فهرست

آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل اول

۱ استدلال ریاضی

نمی‌دانم درستش «بازی و ریاضی» است یا «ریاضی و بازی»! بچه‌ها ریاضی را می‌توانیم مثل یک بازی در نظر بگیریم.
برای این‌که درست بازی کنیم *(به اصطلاح پِر نزنیم!)* باید قواعد بازی را بلد باشیم. قواعدِ بازیِ ریاضی، همان اثبات قضیه‌ها یا ردکردن فرضیه‌ها است.
البته که دانستن چند قاعدهٔ منطقی *(مثل چیزایی که پارسال تو آمار دیدین)* با ارائهٔ یک روش استدلالی که منجر به اثباتِ درست شود، تفاوت زیادی دارد.
اثبات ریاضی، استدلال دقیقی است برای متقاعدکردن خود و دیگران در این‌که فلان مطلب درست است. هر مرحله از اثبات ریاضی، باید از نظر منطقی درست باشد و إلا کسی آن را از ما نمی‌پذیرد! در این درس می‌خواهیم کمی راجع به قواعد این بازی صحبت کنیم، ولی قبل از آن، بچه‌ها این نکته در سرتاسر این کتاب یادتان باشد «از درگیرشدن با مسئله نترسید، به فکرتان، به عقلتان، به خودتان اعتماد کنید و برندهٔ بازی باشید.» این گوی و این میدان!

پلهٔ اول: انواع روش‌های اثبات

قرار شد به جای آسمان ریسمان کردن، دلیل بیاوریم. کتاب درسی چند مدل از دلیل آوردن را گفته، مثل این‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم و می‌گوییم که چگونه و در کجا باید از آن‌ها استفاده کنید.
البته قبل از آن، کمی راجع به «ردکردن فرضیه‌ها» توضیح می‌دهم بعد می‌رسیم به آن‌ها.

- ۱ اثبات مستقیم
- ۲ اثبات به روش اشباع
- ۳ اثبات غیرمستقیم
- ۴ اثبات بازگشتی

پلهٔ دوم: مثال نقض

(جلسهٔ اول گسسته بودیم. گفتم می‌دونم همتون استقلالی هستین. چندتا از بچه‌ها گفتن، نه آقا ما پرسپولیسی هستیم. گفتم، خب این همه هم استقلالین! گفتن، آقا ادعای اولتون درست نیس! گفتم آفرین دارین درست می‌گید. بله من گفتم همه. شما برای این‌که حرف من رو رد کنین مثالی آوردین که حرف من نقض شد. هر کدوم از پرسپولیسیا مثال نقض حرف من هستن. مثال نقض کلیت رو نقض می‌کنه و می‌گه همیشه، درست نیست حالا ممکنه یه جاهایی هم درست باشه.)

مثال نقض: مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است.

مثلاً یکی از دوستان! در کشفیات اخیر خودش به این نتیجه رسیده که «عدد $3 + 2^n$ به ازای هر عدد طبیعی n، اول است.»
ما می‌خواهیم بگوییم نه آقا داری اشتباه می‌کنی. کافی است $n = 5$ قرار دهیم، چون $3 + 2^5 = 35$ می‌شود که اول نیست. با این کار، کلیت حرف او رد می‌شود، یعنی او گفته بود برای **هر عدد طبیعی n، $3 + 2^n$ اول است** ما می‌گوییم نه خیر! برای هر عدد طبیعی، اول نیست این هم مثال نقضش! نه این‌که هیچ وقت اول نباشد، مثلاً بعضی جاها (مثل $n = 1, 2, 3, 4$) اول است و بعضی جاها اول نیست. برای این‌که چیزی را در ریاضی رد کنید **باید یک مثال نقض** بیاورید. *(یه دونه کافیه!)* امیدوارم آن‌هایی که همیشه می‌پرسند «آقا چه‌جوری ثابت کنیم غلط است؟» جواب خود را گرفته باشند!
بچه‌ها مثال نقض آوردن خودش یک هنر است و همیشه هم به این سادگی‌ها نیست. حدس‌های *(مثل حدس گلدباخ که پارسال دیدین)* حل‌نشدهٔ زیادی وجود دارند که فعلاً همین‌جوری مانده‌اند! یعنی نه کسی تا حالا مثال نقض آورده، نه کسی آن‌ها را اثبات کرده است! مثلاً «اردیش» ریاضی‌دانی

مجارستانی است که اتفاقاً در گسسته، قضیه‌های بسیار زیادی کشف کرده، ۱۶۰۰ مقاله دارد و همه او را به عنوان نابغه قبول دارند. بعد از فوت او (*حدود ۲۰ ساله فوت کرده*) حدس‌های او در یک کتاب جمع‌آوری شده و اسمش را هم گذاشته‌اند «حدس‌های اردیش». یک عالمه حدس است که هنوز خیلی از آن‌ها، حل‌نشده باقی‌مانده است. البته بعضی هم حل شده است. مثلاً یکی از آن‌ها در مورد عدد تقاطع گراف بود (*در فصل بعد می‌فونی گراف چیه!*) که یک ریاضی‌دان خَفَنی به اسم «کارسون توماسون» آن را در دو خط اثبات کرده است (*بعد از اثبات گفته بود آرزو داشتم اردیش زنده بود اینو می‌دید!*) بله دست روی دست زیاد است! اردیش هم ممکن است حدس خودش را نتواند رد یا اثبات کند، ولی شما بتوانید. گفتم خودتان را دست کم نگیرید این هم نمونه‌اش.

مثال و پاسخ

مثال **ارزش گزارهٔ «جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است» را تعیین کنید.**

پاسخ گفته جمع **هر** دو عدد گنگ. اگر بخواهیم نشان دهیم که گزاره نادرست است باید دو عدد گنگ پیدا کنیم که جمع آن‌ها گنگ نباشد؛ خب مثلاً $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند، ولی $\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰$ می‌شود که هنوز گویا است. حواستان باشد برای این‌که برای گزاره‌های شرطی مثال نقض ارائه کنید، باید مثالی بیاورید که در **فرضیات مسئله، درست دربیاید ولی حکم را نقض کند.**

مثال **نشان دهید گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^{۲^n}+۱$ اول است» نادرست است.**

پاسخ باید یک عدد n پیدا کنیم به طوری که به ازای آن $۲^{۲^n}+۱$ اول نباشد. به ازای $n=۱,۲,۳,۴$ حاصل $۲^{۲^n}+۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ می‌شود که همگی اول هستند، صبر کنید نکند $۲^{۲^n}=۴^n$ بنویسید! نه خیر وقتی پرانتز نداریم باید از توان بالا شروع کنیم مثلاً اگر $n=۳$ باشد $۲^{۲^۳}+۱=۲^۸+۱=۲۵۷$ می‌شود. گفتم پیداکردن مثال نقض همیشه کار آسانی نیست! این مسئله یک مسئلهٔ تاریخی است. اصلاً تا مدت‌ها فکر می‌کرده‌اند که این دنباله، همیشه اعداد اول تولید می‌کند. بعد اویلر نشان داد که به ازای $n=۵$ حاصل $۲^{۲^۵}+۱$ به ۶۴۱ می‌خورد، یعنی اول نیست. یادتان باشد، مثال نقض این گزاره $n=۵$ است.

