راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژهٔ علاقمندان آورده شده است که ویژهٔ آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعهٔ آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.
۵. نکتهٔ STP، مخفف نکتهٔ «سیرتاپیاز» است و معمولاً شامل نکات تستی است.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌های فراتر از کتاب درسی با عنوان «ویژهٔ علاقمندان» مشخص شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.
۷. تست‌های واجب با علامت ☆ و تست‌های دشوار با علامت ★ مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

درسنامه آموزشی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اوّل: هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصل دوم: هندسه

فصل سوم: تابع

فصل چهارم: مثلثات

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

پرسش‌های تشریحی

فصل اوّل: هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصل دوم: هندسه

فصل سوم: تابع

فصل چهارم: مثلثات

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

فصل ۱

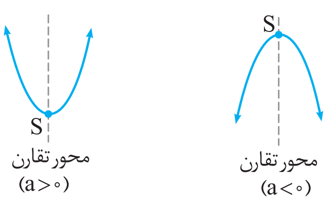
قسمت چهارم

تابع درجه دو

سهمی

سهمی: نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$، یک سهمی قائم و یا به اختصار یک سهمی می‌گوییم. به طور مثال، نمودار معادلهٔ $y = 2x^2 + 3x - 1$ یک سهمی می‌باشد.

سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c \; (a \neq 0)$، همواره به یکی از دو صورت مقابل است:



در شکل‌های روبه‌رو به نقطهٔ S **رأس سهمی** می‌گوییم.

اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای **پایین‌ترین نقطه** یا **مینیمم** و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای **بالاترین نقطه** یا **ماکزیمم** می‌باشد که در هر صورت نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم سهمی همان رأس سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، **خط تقارن** یا **محور تقارن** سهمی نامیده می‌شود.

انواع معادلات سهمی و روش رسم نمودار آن‌ها

معادلهٔ سهمی معمولاً به یکی از دو صورت $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ یا $y = ax^2 + bx + c \; (a \neq 0)$ بیان می‌شود که با توجه به این معادلات می‌توان سهمی را رسم نمود. در ادامه به نحوهٔ رسم هر یک از این معادلات خواهیم پرداخت.

خواص سهمی به معادلهٔ $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ، $(a \neq 0)$

۱) نقطهٔ $S(\alpha, \beta)$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادلهٔ $x = \alpha$ معادلهٔ خط تقارن (محور تقارن) سهمی است.

۳) اگر $a > 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

نکته از خاصیت (۲) فوق، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر دو نقطهٔ دلخواه از سهمی، اگر عرض این دو نقطه با هم برابر باشند، آن‌گاه طول این دو نقطه نسبت به خط $x = \alpha$ قرینهٔ یکدیگرند.

مثال

رأس و محور تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورید و تعیین کنید دهانهٔ هر کدام به کدام طرف باز می‌شود.

آ) $y = 2(x+1)^2 + 3$ ب) $y = -5(x-2)^2 - 7$

پاسخ: آ) نقطهٔ $S(-1, 3)$ رأس سهمی و خط به معادلهٔ $x = -1$ خط تقارن آن است. چون $a = 2 > 0$، پس دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود.

ب) نقطهٔ $S(2, -7)$ رأس سهمی و خط به معادلهٔ $x = 2$ محور تقارن آن است. چون $a = -5 < 0$، پس دهانهٔ آن رو به پایین باز می‌شود.

تست

خط $x = \frac{m-1}{2}$، معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -2(x+1)^2 + m^2 - 1$ است. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر   ۳) ۳   ۴) ۸

پاسخ: محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -2(x - (-1))^2 + m^2 - 1$، خط $x = -1$ است. طبق فرض، خط $x = \frac{m-1}{2}$ محور تقارن سهمی است، بنابراین:

$$\frac{m-1}{2} = -1 \Rightarrow m - 1 = -2 \Rightarrow m = -1$$

عرض رأس سهمی، $m^2 - 1$ است، بنابراین:

$$\text{عرض رأس سهمی} = m^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

رسم سهمی به معادلهٔ $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ ، $(a\neq ۰)$

برای رسم سهمی به معادلهٔ $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ و $(a\neq ۰)$ فرآیند زیر را انجام می‌دهیم:

۱) با توجه به علامت a، مشخص می‌کنیم که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود یا رو به پایین.

