۵، ۲ (۳) ۸ و ۶، ۳ (۴) ۹ و ۵، ۴

۱۱۶. به ازای کدام مقادیر a ، معادله $3x^4 + 5x^2 + a^2 = 1$ فقط دو جواب قرینه هم برای x دارد؟

- (۱) $0 < a < 2$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $|a| > 1$ (۴) هر مقدار a

۱۱۷. **مسئله** صفرهای تابع $f(x) = 3x^3 + 18x^2 + ax$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۱۱۸. تعداد صفرهای تابع $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^3 - (x^2 + 3x + 1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۰

۱۱۹. **مسئله** ۰، ۱ و ۲ تمام صفرهای تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ هستند. مقدار a کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۶

روش هندسی (نموداری) حل معادلات

طول نقاط تلاقی نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس. هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.

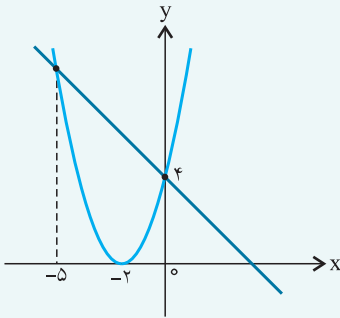
مثال معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف $(x+2)^2 = 4-x$

ب $x^2 + |x| = 2$

پاسخ

الف با فرض $f(x) = (x+2)^2$ و $g(x) = 4-x$ نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم:

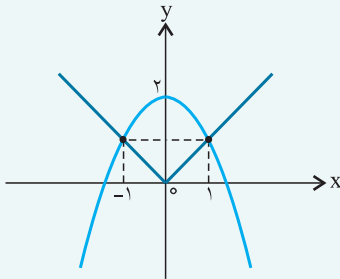


همان‌طور که می‌بینیم طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارتند از $x = -5$ و $x = 0$ که جواب‌های معادله هستند.

$x^2 + |x| = 2 \Rightarrow |x| = -x^2 + 2$



با فرض $f(x) = |x|$ و $g(x) = -x^2 + 2$ نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارتند از $x = -1$ و $x = 1$ که جواب‌های معادله‌اند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۰. مهم معادله $|x| = x^2 + x - 2$ دارای چند جواب است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۲۱. درباره تعداد و علامت جواب‌های معادله $|x| = x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

- (۱) دو جواب، یکی مثبت و دیگری منفی
 (۲) دو جواب، هر دو مثبت
 (۳) دو جواب، هر دو منفی
 (۴) سه جواب، یکی مثبت و دو تا منفی

۱۲۲. به ازای چه مقادیری از a ، معادله $|x+1| = \frac{x}{4} + a$ دارای دو جواب است؟

- (۱) $a > \frac{1}{4}$ (۲) $a < \frac{1}{4}$ (۳) $a > -\frac{1}{4}$ (۴) $a < -\frac{1}{4}$