پلهٔ سوم: اثبات مستقیم

آیا جمع دو عدد فرد و زوج، همیشه فرد می‌شود؟ خب اجازه بدهید مثلاً $۳=۲+۱$ می‌شود. $۱۱=۸+۳$ می‌شود. $۲۷=۱۵+۱۲$ می‌شود. به نظر می‌رسد که بله این اتفاق می‌افتد! ولی چه‌جوری می‌توانیم مطمئن بشویم؟ آیا با مثال‌آوردن می‌توانیم درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم؟ مسلماً نه! چون از کجا معلوم، شاید آن گزاره در آن مثال‌هایی که ما زده‌ایم درست درآمده، ولی به ازای برخی از مثال‌های دیگر که به ذهن ما نرسیده غلط باشد! (مثلاً دنبالهٔ $n^۲+n+۴۱$ به ازای $n=۱$ تا $n=۳۹$ همیشه عدد اول تولید می‌کند، ولی به ازای $n=۴۰$ دیگر اول نمی‌شود!) پس باید درستی آن گزاره را در حالت کلی ثابت کنیم تا مطمئن بشویم که درست است نه این‌که عدد امتحان کنیم. خلاصه این‌که با مثال آوردن، چیزی ثابت نمی‌شود فقط این حدس برای ما حاصل می‌شود که گزاره **احتمالاً درست است.** اما اثبات! خب زوج چیست؟ عددی که بر ۲ بخش‌پذیر است، پس عدد زوج را $۲k$ می‌گیریم. عدد فرد هم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس عدد فرد را $۲k'+۱$ می‌گیریم. چرا $۲k+۱$ نگرفتم؟ چون خارج قسمت دو عدد در حالت کلی فرق دارند، پس اگر یکی را k گرفتم دیگری را k'. حالا:

$$۲k+۲k'+۱=۲(\underbrace{k+k'}_{q})+۱=۲q+۱$$

جمع دو عدد به صورت $۲q+۱$ درآمد، یعنی فرد است. حالا دیگر مطمئن هستیم که جمع عدد فرد با عدد زوج، همواره فرد می‌شود. این روش اثبات را «اثبات مستقیم» می‌گویند، یعنی به طور مستقیم از فرض شروع می‌کنیم و به حکم می‌رسیم. شبیه همین به سادگی ثابت می‌شود جمع دو عدد فرد، زوج است. جمع دو عدد زوج نیز زوج است. ضرب هر چندتا عدد فرد، فرد می‌شود. ضرب چندتا عدد صحیح هم وقتی زوج می‌شود که حداقل یکی زوج باشد.

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است.**

پاسخ خب عدد طبیعی اول را n می‌گیریم. بعدی می‌شود $n+۱$. بعدی $n+۲$ و... پس داریم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)+(n+۳)+(n+۴)=۵n+۱۰=۵(\underbrace{n+۲}_{q})=۵q$$

جمع این ۵تا عدد به صورت $۵q$ درآمد (*۵ ضرب در یه عدد صحیح*) پس مضرب ۵ است.

مثال **نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.**

پاسخ تفاضل مربعات یعنی تفاضل دوتا مربع! عدد فرد اول را $۲k+۱$ می‌گیریم. چون گفته فرد متوالی، عدد فرد بعدی (*دوتا بیشتره*) به صورت $۲k+۳$ می‌شود. حالا داریم:

$$(۲k+۳)^۲-(۲k+۱)^۲=(۴k^۲+۱۲k+۹)-(۴k^۲+۴k+۱)=۸k+۸=۸(\underbrace{k+۱}_{q})=۸q$$

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل درمی‌آید.**

پاسخ ضرب دو عدد طبیعی متوالی به صورت $n(n+1)$ می‌شود. حالا باید ثابت کنیم $4n(n+1)+1$ به صورت توان دوم یک عدد طبیعی است:

$$4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

بله واقعاً مربع کامل است! کتاب درسی همین حکم را این‌جوری گفته «اگر k، حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است»، فرقی نمی‌کند اثباتش دقیقاً به همین صورت است.

پلهٔ چهارم: اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم «برای هر عدد طبیعی n، حاصل n^2-3n+7 عددی فرد است».

خب باید کاری کنیم که n^2-3n+7 به صورت $2q+1$ دربیاید. آیا همین‌جوری می‌توانیم با فاکتورگیری یا ... این کار را انجام بدهیم؟ به نظر نمی‌آید که بتوانیم چنین کاری انجام بدهیم. من می‌گویم بالأخره این n از دو حال، خارج نیست *(به اسم روش دقت کن!)* یا فرد است یا زوج. این دو حالت را جداگانه برویم جلو تا در هر کدام به $2q+1$ برسیم:

۱ n زوج $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n^2-3n+7=(2k)^2-3(2k)+7=4k^2-6k+6+1=2\underbrace{(2k^2-3k+3)}_{q}+1=2q+1$

۲ n فرد $\Rightarrow n=2k+1 \Rightarrow n^2-3n+7=(2k+1)^2-3(2k+1)+7=4k^2+4k+1-6k+4=4k^2-2k+4+1$

$$=2\underbrace{(2k^2-k+2)}_{q}+1=2q+1$$

حکم ثابت شد. به این روش می‌گویند روش اشباع. یعنی بیاییم مسئله را به چند حالت که همهٔ حالت‌ها را پوشش می‌دهد تقسیم کنیم و در هر کدام، ثابت کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

بچه‌ها بیایید کمی منطقی هم صحبت کنیم. زوج‌بودن n را با p و فردبودن را با q و فردبودن n^2-3n+7 را با r نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم اگر p یا q برقرار باشد به r می‌رسیم یعنی: $p\vee q \Rightarrow r$. به جای آن، ثابت کردیم هم از p به r می‌رسیم و هم از q به r؛ یعنی: $(p \Rightarrow r)\wedge(q \Rightarrow r)$. تعجب نکنید با استفاده از جدول ارزش به راحتی می‌توانید ثابت کنید $p\vee q \Rightarrow r\equiv(p \Rightarrow r)\wedge(q \Rightarrow r)$.

این هم شد توجیه منطقی روش اشباع! در حالت کلی برای این‌که حکم q را ثابت کنید، می‌توانید فرض را به n گزارهٔ $p_1, p_2, \dots, p_n$ تقسیم کرده و ثابت کنید:

$$p_1\vee p_2\vee\dots\vee p_n \Rightarrow q$$

از طرفی:

$$(p_1\vee p_2\vee\dots\vee p_n) \Rightarrow q\equiv(p_1 \Rightarrow q)\wedge(p_2 \Rightarrow q)\wedge\dots\wedge(p_n \Rightarrow q)$$

یعنی به جای آن، ثابت کنید از هر p_i (در هر حالت) می‌توانیم حکم q را نتیجه بگیریم.

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است. بعد نتیجه بگیرید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.**

پاسخ باید ثابت کنیم $n(n+1)$ همیشه زوج است. دو حالت می‌گیریم:

۱ n زوج $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n(n+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{q}=2q$

۲ n فرد $\Rightarrow n=2k+1 \Rightarrow n(n+1)=(2k+1)\overbrace{(2k+2)}^{2(k+1)}=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q}=2q$

در هر دو حالت شد $2q$، پس n چه زوج باشد چه فرد، $n(n+1)$ زوج می‌شود.

خب حالا عدد فرد را $2k+1$ می‌گیریم:

گفته ثابت کنید مربع این عدد به صورت $8q+1$ درمی‌آید: $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}+1=4(2q)+1=8q+1$

بچه‌ها این نتیجه را حفظ باشید. بعداً خیلی به دردتان می‌خورد. البته در درس بعدی آن را یک‌جور دیگر هم ثابت می‌کنیم.

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.**

پاسخ سه عدد طبیعی متوالی را می‌توانیم n، $n+1$ و $n+2$ بگیریم. باید ثابت کنیم $n(n+1)(n+2)=3q$. خب n چه حالت‌هایی می‌تواند داشته باشد؟ اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر ۰، ۱ یا ۲ می‌تواند داشته باشد، پس سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $n=3k$ باشد. در این حالت:
$$n(n+1)(n+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q}=3q$$

۲) $n=3k+1$ باشد. این‌جا هم:
$$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(\underbrace{3k+3}_{3(k+1)})=3\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{q}=3q$$

۳) $n=3k+2$ باشد. این‌جا هم:
$$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(\underbrace{3k+3}_{3(k+1)})(3k+4)=3\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{q}=3q$$

پس ضرب سه عدد متوالی، همیشه مضرب ۳ است. در مثال قبلی ثابت کردیم مضرب ۲ هم است، پس ضرب ۳ عدد متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است. اگر سه عدد طبیعی متوالی را به صورت $n-1, n, n+1$ نمایش می‌دادیم، می‌شد: $(n-1)(n)(n+1)=n^3-n$ همیشه بر ۶ بخش‌پذیر است. این هم تو کتاب درسی است. اگر گفتند این را اثبات کنید دقیقاً مثل همین کارهایی است که انجام دادیم. بد نیست بدانید حاصل‌ضرب n عدد طبیعی متوالی، همیشه بر $n!$ بخش‌پذیر است. *(البته اثباتش با اطلاعات فعلی شما دشواره!)*