۲) مختصات رأس سهمی، یعنی نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ را مشخص می‌کنیم.

۳) دو نقطه با طول‌های دلخواه در طرفین رأس (ترجیحاً دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس) را مشخص می‌کنیم.

می‌دانیم که مزیت انتخاب دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس در این است که عرض این نقاط همواره برابر یکدیگر خواهد بود.

۴) نقاط مشخص‌شده را به‌صورت منحنی به یکدیگر وصل کرده و با توجه به علامت a نمودار را امتداد می‌دهیم.

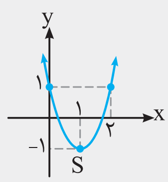
مثال

نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

آ) $y=۲(x-۱)^۲-۱$ ب) $y=-(x+۲)^۲+۳$

پاسخ : آ) چون $a=۲$، پس دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود و در واقع باید سهمی به‌صورت باشد. نقطهٔ به مختصات $S(۱,-۱)$ رأس این سهمی است. طول رأس سهمی $x=۱$ است، لذا بهتر است دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به $x=۱$ بیابیم. نقاط به طول‌های $x=۲$ و $x=۰$ برای این منظور مناسب هستند. از آن‌جایی که $x=۲$ و $x=۰$ نسبت به $x=۱$ متقارن هستند، پس عرض این نقاط یکسان خواهد بود. مختصات این نقاط را در جدول مشخص کرده و با توجه به این نقاط و این‌که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود، سهمی را رسم می‌کنیم:

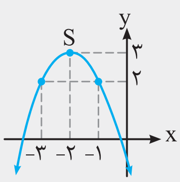
x	۰	۱	۲
y	۱	−۱	۱



ب) چون $a=-۱$، پس سهمی در نهایت به‌صورت خواهد شد.

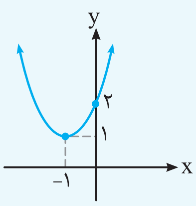
مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(-۲,۳)$ است. نقاط به طول‌های $x=-۳$ و $x=-۱$ را که طول آن‌ها نسبت به طول رأس سهمی یعنی $x=-۲$ متقارن است، در جدول مشخص نموده و سهمی را رسم می‌کنیم:

x	−۳	−۲	−۱
y	۲	۳	۲



تست

معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=(x-۱)^۲+۱$

۲) $y=-(x+۱)^۲+۱$

۳) $y=۲(x-۱)^۲+۱$

۴) $y=(x+۱)^۲+۱$

پاسخ : در حالت کلی معادلهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $y=a(x-\alpha)^۲+\beta$ در نظر گرفت. با توجه بـه شـکل، نقطـهٔ $S(-۱,۱)$ مختصـات رأس سهمی است. پس $\alpha=-۱$ و $\beta=۱$. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x+۱)^۲+۱$ درمی‌آید. از سوی دیگر با توجه به شکل، نمـودار سـهمی از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند. داریم:

$$y=a(x+۱)^۲+۱\xrightarrow{x=۰\ ,\ y=۲}۲=a(۰+۱)^۲+۱\Rightarrow ۲=a+۱\Rightarrow a=۱$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $y=(x+۱)^۲+۱$ تبدیل می‌شود و گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست

اگر $(-۳,۴)$ و $(۵,۴)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟

۱) $x=۲$ ۲) $x=۱$ ۳) $x=-۱$ ۴) $x=-۲$

پاسخ : با توجه به این‌که عرض دو نقطهٔ $(-۳,۴)$ و $(۵,۴)$ برابر هستند، پس معلوم می‌شود این دو نقطه نسبت به محور تقارن که طول آن با طول رأس سهمی برابر است، متقارن هستند. بنابراین برای یافتن طول رأس سهمی و نیز معادلهٔ محور تقارن سهمی، کافی است وسط طول‌های این نقـاط را به‌دست آوریم. وسط طول‌های این نقاط همان میانگین طول‌های آن‌ها است، پس معادلهٔ محور تقارن برابر است با:

$x=\dfrac{۵+(-۳)}{۲}=۱\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته در مسائل پارامتری و همچنین نوشتن معادلهٔ سهمی، در حالتی‌که مختصات رأس سهمی معلوم است، بهتر است از معادلهٔ $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$ استفاده کنیم که در آن $S(\alpha , \beta)$ مختصات رأس سهمی است.