مثال **ثابت کنید اگر a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه $a^2=3q+1$. سپس نتیجه بگیرید به ازای هر دو عدد صحیح x, y عبارت $xy(x^2-y^2)$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.**

پاسخ با روش اشباع برویم. در مثال قبلی گفتیم a سه حالت می‌تواند داشته باشد، ولی چون گفته a مضرب ۳ نیست، پس فقط دو حالت می‌ماند:

۱) $a=3k+1$ باشد:
$$a^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\underbrace{(3k^2+2k)}_{q}+1=3q+1$$

۲) $a=3k+2$ باشد:
$$a^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+\overset{3+1}{4}=3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{q}+1=3q+1$$

پس اگر a مضرب ۳ نباشد، a^2 به صورت $3q+1$ است. حالا اگر از x, y حداقل یکی بر ۳، بخش‌پذیر باشد که $xy(x^2-y^2)$ بر ۳ می‌خورد، اما اگر هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، طبق چیزی که الان ثابت کردیم مربع هر دو به صورت $3q+1$ هستند؛ پس:
$$xy(x^2-y^2)=xy(3q+1-(3q'+1))=xy(3(q-q'))=3t$$

این چندتا مثال بود تا روش اشباع را خوب یاد بگیرید. در درس بعدی باز هم اثبات‌هایی مثل این، زیاد داریم.

پلهٔ پنجم: اثبات غیرمستقیم (برهان خُلف)

در برخی از مواقع اثبات مستقیم پیچیده است. قبل از این‌که این روش را توضیح بدهم یکی دوتا نمونهٔ روزمره بیاورم.

«پدری سعی می‌کند که برای پسرش اثبات کند که زمین مسطح نیست. (حکم)

پسر: آیا بعضی از هواپیماها حین پرواز دور زمین سقوط می‌کنند؟

پدر: مگر فرض کرده‌ای که زمین مسطح است؟

پسر: مگر نیست؟

پدر: نه در زمان‌های خیلی پیش، مردم معتقد بودند که زمین مسطح است. اما مردی به نام کریستف کلمب این فرض را باطل کرد. او بدون این‌که از زمین سقوط کند با کشتی از اسپانیا به آمریکا رفت و برگشت.

پسر: اما این تنها نشان می‌دهد که زمین از آنچه مردم تصور می‌کردند، وسیع‌تر است.

پدر: خوب مچم را گرفتی! بعد از کلمب، سفر دریایی تحت نظر ماژلان شروع شد. او از اسپانیا شروع کرد. دور زمین زد و به اسپانیا بازگشت. اگر زمین مسطح بود چنین کاری غیرممکن بود.

پسر: با این حساب فکر کنم که زمین مسطح نیست.»

ببینید پدر برای این‌که ثابت کند زمین مسطح نیست خلاف حکم را در نظر می‌گیرد. یعنی به پسر می‌گوید فرض کن مسطح باشد آن وقت سفر دریایی ماژلان غیرممکن خواهد بود، یعنی وقتی خلاف حکم به تناقض می‌رسد، چاره‌ای نیست جز این‌که خود حکم درست باشد. برهان خلف همین است. خلاف حکم *(دقت کردی خلاف حکم)* را در نظر می‌گیریم. **یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.** حالا با قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست به **یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجهٔ متضاد با فرض** می‌رسیم. پس فرضِ نادرست‌بودن حکم باطل بوده و درستی خود حکم ثابت می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال **ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.**

پاسخ فرض کنید a عددی گویا و x عددی گنگ باشد. گفته ثابت کنید $a+x$ گنگ است (حکم). باید خلاف حکم را در نظر بگیریم. یعنی« $a+x$ گنگ نیست، یعنی گویا است» حالا باید این را به تناقض برسانیم.

$a+x$ گویا است، پس برابر با عدد گویایی مثل b می‌شود. حالا: $a+x=b \Rightarrow x=b-a$

با اثبات مستقیم به راحتی ثابت می‌شود جمع و تفریق و ضرب و تقسیم *(مخرج صفر نباشه)* دو عدد گویا، گویا است *(جمع دوتا کسر گویا، کسر گویا میشه)* پس $b-a$ گویا است. از طرفی x گنگ بود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف) باطل و در نتیجه خود حکم درست است. **معمولاً برای اثبات گنگ‌بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم.**

مثال **نشان دهید اگر $n^۲$ فرد باشد، آن‌گاه n هم فرد است.**

پاسخ اگر بخواهیم به صورت مستقیم اثبات کنیم باید از $n^۲=۲k+۱$ به $n=۲q+۱$ برسیم، ولی خب شما را نمی‌دانم ایده‌ای به ذهن من نمی‌رسد! به صورت غیرمستقیم (با برهان خلف) ثابت کنیم خیلی راحت می‌شود. خلاف حکم می‌شود «n فرد نیست»، یعنی n زوج است؛ پس:

$$n=۲k \Rightarrow n^۲=۴k^۲=۲\underbrace{(۲k^۲)}_{q}=۲q$$

این آخری می‌گوید $n^۲$ زوج است در صورتی که فرض می‌گوید $n^۲$ فرد است، پس به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف) باطل و خود حکم درست است.

مثال **a,b,c,d چهار عدد طبیعی فرد هستند. نشان دهید معادلهٔ $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}=۱$ جواب ندارد.**

پاسخ فرض کنیم معادله، دارای جواب باشد، یعنی اعداد فرد a,b,c,d وجود داشته باشند که در معادله صدق کنند.

با مخرج‌مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}=۱ \Rightarrow bcd+acd+abd+abc=abcd$$

چون a,b,c,d فرد هستند $abcd$ فرد می‌شود. از طرفی عبارت‌های سمت چپ نیز همگی فرد هستند، اما جمع چهار عدد فرد، زوج می‌شود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم چون سمت راست فرد ولی سمت چپ عددی زوج است، بنابراین فرض خلف باطل بوده و معادله در اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

مثال **نشان دهید اگر $a^۲+b^۲$ فرد باشد آن‌گاه a فرد است یا b فرد است.**

پاسخ حکم گفته «a فرد یا b فرد». اگر بخواهیم با برهان خلف برویم خلاف حکم با استفاده از قانون دمورگان می‌شود «a زوج و b زوج»، *(یادتونه دیگه* $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ *)* حالا:

$$a=۲k, b=۲k' \Rightarrow a^۲+b^۲=۴k^۲+۴k'^۲=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k'^۲)}_{q}=۲q$$

این یعنی $a^۲+b^۲$ زوج می‌شود در صورتی که فرض می‌گوید فرد است. تناقض حاصل، می‌گوید فرض خلف باطل و خود حکم درست است.

مثال **$a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهای صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری هستند. ثابت کنید $(a_۱+b_۱)(a_۲+b_۲)(a_۳+b_۳)$ زوج است.**

پاسخ فرض کنیم $(a_۱+b_۱)(a_۲+b_۲)(a_۳+b_۳)$ زوج نباشد، یعنی فرد باشد. خب ضرب ۳ عدد، فرد شده است، پس هر سه تا فرد بوده‌اند، یعنی $a_۱+b_۱$، $a_۲+b_۲$ و $a_۳+b_۳$ همگی فرد بوده‌اند. جمع سه عدد فرد، فرد می‌شود، یعنی $A=a_۱+b_۱+a_۲+b_۲+a_۳+b_۳$ فرد است.

از طرفی $A=a_۱+b_۱+a_۲+b_۲+a_۳+b_۳=(a_۱+a_۲+a_۳)+(b_۱+b_۲+b_۳)$ و $b_۱+b_۲+b_۳=a_۱+a_۲+a_۳$ می‌شود.

پس $A=۲(a_۱+a_۲+a_۳)$ شده، یعنی A زوج است. این تناقض نشان می‌دهد فرض خلف باطل و $(a_۱+b_۱)(a_۲+b_۲)(a_۳+b_۳)$ عددی زوج است.

پلهٔ ششم: گزاره‌های هم‌ارز

سال گذشته یاد گرفتید که گزاره‌ها را به پنج صورت، می‌توانیم ترکیب کنیم. یکی از آن‌ها ترکیب دو شرطی $\Leftrightarrow$ بود. اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب دو شرطی «p اگر و فقط اگر q» را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم. این گزاره فقط وقتی درست است که p و q ارزش یکسانی داشته باشند، یعنی یا هر دو درست باشند یا هر دو نادرست. مثلاً گزارهٔ «$\underbrace{-1 \geq 3}_{ن} \Leftrightarrow \underbrace{2\times 2=5}_{ن}$» درست است. خب حالا ارزش گزاره‌ای مثل «$a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$» را چه‌جوری باید بررسی کنیم؟ (*a=b گزاره‌نماست، پس همین‌جوری نمی‌تونیم بگیم درسته یا غلطه که!*) این‌ها را در هندسه زیاد دیده‌اید. ببینید اگر بخواهیم بگوییم $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ درست است دو کار باید انجام بدهیم. یک بار فرض کنیم $a=b$ درست است و از آن به درستی $a^2=b^2$ برسیم. یک بار فرض کنیم $a^2=b^2$ درست است و از آن به درستی $a=b$ برسیم. اگر این کار را بتوانیم انجام بدهیم ترکیب دوشرطی درست است در غیر این صورت نه! درست نمی‌شود. خب اگر $a=b$ باشد توان‌های دوم آن‌ها هم مساوی‌اند، یعنی $a^2=b^2$. این می‌گوید $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ درست است. اگر $a^2=b^2$ باشد، چه‌طور؟ آیا حتماً $a=b$ است؟ خب نه مثلاً $(-2)^2=2^2$ است، ولی $-2\neq 2$ یعنی این طرفش مثال نقض دارد. پس «$a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$» غلط است.

مثال و پاسخ

مثال **آیا ترکیب $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ درست است؟ a,b چه شرطی داشته باشند تا این ترکیب دوشرطی درست باشد؟**

پاسخ اگر $a<b$ باشد می‌توانیم الزاماً بگوییم $a^2<b^2$؟ خب نه! مثلاً $-3<1$ است، ولی $9 \not< 1$.

پس $a<b \Rightarrow a^2<b^2$ نادرست است. برعکس هم در حالت کلی نادرست است. اما اگر a,b هیچ‌کدام منفی نباشند، این ترکیب دوشرطی درست است. پس اگر یک نامساوی داشتیم و هر دو طرف، مثبت بودند (*دقیق‌تر بگیم منفی نبودن!*) می‌توانیم بدون این‌که جهت عوض شود دو طرف را به توان دو برسانیم. خلاصه این‌که اگر $a,b\geq 0$ باشند: $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ درست است.

پلهٔ هفتم: اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

فرض کنید s,r,q,p چهار گزاره باشند که $p\Leftrightarrow q\Leftrightarrow r\Leftrightarrow s$. اگر من به شما بگویم کل این ترکیب‌های دوشرطی درست و s هم درست است، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ خب می‌فهمیم p,q,r همگی درست هستند!

برخی از اوقات می‌خواهیم حکم p را ثابت کنیم، ولی این‌که چه‌جوری باید از فرضیات به p برسیم برای ما نامشخص است. این‌جا می‌توانیم از خود حکمِ p کمک بگیریم. سعی می‌کنیم گزاره‌هایی مثل ...,r,q پیدا کنیم که ارزش p مثل آن‌ها باشد (*یعنی یه کارهای دوطرفه مثل جمع با عدد ثابت، ضرب در عدد ثابت و ... انجام بدیم*). اگر در پایان به یک رابطهٔ همواره درست برسیم چون ...,r,q,p همگی ارزش یکسان دارند، درستی p ثابت می‌شود. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم اگر a,b دو عدد مثبت باشند، $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ می‌شود. داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ba}\geq 2 \xleftrightarrow[\text{(ba>0 پس جهت عوض نمیشه)}]{\times(ba)} a^2+b^2\geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$ همواره درست

توان دوم هیچ عبارتی منفی نمی‌شود، این یعنی $(a-b)^2\geq 0$ همواره درست است. کارهایی هم که انجام دادیم همگی دوطرفه بودند (*یعنی ترکیب‌های دوشرطی درسته*)، پس همهٔ گزاره‌ها دارای ارزش یکسان هستند، این یعنی حکمی که گفته، هم درست بوده پس حکم ثابت می‌شود. **برای اثبات نامساوی‌ها معمولاً از این روش** استفاده می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال **برای هر دو عدد حقیقی a,b ثابت کنید $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$.**

پاسخ از گزاره‌های هم‌ارز کمک می‌گیریم و سعی می‌کنیم حکم را به یک عبارت همواره درست برسانیم. عبارت‌های همواره درستی که در این‌جا ظاهر می‌شوند معمولاً به صورت جمع چندتا درجه‌دوم است. در اتحاد مربع، $2ab$ ظاهر می‌شود پس ضرب دو طرف در ۲، ایدهٔ خوبی می‌تواند باشد:

$$a^2+b^2+1\geq ab+a+b \xleftrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2\geq 2ab+2a+2b \Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+1+1-2ab-2a-2b\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2\geq 0$$

این آخری همواره درست است، پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم ثابت می‌شود.

مثال و پاسخ

مثال فرض کنید a,b,c سه عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید: $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$

پاسخ آن پرانتزهای سمت چپ را ضرب کرده و ساده می‌کنیم تا ببینیم چه درمی‌آید:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\geq 9$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2)+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2)+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2)\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^2}_{\text{(باز کن ببین همون میشه)}}+(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}})^2+(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}})^2\geq 0$$

آخرین رابطه همواره درست بوده و همهٔ گزاره‌ها هم‌ارز هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

مثال a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}}$.

پاسخ a,b هر دو مثبت هستند، پس $\sqrt{ab}$ تعریف‌شده و مثبت است. حالا:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{b}}_{\sqrt{ab}}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \xleftrightarrow{\times\sqrt{ab}} \sqrt{b}+\sqrt{a}\geq\sqrt{a+b}$$

حالا چون هر دو طرف مثبت هستند، می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم ($a,b>0: a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ یادته؟)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b}+\sqrt{a})^2\geq\sqrt{a+b}^2 \Leftrightarrow b+a+2\sqrt{a}\sqrt{b}\geq a+b \Leftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b}\geq 0$$ همواره برقرار

این آخری همواره درست است. همهٔ گزاره‌ها هم‌ارز هستند پس حکم ثابت می‌شود.

سؤال‌های امتحانی

۱- گزاره‌های زیر را با ارائهٔ مثال نقض مناسب رد کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n، عدد 3^n+4 اول است.

ب) معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

پ) ضرب دو عدد گنگِ غیرمساوی، عددی گنگ است.

ت) ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ می‌شود.

۲- نادرستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $\alpha+\beta$ گنگ باشد، $\alpha-\beta$ هم گنگ است.

ب) اگر α,β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ گنگ است.

پ) اگر a,b دو عدد حقیقی باشند که $ab=0$، آن‌گاه $a=0 \wedge b=0$.

ت) اگر $A\cap B=A\cap C$ باشد، آن‌گاه $B=C$.

ث) برای هر دو عدد حقیقی و مثبت $x,y: \sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

۳- درستی گزاره‌های زیر را به صورت مستقیم ثابت کنید.

الف) جمع دو عدد گویا، گویا است.

ب) اگر n عددی فرد باشد، مجموع n عدد طبیعی متوالی بر n بخش‌پذیر است.

پ) میانگین هفت عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی می‌شود.

ت) اگر a مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $a(a+3)$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است.

ث) اگر مربع عددی فرد را با ۳ برابر عددی زوج جمع کنیم، حاصل فرد می‌شود.

۴- گزاره‌های زیر را ثابت کرده یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) به ازای هیچ دو عدد اول a,b، عدد $a+b$ اول نمی‌شود.

ب) اگر از مکعب عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل عددی زوج می‌شود.