تست

نقطهٔ $(-۱, ۲)$ رأس سهمی گذرنده از نقطهٔ $(۰, -۶)$ است. سهمی محور x را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۲، −۴ ۲) ۵، −۳ ۳) صفر و −۲ ۴) صفر و ۲

پاسخ: رأس سهمی نقطهٔ $S(\underset{\alpha}{-۱}, \underset{\beta}{۲})$ است، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y = a(x+۱)^۲ + ۲$ است. سهمی از نقطهٔ $(۰, -۶)$ می‌گذرد، پس مختصات نقطهٔ $(۰, -۶)$ در معادله صدق می‌کند:

$$-۶ = a(۱+۱)^۲ + ۲ \Rightarrow -۸ = ۴a \Rightarrow a = -۲ \Rightarrow y = -۲(x+۱)^۲ + ۲$$

با حل معادلهٔ $y = ۰$، طول نقاط تلاقی نمودار با محور xها به‌دست می‌آید:

$$y = ۰ \Rightarrow -۲(x+۱)^۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow ۲(x+۱)^۲ = ۲ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۱ \\ \text{یا} \\ x+۱ = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ \text{یا} \\ x = -۲ \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

خواص سهمی به معادله $y = ax^۲ + bx + c$ ، $(a \neq ۰)$

۱) نقطه به مختصات $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادله $x = -\frac{b}{۲a}$، معادلهٔ خط تقارن یا محور تقارن این سهمی است.

۳) اگر $a > ۰$، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال

مختصات رأس و معادلهٔ محور تقارن سهمی $y = ۲x^۲ - ۴x + ۱$ را بیابید.

پاسخ: داریم:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{(-۴)}{۲ \times ۲} = ۱ \quad , \quad y_S = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{(-۴)^۲ - ۴(۲)(۱)}{۴(۲)} = -۱ \Rightarrow \text{مختصات رأس} : S(۱, -۱)$$

همچنین خط به معادله $x = -\frac{b}{۲a} = ۱$، معادلهٔ محور تقارن این سهمی است.

نکته برای رسم نمودار معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ و $(a \neq ۰)$، ابتدا مختصات رأس سهمی یعنی نقطهٔ $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ را می‌یابیم. سپس دو نقطه با طول‌های دلخواه (ترجیحاً دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس) را مشخص کرده و در نهایت با توجه به علامت a، سهمی را رسم می‌کنیم.

تذکر به جای یافتن عرض نقطهٔ رأس سهمی به کمک رابطهٔ $-\frac{\Delta}{۴a}$، می‌توان طول رأس یعنی $x = -\frac{b}{۲a}$ را در معادلهٔ سهمی قرار داد تا عرض آن به‌دست آید.

مثال

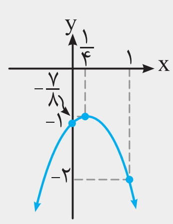
نمودار سهمی $y = -۲x^۲ + x - ۱$ را رسم کنید.

پاسخ: چون $a = -۲ < ۰$، پس دهانهٔ این سهمی رو به پایین باز می‌شود. داریم:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱}{۲ \times (-۲)} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y_S = -۲ \times \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۷}{۸} \Rightarrow \text{رأس سهمی} : S(\frac{۱}{۴}, -\frac{۷}{۸})$$

در این‌جا چون طول رأس سهمی عددی کسری است، برای راحتی کار به جای مشخص کردن دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس که حداقل یکی از آن‌ها کسری خواهد بود، دو نقطه با طول‌های صحیح در دو طرف رأس در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در این حالت عرض این نقاط ممکن است با هم برابر نباشند.

x	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱
y	−۱	$\frac{-۷}{۸}$	−۲



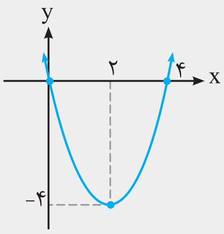
نکته در رسم سهمی، برای مشخص کردن نقطه‌های کمکی، می‌توان از نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات نیز استفاده کرد.

مثال سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ - ۴x$ را رسم کنید.

پاسخ: چون $a = ۱ > ۰$، پس دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود. همچنین:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲(۱)} = ۲ \Rightarrow y_S = (۲)^۲ - ۴(۲) = -۴ \Rightarrow \text{رأس سهمی}: S(۲،-۴)$$

$$\text{نقطه‌های کمکی}: \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\ y = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \, , \, x = ۴ \end{cases}$$



مثال سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۲،-۱)$ نیز بگذرد، معادلهٔ سهمی را بنویسید.

پاسخ: سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ از نقاط $(۰،۳)$، $(۳،۰)$ و $(۲،-۱)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این سه نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

روی سهمی قرار دارد. $(۰،۳) \Rightarrow ۳ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow y = ax^۲ + bx + ۳$

روی سهمی قرار دارد. $(۳،۰) \Rightarrow ۰ = a(۳)^۲ + b(۳) + ۳ \Rightarrow ۹a + ۳b + ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} ۳a + b = -۱ \quad (۱)$

روی سهمی قرار دارد. $(۲،-۱) \Rightarrow -۱ = a(۲)^۲ + b(۲) + ۳ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۴ \xrightarrow{\div ۲} ۲a + b = -۲ \quad (۲)$

$$(۱) \, , \, (۲) \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = -۲ \\ ۳a + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - b = ۲ \\ ۳a + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ \xrightarrow{۲a+b=-۲} ۲ + b = -۲ \Rightarrow b = -۴ \Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y = x^۲ - ۴x + ۳$$

نکته اگر گفته شود سهمی ماکسیممی یا مینیممی برابر A دارد، آن‌گاه عرض نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم برابر A است، یعنی، مقدار $-\frac{\Delta}{۴a}$ برابر A است.

تست به ازای کدام مقدار m، سهمی $y = mx^۲ - (m+۲)x + ۱$، مینیممی برابر ۱- دارد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) چنین mای وجود ندارد.

پاسخ: طبق فرض، مقدار $-\frac{\Delta}{۴a}$ برابر ۱- است. البته توجه کنید که سهمی با فرض $a = m > ۰$ دارای مینیمم است.

$$-\frac{\Delta}{۴a} = -۱ \Rightarrow \Delta = ۴a \Rightarrow (-(m+۲))^۲ - ۴(m)(۱) = ۴m \Rightarrow (m+۲)^۲ - ۴m = ۴m \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ - ۴m = ۴m$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ = ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

چون $m > ۰$ است، پس $m = ۲$ قابل قبول است و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

صفرهای تابع درجه ۲

نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم. بنابراین برای پیدا کردن صفرهای تابع f باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ را حل کنیم. در تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$، می‌توان تعداد صفرهای تابع را به کمک علامت Δ مشخص کرد.

مثال صفرهای تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۴x + ۱$ را مشخص کنید.

پاسخ: ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$، صفرهای تابع f می‌باشند:

$$f(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \quad , \quad a = ۳ \, , \, b = ۴ \, , \, c = ۱$$

روش اول:

$$a + c = b \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \beta = -\frac{c}{a} = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

روش دوم:

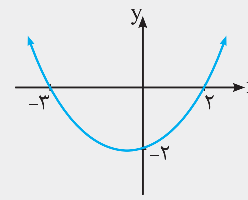
$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۱۲ = ۴ \Rightarrow \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۴ + ۲}{۲a} = \frac{-۲}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۴ - ۲}{۶} = -\frac{۶}{۶} = -۱$$

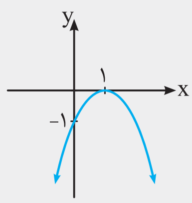
نکته اگر α و β صفرهای تابع درجه ۲ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ است که با داشتن یک فرض دیگر می‌توان مقدار a را نیز به‌دست آورد.