پ) مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

ت) اگر a,b,c سه عدد طبیعی باشند، $a\sqrt{bc}$ گنگ است.

ث) ضرب ۳ عدد زوج متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

ج) اگر a,b دو عدد صحیح و $3ab$ عددی فرد باشد، a^2+b^2 عددی زوج است.

۵- ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی که عدد وسطی فرد است بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۶- گزاره‌های زیر را ثابت کنید. (به روش اشباع)

الف) برای هر عدد طبیعی n، عبارت n^2+5n-7 عددی فرد است.

ب) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد n^2+2 بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

پ) اگر n عددی طبیعی و $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج باشد، $n=4q$ یا $n=4q+3$.

۷- گزارهٔ «اگر $(a-1)b=0$ باشد، آن‌گاه $a=1$ یا $b=0$» را ثابت کنید.

۸- فرض کنیم $A=\{3,4,5\}$ و $S=\{2,3,4,5,6\}$، اگر $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج باشد و $n\in S$، ثابت کنید $n\in A$.

۹- ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۰- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt[3]{\sqrt{2}+2}$ نیز گنگ است.

۱۱- می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.

۱۲- فرض کنید n عددی طبیعی و $3n-2$ عددی فرد باشد. ثابت کنید n نیز فرد است.

۱۳- به صورت غیرمستقیم ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $\frac{n+1}{n+2}\le\frac{n+2}{n+3}$.

۱۴- فرض کنید a,b دو عدد گنگ باشند به طوری که $a-b$ گویا باشد. ثابت کنید $a+b$ گنگ است.

۱۵- فرض کنید a عدد گویای غیرصفر و x عددی گنگ باشد. ثابت کنید ax گنگ است.

۱۶- a,b^2 دو عدد گنگ هستند به طوری که ab عددی گویا است. ثابت کنید $\frac{a}{b}$ گنگ است.

۱۷- نشان دهید اگر ضرب دو عدد طبیعی a,b زوج باشد، آن‌گاه a زوج یا b زوج بوده است.

۱۸- الف) همهٔ جواب‌های معادلهٔ $(a+b)^2=a^2+b^2$ را به دست آورید.

ب) همه جواب‌های طبیعی معادلهٔ $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۹- a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 عددهای صحیح هستند. b_1، b_2، b_3، b_4 و b_5 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند.

(مثلاً ۱,۲,۳,۴,۵ و ۳,۲,۱,۵,۴) ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\dots(a_5-b_5)$ عددی زوج است.

۲۰- کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست و کدام یک نادرست است؟ چرا؟

الف) n^2 زوج است اگر و فقط اگر n زوج باشد.

ب) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$.

پ) $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$.

ت) $x\le 1 \Leftrightarrow x^3\le x^2$.

۲۱- احکام زیر را ثابت کنید.

الف) برای دو عدد حقیقی و نامنفی x,y داریم $x+y\ge 2\sqrt{xy}$.

ب) اگر $a<0$ باشد، آن‌گاه $a+\frac{1}{a}\le -2$.

پ) a,b,c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $3+a^2+b^2+c^2\ge 2(a+b+c)$.

ت) a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

ث) x,y دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $x^2y^2\le(\frac{x^2+y^2}{2})^2$.

۲۲- احکام زیر را ثابت کنید.

الف) a,b,c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$.

ب) برای اعداد حقیقی ناصفر و هم‌علامت a,b ثابت کنید: $\frac{5a-3b}{b}\ge\frac{-4a-5b}{2a}$.

پ) برای هر دو عدد حقیقی a,b ثابت کنید: $a^2-ab+b^2\ge 0$.

۲۳- a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

۲۴- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x,y داریم: $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\ge 4$.

۲۵- برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$.

۲۶- گزاره‌های درست را ثابت کرده و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^4+1\ge x^3+x$.

ب) اگر x گنگ باشد، $3x^2+18x+4$ نیز گنگ است.

پ) ضرب هر چهار عدد طبیعی متوالی از مربع کامل یک واحد کم‌تر است.

۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح

دومین درس گسسته در مورد قضیهٔ تقسیم است. مگر تقسیم هم قضیه دارد؟ آقا دو عدد را می‌نویسیم و تقسیم می‌کنیم دیگر! بله اتفاقاً همین است ولی بد نیست ببینید از همین قضیهٔ ساده ریاضی‌دانان چه چیزهایی که در نیاورده‌اند! (خدا خیرشان بدهد)

پلهٔ اول: رابطهٔ عادکردن (شمردن)

عدد ۶ را در نظر بگیرید. ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است. چرا؟ چون عددی صحیح، مثل ۳ وجود دارد که $6=3\times2$ می‌شود. این را این‌جوری می‌نویسیم $2|6$ و می‌خوانیم «عدد ۲، عدد ۶ را عاد می‌کند یا می‌شمرد یا ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است» یا مثلاً $7|-14$ چون $-14=(-2)\times7$ می‌شود، ولی $2\nmid5$ چون عدد صحیحی وجود ندارد که در ۲ ضرب شده و حاصل برابر ۵ شود. در حالت کلی داریم:

تعریف رابطهٔ عادکردن: b و a دو عدد صحیح هستند؛ می‌گوییم b، عدد a را عاد می‌کند (می‌شمرد) و می‌نویسیم $b|a$ هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد که $bq=a$. به زبان ریاضی:
$$b|a \Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Z}\,;\, bq=a$$

یک چیزی را همین اول کار بگوییم، همهٔ اعدادی مثل a، b و x و ... که در این فصل با آن‌ها سروکار داریم، صحیح هستند؛ پس اگر زمانی یادم رفت که تأکید کنم شما بدانید که صحیح بوده است. خب اجازه بدهید چند رابطهٔ عادکردن بنویسیم:

- $5|25$، $5|75$، $-5|-75$، $-3|36$ و $13|39$ ولی $7\nmid15$.
- $1|17$ چون $17=1\times17$. شبیه همین $-1|17$ چون $17=(-17)\times(-1)$. اصلاً یک چیزی ±1 همهٔ اعداد را عاد می‌کنند. پس $\pm1|a$.
- $3|3$ یا $7|-7$ در حالت کلی هر عددی، خودش و قرینه‌اش را عاد می‌کند یعنی $\pm a|\pm a$.
- $2|0$ چون $0=2\times0$ می‌شود. آیا می‌توانیم بگوییم برای هر عددی صحیح مثل b داریم $b|0$؟ خب بله چون $b\times0=0$ می‌شود؛ پس همهٔ اعداد، صفر را عاد می‌کنند.

نظر شما در مورد $0|0$ چیست؟ (*فب ببینید تعریف چی می‌گه!*) آیا عدد صحیحی وجود دارد که در صفر ضرب شده و حاصل صفر شود؟ بله خیلی زیاد مثل $0=2\times0$ می‌شود پس $0|0$ هم درست است.

- این چی $2^5|2^{12}$؟ (*فب بله این هم درسته.*) چون $q=2^7$ وجود دارد که با ضرب در 2^5 حاصل برابر 2^{12} می‌شود؛ یعنی $2^{12}=\underbrace{2^7}_{q}\times2^5$. نکتهٔ کلی این را بگویید ببینم: اگر n و m دو عدد طبیعی و $m\le n$ باشد آن‌گاه $a^m|a^n$. اثبات آن هم مثل آب خوردن است. $a^m|a^n$ درست است چون عدد صحیح $q=a^{n-m}$ وجود دارد که $a^m\times\underbrace{a^{n-m}}_{q}=a^n$، حواستان هست دیگر چون $m\le n$ است پس $0\le n-m$ و توان در a^{n-m} منفی نمی‌شود. فب فکر می‌کنم کاملاً متوجه شدید که عادکردن چیست و چه می‌گوید. برویم چند تا مثال با هم حل کنیم.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) اگر $n=4$ بگیریم، $3^4+4=85$ می‌شود که اول نیست.

ب) معکوس عدد ۳ برابر $\frac{1}{3}$ می‌شود، اما $3 \not\geq \frac{1}{3}$.

پ) دو عدد گنگ را $\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}$ بگیریم، اما $4=\sqrt{8}\times\sqrt{2}$ می‌شود که عددی گویا است.