مثال **معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.** (مشابه مثال صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

آ)



ب)



پاسخ: آ) سهمی محور x ها را در نقاطی با طول‌های ۳− و ۲ قطع کرده است، پس ۳− و ۲ صفرهای تابع هستند، بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=a(x+۳)(x-۲)$ می‌باشد. طبق نمودار، $f(۰)=-۲$ است، بنابراین:

$$f(۰)=a(۰+۳)(۰-۲)=-۶a=-۲\Rightarrow a=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۳}(x+۳)(x-۲)$$

ب) نمودار f، محور طول‌ها را فقط در یک نقطه به طول ۱ قطع کرده است، پس $x=۱$ تنها صفر تابع f است و در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=a(x-۱)(x-۱)=a(x-۱)^۲$ می‌باشد. داریم:

$$f(۰)=-۱\Rightarrow f(۰)=a(۰-۱)^۲=a=-۱\Rightarrow f(x)=-(x-۱)^۲$$

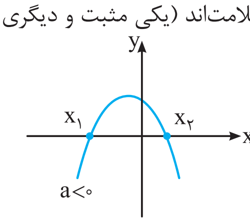
نکته محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور y ها، برابر $f(۰)=c$ می‌باشد.

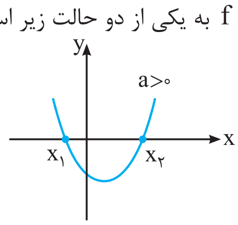
بحث روی علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ و نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$

در این قسمت می‌خواهیم بدون به‌دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم و فقط با استفاده از علامت S و P، علامت ریشه‌های معادله را (در صورت وجود) مشخص کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، یعنی $\Delta>۰$ باشد. برای بحث در علامت ریشه‌ها، ابتدا $P=\frac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) را به‌دست می‌آوریم:

۱) اگر $P<۰$، آن‌گاه دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند (یکی مثبت و دیگری منفی) و نمودار تابع f به یکی از دو حالت زیر است:





توجه کنید در این حالت ($\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}<۰$)، نمودار از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

نکتهٔ مهم اگر $\frac{c}{a}<۰$، آن‌گاه Δ حتماً مثبت است، لذا فقط شرط $\frac{c}{a}<۰$ را بررسی می‌کنیم.

به عنوان مثال، در معادلهٔ درجه دوم $۳x^۲+۱۱x-۱=۰$، عبارت $P=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۳}$ عددی منفی است، پس (Δ حتماً مثبت است) معادله دارای دو ریشه، یکی مثبت و دیگری منفی است.

مثال **به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $(m-۱)x^۲+۴x+(m+۲)=۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟**

پاسخ: اگر P (حاصل‌ضرب دو ریشه) منفی باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت است:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m+۲}{m-۱}<۰\ ,\ m+۲=۰\ ,\ m-۱=۰\Rightarrow m=-۲\ ,\ m=۱$$

m		-۲		۱	
m+۲	−	۰	+		+
m−۱	−		−	۰	+
P	+	۰	−	تعریف نشده	+

با توجه به جدول، اگر $-۲<m<۱$، آن‌گاه P عددی منفی است.

تست

به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x) = x^2 - (m+1)x + m + \frac{25}{4}$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m < -\frac{25}{4}$ ۲) $-4 < m < 6$ ۳) $m > 6$ ۴) $-\frac{25}{4} < m < 6$

پاسخ: شرط آن‌که سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات بگذرد آن است که معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت باشد، یعنی

$$P < 0 \ , \ P = \frac{c}{a} = m + \frac{25}{4} < 0 \Rightarrow m < -\frac{25}{4}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲) اگر $P > 0$ (حاصل‌ضرب دو عدد، عددی مثبت است.)، آن‌گاه دو ریشه متحدالعلامت‌اند (هر دو ریشه مثبت یا هر دو ریشه منفی هستند).

برای تشخیص مثبت بودن هر دو ریشه و یا منفی بودن آن‌ها، S (جمع ریشه‌ها) را تشکیل می‌دهیم:

آ) اگر $S > 0$ (جمع دو عدد)، آن‌گاه هر دو ریشه مثبت‌اند. ب) اگر $S < 0$ (جمع دو عدد)، آن‌گاه هر دو ریشه منفی‌اند.

بنابراین:

نکته ۱ شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی مثبت آن است که $S = -\frac{b}{a} > 0 \ , \ P = \frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$

نکته ۲ شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی منفی آن است که $S = -\frac{b}{a} < 0 \ , \ P = \frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$

مثال

بدون حل معادله، علامت ریشه‌های معادلهٔ $5x^2 + 9x + 1 = 0$ را مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا Δ را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 20 = 61 > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

همچنین $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}$ عددی مثبت است و در نتیجه هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. S را به‌دست می‌آوریم: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{5}$

چون جمع دو عدد (هر دو عدد مثبت یا هر دو عدد منفی) منفی می‌باشد، پس دو عدد باید منفی باشند. لذا معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی می‌باشد.

مثال

حدود m برای آن‌که معادلهٔ $mx^2 + mx - 2 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد را مشخص کنید.

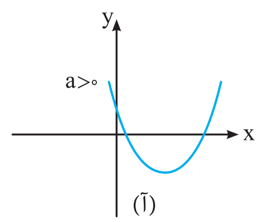
پاسخ: شرط داشتن دو ریشهٔ حقیقی منفی برای معادلهٔ درجهٔ دوم آن است که:

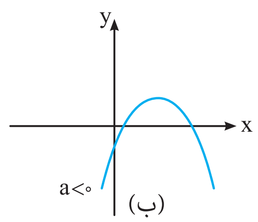
$$\Delta > 0 \quad , \quad P = \frac{c}{a} > 0 \quad , \quad S = -\frac{b}{a} < 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{m} = -1 < 0 \quad \checkmark \quad , \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (*)$$

$$\Delta = m^2 + 8m = m(m+8) > 0 \xrightarrow{(*)} m + 8 < 0 \Rightarrow m < -8 \xrightarrow{(*)} m < -8$$

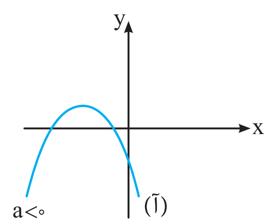
نکته ۱ اگر معادلهٔ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشهٔ مثبت باشد، آن‌گاه نمودار f به یکی از دو صورت زیر است:

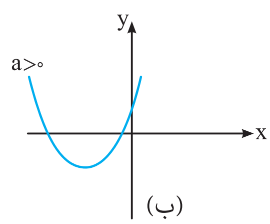




توجه کنید که نمودار (آ)، **فقط** از ناحیهٔ سوم **نمی‌گذرد** و نمودار (ب)، **فقط** از ناحیهٔ دوم **نمی‌گذرد.**

نکته ۲ اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای دو ریشهٔ منفی باشد، آن‌گاه نمودار f به یکی از دو صورت زیر است:





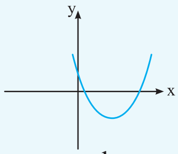
توجه کنید که نمودار (آ)، **فقط** از ناحیهٔ اول **نمی‌گذرد** و نمودار (ب)، **فقط** از ناحیهٔ چهارم **نمی‌گذرد.**

تست

به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=x^2-x+m$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\geq 0$ ۲) $0\leq m<\frac{1}{4}$ ۳) $m<\frac{1}{4}$ ۴) $m>\frac{1}{4}$ یا $m<0$

پاسخ: با توجه به این‌که ضریب x^2 عددی مثبت است (سهمی رو به بالا)، نمودار تابع f باید به‌صورت



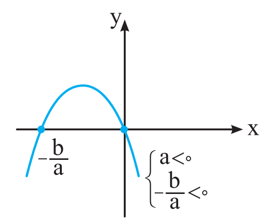
باشد، در واقع معادلهٔ $f(x)=0$ باید دو ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$P=\frac{c}{a}>0\quad,\quad S=-\frac{b}{a}>0\quad,\quad \Delta>0$$