ت) عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{2}$ می‌گیریم. $0\times\sqrt{2}=0$ می‌شود که عددی گویا است.

۲- در گزاره‌های شرطی باید مثالی بزنیم که در فرض درست دربیاید ولی در حکم غلط باشد تا ترکیب شرطی نادرست باشد.

الف) $\alpha=\beta=\sqrt{2}$ بگیریم $\alpha+\beta=2\sqrt{2}$ گنگ می‌شود، ولی $\alpha-\beta=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ گنگ نبوده و گویا است.

ب) اول دقت کنید که $\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2\beta}=\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ می‌شود. اگر $\alpha=\sqrt{8}$ و $\beta=\sqrt{2}$ بگیریم داریم:

$$\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ (که گویا شد)

پ) اگر $a=0$ و $b=1$ بگیریم $ab=0$ می‌شود، ولی $a=0 \wedge b=0$ نادرست است. چرا؟

ترکیب عطفی وقتی درست می‌شود که هر دو درست باشند. در این مثالی که زدیم $a=0$ درست است ولی $b=0$ نه! توجه کنید که اگر این‌جوری نوشته بود « $ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ » درست می‌شد، یعنی اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، نتیجه می‌گیریم **حداقل یکی برابر صفر است، یعنی اولی صفر بوده است یا دومی.**

ت) اگر $A=\{1,2\}$، $B=\{1,3\}$ و $C=\{1,4\}$ بگیریم $\underbrace{A\cap B}_{\{1\}}=\underbrace{A\cap C}_{\{1\}}$ می‌شود ولی $B\neq C$.

ث) کافی است $x=9, y=4$ بگیریم $\sqrt{13}=\sqrt{9+4}\neq\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$.

۳- الف) مجموعهٔ اعداد گویا به صورت $Q=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\}$ تعریف می‌شود، یعنی مجموعهٔ اعداد گویا شامل کسرهایی هستند که صورت و مخرج عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد. فرض کنیم $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ گویا باشند. $(d,b\neq 0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

چون a,b,c,d صحیح هستند، صورت و مخرج صحیح هستند و چون b و d هیچ‌کدام صفر نیستند $bd\neq 0$، پس $\frac{ad+bc}{bd}$ حتماً عددی گویا است.

ب) n عدد طبیعی متوالی را $n, n+1, n+2, \ldots, n+(n-1)$ می‌گیریم. حالا: (چرا تا $n-1$ رفت؟ ببین از $n+0$ رفت تا $(n+(n-1)$)

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+n+(n-1)=n\times n+(\underbrace{1+2+\cdots+n-1}_{\text{(مجموع } n-1 \text{ جملهٔ دنبالهٔ حسابی)}})=n^2+\frac{(n-1)(n)}{2}$$

n عددی فرد است، پس $n-1$ زوج بوده یعنی $\frac{n-1}{2}=q$؛ پس:

$$n^2+q(n)=n(\underbrace{n+q}_{q'})=nq'$$

پ) هفت عدد طبیعی را به صورت $n, n+1, n+2, \underline{n+3}, n+4, n+5, n+6$ می‌گیریم. میانگین این‌ها می‌شود:

$$\frac{n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5+n+6}{7}=\frac{7n+21}{7}=n+3$$

یعنی میانگین برابر عدد وسطی می‌شود. در حالت کلی میانگین تعداد فردی عدد، که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، برابر همان عدد وسطی می‌شود.

ت) گفته a مضرب ۳ باشد، پس $a=3k$ می‌گیریم.

$$a(a+3)=3k(3k+3)=3k(3(k+1))=9\underbrace{k(k+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}=9(2q)=18q$$

ث) عدد فرد را $2k+1$ و عدد زوج را $2q$ می‌گیریم. حالا داریم:

$$(2k+1)^2+3(2q)=4k^2+4k+1+6q=2(\underbrace{2k^2+2k+3q}_{q'})+1=2q'+1$$

۴- الف) اگر بخواهیم این را رد کنیم باید دو عدد اول پیدا کنیم که جمع آن‌ها هم اول بشود. خب خیلی ساده $a=2$ و $b=3$ می‌گیریم. (پس دو عدد اول a,b وجود دارد به طوری که $a+b$ هم اول بشود).

ب) عدد فرد به هر توانی برسد، فرد می‌شود حالا اگر یک واحد کم کنیم زوج می‌شود. این را ثابت می‌کنیم:

$$(2k+1)^3-1=8k^3+12k^2+6k+1-1=2(\underbrace{4k^3+6k^2+3k}_{q})=2q$$

پ) اولین عدد طبیعی فرد اول را $2k+1$ می‌گیریم. بعدی دو واحد بیش‌تر است پس عدد فرد بعدی $2k+3$ و بعدی $2k+5$ می‌شود. حالا:

$$2k+1+2k+3+2k+5=6k+9=3(\underbrace{2k+3}_{q})=3q$$

ت) کافی است $a=1$ و $b=c=2$ بگیریم تا $a\sqrt{bc}=2$ بشود. این مثال نقض یعنی چیزی که گفته غلط است.

ث) به نظر می‌رسد که درست باشد (*چندتا عدد امتحان کنین!*) اولین زوج اول را $2k$، بعدی را $2k+2$ و بعدی را $2k+4$ می‌گیریم. حالا:

$$(2k)\overbrace{(2k+2)}^{2(k+1)}\overbrace{(2k+4)}^{2(k+2)}=8\underbrace{k(k+1)(k+2)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳ است.}}=8(3q)=24q$$

ج) گفته $3ab$ عددی فرد باشد، پس a,b باید عددی فرد باشند (*تا ضربشون فرد بشه*)، یعنی $a=2k+1$ و $b=2q+1$. حالا:

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2q+1)^2=4k^2+4k+1+4q^2+4q+1=2(\underbrace{2k^2+2k+2q^2+2q+1}_{t})=2t$$

۵- عدد فرد وسطی را $2k+1$ می‌گیریم. یکی بیش‌تر $2k+2$ و یکی کم‌تر $2k$ می‌شود. حالا داریم:

$$(2k)(2k+1)\overbrace{(2k+2)}^{2(k+1)}=4\underbrace{k(k+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}(2k+1)=4(2q)(2k+1)=8q(2k+1)$$

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. پس ضرب این سه عدد هم مضرب ۳ بوده و هم مضرب ۸، یعنی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۶- الف) دو حالت در نظر می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

۱) $n=2k$، پس:

$$n^2+5n-7=(2k)^2+5(2k)-7=4k^2+10k-7=4k^2+10k-8+1$$
$$=2(\underbrace{2k^2+5k-4}_{q})+1=2q+1 \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

۲) $n=2k+1$، پس:

$$n^2+5n-7=(2k+1)^2+5(2k+1)-7=4k^2+4k+1+10k+5-7$$
$$=4k^2+14k-1=4k^2+14k-2+1=2(\underbrace{2k^2+7k-1}_{q})+1=2q+1 \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

پس در دو حالت، حاصل عددی فرد است، این یعنی به ازای هر عدد طبیعی n، حاصل فرد می‌شود.

ب) دو حالت می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

$$1)\ n=2k \Rightarrow n^2+2=(2k)^2+2=4k^2+2=4q+2$$
$$2)\ n=2k+1 \Rightarrow n^2+2=(2k+1)^2+2=4k^2+4k+3=4(\underbrace{k^2+k}_{q})+3=4q+3$$

پس در هیچ‌کدام از دو حالت، n به صورت $4q$ درنمی‌آید (باقی‌مانده دارد)، پس هیچ گاه n^2+2 بر ۴ بخش‌پذیر نمی‌شود.

پ) دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1)\ \text{زوج}\ n \Rightarrow n=2k \Rightarrow A=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2k(2k+1)}{2}=k(2k+1)\xrightarrow[\text{زوج باشد k باید زوج باشد.}]{\text{2k+1 فرد است، پس برای این‌که A}}$$

$k=2q \Rightarrow n=2k=4q$ (*پس این‌ها محکم نتیجه می‌شه!*)

$$2)\ \text{فرد}\ n \Rightarrow n=2k+1 \Rightarrow A=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}=(2k+1)(k+1)$$

شبیه حالت اول $k+1$ باید زوج باشد پس k فرد است، یعنی $k=2q+1$، بنابراین $n=2k+1=4q+3$ می‌شود. (*یعنی این‌ها هم محکم نتیجه می‌شه*)

۷- دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $b=0$ باشد: در این حالت ترکیب فصلی $a=1$ یا $b=0$ درست است.