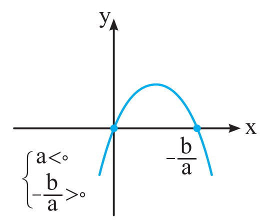
$$P=m>0\quad,\quad S=-\frac{b}{a}=1>0\quad,\quad \Delta=1-4m>0\Rightarrow m<\frac{1}{4}$$

از طرفی اگر $m=0$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=x^2-x$ درمی‌آید که نمودار آن نیز از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد. پس حدود m باید به‌صورت $0\leq m<\frac{1}{4}$ باشد تا نمودار تابع فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نگذرد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

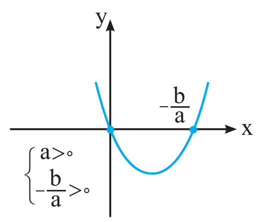
اگر $P=0$، آن‌گاه $c=0$ می‌باشد و در نتیجه ریشه‌ها $\alpha=0$ و $\beta=-\frac{b}{a}$ است و نمودار f به یکی از چهار حالت زیر می‌باشد: (نمودار f حتماً از مبدأ مختصات می‌گذرد.)



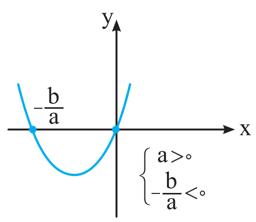
نمودار فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.



نمودار فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



نمودار فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد.



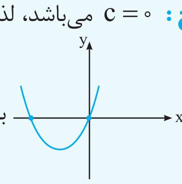
نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

تست

به‌ازای کدام مقادیر m نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^2+(m+1)x$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-1<m<2$ ۲) $-2<m<0$ ۳) $m>0$ ۴) $m<0$

پاسخ: $c=0$ می‌باشد، لذا نمودار f از مبدأ مختصات می‌گذرد. برای آن‌که نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نگذرد، نمودار آن باید به‌صورت



باشد، لذا سهمی باید رو به بالا و ریشهٔ دیگر معادله باید منفی باشد، پس:

$$x=-\frac{b}{a}=-\frac{m+1}{m}<0\quad,\quad a=m>0\Rightarrow m+1>0\Rightarrow m>-1\xrightarrow{m>0}m>0\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

خلاصهٔ مطالب گفته‌شده

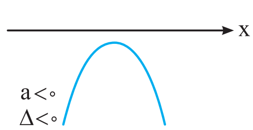
اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $\Delta>0$ باشد، آن‌گاه:

۱) $P<0\Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است.

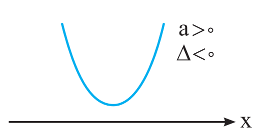
۲) $P>0\Rightarrow$ دو ریشه متحدالعلامت‌اند. $\Rightarrow\begin{cases}S>0\Rightarrow \text{هر دو ریشه مثبت}\\ S<0\Rightarrow \text{هر دو ریشه منفی}\end{cases}$

۳) $P=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-\frac{b}{a}\end{cases}$

اگر $\Delta<0$، در این صورت معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. در واقع تابع $y=ax^2+bx+c$، محور xها را قطع نمی‌کند و نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار همواره پایین محور xها قرار دارد.



نمودار همواره بالای محور xها قرار دارد.

مثال

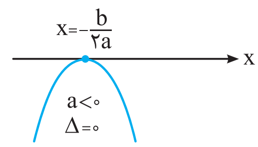
حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^2+2mx+m+1$ همواره بالای محور xها قرار گیرد را مشخص کنید.

پاسخ : در سهمی اگر $m>0$ = ضریب x^2 و $\Delta<0$، آن‌گاه نمودار سهمی همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد:

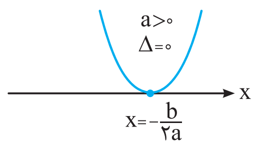
$$\Delta=b^2-4ac=4m^2-4m(m+1)=4m(m-(m+1))=4m(-1)<0\Rightarrow m>0$$

از طرفی اگر $m=0$ = ضریب x^2، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=1$ درمی‌آید که خط $y=1$ بالای محور xها قرار دارد، پس به ازای $m\geq 0$، نمودار تابع f همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد.