۲) $b\neq 0$ باشد: در این حالت عدد $\frac{1}{b}\in\mathbb{R}$ وجود دارد، پس: $(a-1)\,b=0 \xrightarrow{\times\frac{1}{b}} a-1=0 \Rightarrow a=1$

یعنی در این حالت $a=1$ بوده و باز هم ترکیب فصلی $a=1$ یا $b=0$ درست می‌شود. پس در هر دو حالت، ترکیب فصلی درست بوده و کل گزاره درست می‌شود.

۸- به روش اشباع برویم جلو. بالأخره n برابر با یکی از اعداد ۲,۳,...,۶ می‌تواند باشد. یکی‌یکی این‌ها را امتحان می‌کنیم. اگر $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج بشود، n قبول است. البته $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}=(\frac{n(n^2-1)}{6})^2$ ببینید راحت‌تر محاسبه می‌شود.

۱) اگر $n=2$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}=1$.

۲) اگر $n=3$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}=16$ پس $n=3$ قبول است. (چون $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$ زوج شد.)

۳) اگر $n=4$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}=100$ پس $n=4$ قبول است.

۴) اگر $n=5$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}=400$ پس $n=5$ هم قبول است.

۵) اگر $n=6$ باشد، $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}=35^2$ می‌شود که فرد است، پس $n=6$ قبول نیست. $A=\{3,4,5\}$ است پس حتماً $n\in A$ بوده است.

۹- x را عددی گنگ در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم $\frac{1}{x}$ هم گنگ است. (فرض خلف) فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، پس گویا است یعنی برابر با عددی گویا (غیرصفر) مثل $\frac{a}{b}$ می‌شود؛ پس: $\frac{1}{x}=\frac{a}{b} \Rightarrow x=\frac{b}{a} \quad a,b\in\mathbb{Z}, a\neq 0, b\neq 0$

این یعنی x هم گویا است. تناقض حاصل می‌گوید خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۰- (فرض خلف) فرض کنیم حکم برقرار نباشد یعنی $\sqrt[3]{\sqrt{2}+2}$ گنگ نباشد، یعنی گویا باشد، پس:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}+2}=a\ ,\ a\in Q \xrightarrow{\text{توان ۳}} \sqrt{2}+2=a^3 \Rightarrow \sqrt{2}=a^3-2$$

توان سوم هر عدد گویا، گویا بوده از طرفی تفاضل دو عدد گویا هم گویا است، پس a^3-2 گویا و در نتیجه $\sqrt{2}$ گویا می‌شود. *(ولی گفته $\sqrt{2}$ گنگه!)* تناقض حاصل با فرض مسئله می‌گوید خلاف حکم باطل بوده و خود حکم درست است.

۱۱- شبیه قبلی فرض کنیم $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ گنگ نبوده و گویا باشد باید کاری کنیم که به تناقض با فرض برسیم، یعنی نتیجه بشود که $\sqrt{2}$ گویا است.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a\ ,\ a\in Q \Rightarrow \sqrt{3}=a-\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان دوم}} 3=a^2+2-2\sqrt{2}a \Rightarrow 2\sqrt{2}\,a=a^2-1 \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a^2-1}{2a}$$

a^2-1 و $2a$ گویا، (مخرج غیرصفر) هستند، پس $\frac{a^2-1}{2a}$ هم گویا می‌شود. این یعنی $\sqrt{2}$ هم گویا است. به تناقض رسیدیم پس خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۲- خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی n فرد نباشد پس n زوج است.

$$n=2k \Rightarrow 3n-2=3(2k)-2=6k-2=2(3k-1)=2q$$

این یعنی $3n-2$ زوج است در صورتی که گفته فرد است. تناقض حاصل می‌گوید خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۳- خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی $\frac{n+1}{n+2}>\frac{n+2}{n+3}$. حالا دو طرف را در عدد مثبت $(n+3)\,(n+2)$ ضرب می‌کنیم. پس:

$$(n+3)(n+1)>(n+2)(n+2) \Rightarrow n^2+4n+3>n^2+4n+4 \Rightarrow 3>4$$

به تناقض رسیدیم پس خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۴- خلاف حکم را در نظر می‌گیریم؛ یعنی $a+b$ گویا باشد. از طرفی $a-b$ هم گویا است، پس جمع این دو عدد هم گویا می‌شود، یعنی داریم:

$$a+b+(a-b)=2a$$

پس $2a$ گویا است یعنی a هم گویا است. تناقض حاصل نشان می‌دهد که خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۵- فرض کنیم ax گنگ نباشد پس ax گویا است. یعنی:

$$ax=b, b\in Q \Rightarrow x=\frac{b}{a} \xrightarrow[\text{غیرصفر گویا است.}]{\text{تقسیم عدد گویا بر گویای}} x\in Q$$

پس x گویا شد که تناقض است. پس ببینید در حالت کلی ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ ممکن است گویا یا گنگ باشد (مثلاً $0\times\sqrt{2}=0$, $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$).

این ضرب فقط در صورتی گویا می‌شود که عدد گویا برابر صفر باشد و اگر عدد گویا صفر نباشد حاصل قطعاً گنگ است.

۱۶- فرض کنیم $\frac{a}{b}$ گنگ نباشد، پس $\frac{a}{b}$ عددی گویا است؛ فرض کنیم x گویا و $\frac{a}{b}=x$ باشد. پس $a=bx$. حالا ab گویا است یعنی $ab=b^2x$ هم گویا است. طبق فرض b^2 گنگ و x گویا است. چون $x\neq 0$ پس b^2x طبق تمرین قبلی گنگ است. (b^2x هم گویا و هم گنگ شد) تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۷- خلاف حکم یعنی خلاف (a زوج یا b زوج) را در نظر می‌گیریم. طبق قانون دمورگان خلاف حکم می‌شود.

a فرد است و b هم فرد است، پس $a=2k+1$ و $b=2k'+1$ می‌گیریم:

$$ab=(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1=2(\underbrace{2kk'+k+k'}_{q})+1=2q+1$$

یعنی ab فرد است. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۱۸- الف) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ می‌شود. باتوجه به رابطه‌ای که داده شده، نتیجه می‌شود $2ab=0$ پس $a=0$ یا $b=0$ است. یعنی برای برقراری معادله حداقل یکی از a ، b باید صفر باشد.

ب) فرض کنیم a , b دو عدد طبیعی باشند به طوری که رابطهٔ داده شده برقرار باشد:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{b+a}{ab} \Rightarrow ab=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \Rightarrow a^2+ba+b^2=0$$

این را شبیه یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب a ببینید. $\Delta=b^2-4b^2=-3b^2<0$ می‌شود، پس معادله جواب ندارد. تناقض حاصل می‌گوید هیچ a,b طبیعی وجود ندارد که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ بشود.

۱۹- خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_5-b_5)$ عددی فرد باشد. ضرب پنج‌تا عبارت، عددی فرد شده است، پس هر کدام فرد بوده است، یعنی $a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_5-b_5$ همگی فرد هستند. از طرفی داریم:

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_5-b_5)=(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(b_1+b_2+\cdots+b_5)=0$$

مجموع پنج عدد فرد، فرد است و نمی‌تواند زوج باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۲۰- الف) درست است. دو چیز باید ثابت کنیم:

۱) اگر n زوج باشد، n^2 هم زوج است. این را به صورت مستقیم ثابت می‌کنیم:

$$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2)=2q \Rightarrow \text{زوج است.}\ n^2$$

۲) اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n زوج است. این را به صورت غیرمستقیم (با برهان خلف) ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم n زوج نباشد، پس n فرد است:

$$n=2k+1 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2q+1$$

یعنی n^2 فرد است. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

بچه‌ها همین ترکیب دوشرطی برای nهای فرد هم برقرار است. یعنی: n^2 فرد است اگر و فقط اگر n فرد باشد.

ب) واضح است که a و b هر دو با هم صفر نیستند. در این حالت شبیه (۲۲ پ) می‌توانیم ثابت کنیم $a^2+ab+b^2>0$. حالا:

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)<0 \Leftrightarrow a^3-b^3<0 \Leftrightarrow a^3<b^3$$

حواستان باشد اگر n فرد باشد $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n$ درست است، اما اگر n زوج باشد $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n$ وقتی درست است که a و b نامنفی باشند.

پ) اگر $x^۲=۱$ باشد $x=\pm ۱$ نتیجه می‌شود، پس ترکیب دوشرطی غلط است. به زبان دیگر از $x^۲=۱$ الزاماً $x=۱$ نتیجه نمی‌شود مثلاً $(-۱)^۲=۱$ می‌شود ولی $-۱\neq ۱$.

ت) درست است. اگر $۱\le x$ باشد با ضرب دو طرف در $x^۲$ چون نامنفی است جهت تغییری نکرده و $x^۲\le x^۳$ نتیجه می‌شود. برعکس اگر $x^۲\le x^۳$ باشد و $x^۲\neq ۰$ با تقسیم بر $x^۲$ نتیجه می‌شود $۱\le x$. اگر $x^۲=۰$ هم باشد یعنی $x=۰$ باشد خب $۱\le ۰$ بوده و باز هم $۱\le x$ نتیجه می‌شود.

۲۱- در هر قسمت، از حکم شروع کرده و گزاره‌های هم‌ارز را می‌نویسیم تا به یک گزارهٔ همواره درست برسیم. بنابراین طبق استدلال بازگشتی حکم اولیه ثابت می‌شود.

الف) $x+y\ge ۲\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y-۲\sqrt{x}\sqrt{y}\ge ۰\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲\ge ۰$ همواره برقرار

ب) $a+\frac{۱}{a}\le -۲\Leftrightarrow \frac{a^۲+۱}{a}\le -۲\xleftrightarrow[\text{چون } a<۰ \text{ جهت عوض می‌شود}]{\times a} a^۲+۱\ge -۲a\Leftrightarrow a^۲+۲a+۱\ge ۰\Leftrightarrow (a+۱)^۲\ge ۰$ همواره برقرار

پ) $۳+a^۲+b^۲+c^۲\ge ۲(a+b+c)\Leftrightarrow a^۲+b^۲+c^۲-۲a-۲b-۲c+۱+۱+۱\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲\ge ۰$ همواره درست

ت) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\ge \frac{۴}{a+b}\Leftrightarrow \frac{b+a}{ab}\ge \frac{۴}{a+b}\xleftrightarrow[\text{چون } a,b \text{ مثبت هستند، جهت عوض نمی‌شود}]{\text{دو طرف را در } ab(a+b) \text{ ضرب می‌کنیم}}(b+a)^۲\ge ۴ab$

$\Leftrightarrow b^۲+a^۲+۲ba\ge ۴ab\Leftrightarrow b^۲+a^۲-۲ab\ge ۰\Leftrightarrow (b-a)^۲\ge ۰$ همواره برقرار

ث) $x^۲y^۲\le (\frac{x^۲+y^۲}{۲})^۲\Leftrightarrow x^۲y^۲\le \frac{x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲}{۴}\xleftrightarrow{\times ۴}۴x^۲y^۲\le x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲$

$\Leftrightarrow ۰\le x^۴+y^۴-۲x^۲y^۲\Leftrightarrow ۰\le (x^۲-y^۲)^۲$ همواره برقرار

۲۲- الف) دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم به اتحاد مربع ارتباط بدهیم:

$a^۲+b^۲+c^۲\ge ab+ac+bc\xleftrightarrow{\times ۲}۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲\ge ۲ab+۲ac+۲bc$

$\Leftrightarrow a^۲+a^۲+b^۲+b^۲+c^۲+c^۲-۲ab-۲ac-۲bc\ge ۰\Leftrightarrow (a-b)^۲+(a-c)^۲+(b-c)^۲\ge ۰$ همواره برقرار

ب) $\frac{۵a-۳b}{b}\ge \frac{-۴a-۵b}{۲a}\xleftrightarrow[\text{چون } a,b \text{ هم علامت‌اند } ۲ba>۰]{\text{دو طرف را در } ۲ba \text{ ضرب می‌کنیم}}۲a(۵a-۳b)\ge b(-۴a-۵b)$

$\Leftrightarrow ۱۰a^۲-۶ab\ge -۴ab-۵b^۲\Leftrightarrow ۱۰a^۲+۵b^۲-۶ab+۴ab\ge ۰\Leftrightarrow \underline{۹a^۲}+a^۲+۴b^۲+\underline{b^۲}-\underline{۶ab}+۴ab\ge ۰$

$\Leftrightarrow (۳a-b)^۲+(a+۲b)^۲\ge ۰$ همواره برقرار است.

پ) راه اول $a^۲-ab+b^۲\ge ۰\xleftrightarrow{\times ۲}۲a^۲-۲ab+۲b^۲\ge ۰\Leftrightarrow a^۲+a^۲-۲ab+b^۲+b^۲\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a-b)^۲+a^۲+b^۲\ge ۰$ همواره برقرار

راه دوم $a^۲-ab+b^۲\ge ۰\Leftrightarrow (a-\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳b^۲}{۴}\ge ۰$ همواره برقرار

۲۳- $\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\ge \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\Leftrightarrow \frac{a^۳+b^۳}{a^۲b^۲}\ge \frac{b+a}{ab}\xleftrightarrow[\text{در } a^۲b^۲ \text{ ضرب}]{\text{دو طرف را}}a^۳+b^۳\ge (b+a)(ba)$

$\xleftrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}}(a+b)(a^۲-ab+b^۲)\ge (b+a)(ba)\xleftrightarrow{\div (b+a)}a^۲-ab+b^۲\ge ba\Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰$

$\Leftrightarrow (a-b)^۲\ge ۰$ همواره برقرار

۲۴- $(x+y)(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y})\ge ۴\Leftrightarrow ۱+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+۱\ge ۴\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-۲\ge ۰\Leftrightarrow (\sqrt{\frac{x}{y}})^۲+(\sqrt{\frac{y}{x}})^۲-۲\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}\ge ۰$

$\Leftrightarrow (\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}})^۲\ge ۰$ همواره برقرار

۲۵- $\frac{a^۲+۲}{\sqrt{a^۲+۱}}\ge ۲\xleftrightarrow{\times \sqrt{a^۲+۱}}a^۲+۲\ge ۲\sqrt{a^۲+۱}\Leftrightarrow a^۲+۱+۱\ge ۲\sqrt{a^۲+۱}\xleftrightarrow{\sqrt{a^۲+۱}=t}t^۲+۱\ge ۲t$

$\Leftrightarrow t^۲-۲t+۱\ge ۰\Leftrightarrow (t-۱)^۲\ge ۰$ همواره برقرار

۲۶- الف) درست است. به صورت بازگشتی حکم را ثابت می‌کنیم:

$$x^4+1\ge x^3+x \Leftrightarrow x^4-x^3+(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)-(x-1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3-1)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x^2+x+1)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+x+1)\ge 0$$

$(x-1)^2$ و x^2+x+1 همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، پس رابطهٔ آخر بدیهی است.

ب) نادرست است. برای این‌که مثال نقض مناسب پیدا کنیم کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$A=3x^2+18x+4=3(x^2+6x+1)+1=3((x+3)^2-8)+1$$

$$A=3(x+3)^2-23$$

حالا $x=\sqrt{2}-3$ می‌گیریم پس A می‌شود:

$$A=3(\sqrt{2}-3+3)^2-23=-17$$

که عددی گویا است.

پ) چهار عدد طبیعی متوالی را $n, n+1, n+2, n+3$ می‌گیریم. پس:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(\underbrace{n^2+3n}_{t})(\underbrace{n^2+3n}_{t}+2)+1=t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2=(n^2+3n+1)^2$$

پس ثابت کردیم که:

$$\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2-1$$