اگر $\Delta=0$، در این صورت معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ است. در این حالت نمودار تابع، محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و می‌گوییم نمودار f در $x=-\frac{b}{2a}$ بر محور xها مماس است. نمودار کلی تابع در این حالت به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار تابع زیر محور xها و بر آن مماس است.



نمودار تابع بالای محور xها و بر آن مماس است.

تست

به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $f(x)=x^2+mx+4$، محور xها را فقط در یک نقطه و در سمت چپ محور xها قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴-

پاسخ : برای آن‌که نمودار تابع، محور xها را فقط در یک نقطه قطع کند، باید معادلهٔ $f(x)=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، لذا:

$$x^2+mx+4=0\Rightarrow\Delta=m^2-16=0\Rightarrow m=\pm 4 \qquad (*)$$

اما در سمت چپ محور xها، x عددی منفی است، لذا:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{m}{2}<0\Rightarrow m>0\xrightarrow{(*)}m=4$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، $(a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن، علامت ضرایب a، b و c را با توجه به توضیحات داده‌شده مشخص کنیم.

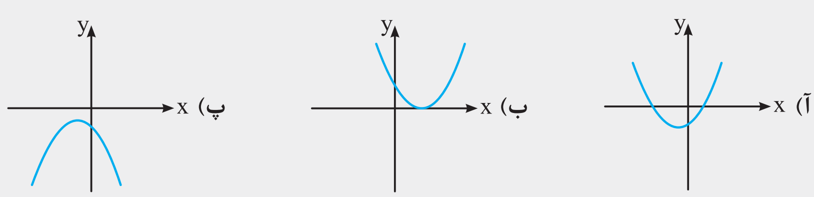
علامت a: اگر سهمی رو به بالا باشد، $a>0$ و اگر رو به پایین باشد، $a<0$ می‌باشد.

علامت b: طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}$ است. با توجه به علامت a و علامت x، علامت b تعیین می‌شود.

علامت c: محل برخورد سهمی با محور yها، $f(0)=c$ است. با توجه به محل برخورد، علامت c تعیین می‌شود.

مثال

در هر یک از قسمت‌های زیر، سهمی $y=ax^2+bx+c$ رسم شده است. علامت a، b و c را مشخص کنید.



پاسخ : آ) سهمی رو به بالاست، پس ضریب x^2 عددی مثبت است: $a>0$

سهمی محور yها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کرده است، پس: $f(0)=c<0$

هم‌چنین طول رأس سهمی منفی است، پس: $x=-\frac{b}{2a}<0\xrightarrow{a>0}-b<0\Rightarrow b>0$

ب) سهمی رو به بالا است، پس: $a>0$

رأس سهمی روی محور xها و در قسمت مثبت آن قرار دارد. پس: $x=\frac{-b}{2a}>0\xrightarrow{a>0}-b>0\Rightarrow b<0$

هم‌چنین سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض مثبت قطع کرده است، پس: $f(0)=c>0$

پ) سهمی قائم رو به پایین است، پس: ضریب $x^2=a<0$

رأس سهمی در ناحیهٔ سوم قرار دارد، پس طول آن عددی منفی است، بنابراین: $x=-\frac{b}{2a}<0\xrightarrow{a<0}-b>0\Rightarrow b<0$

هم‌چنین عرض از مبدأ سهمی منفی است، پس: $f(0)=c<0$

بحث روی تعداد ریشه‌های معادلهٔ دو مجذوری $ax^4+bx^2+c=0$

با قرار دادن $A=x^2$ در معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$، آن را به‌صورت $aA^2+bA+c=0$ می‌نویسیم. توجه کنیم که:

$$1)\ A>0 \quad , \quad x^2=A \Rightarrow x=\pm\sqrt{A}$$

در واقع به ازای هر **ریشهٔ مثبت** معادلهٔ $aA^2+bA+c=0$، **دو ریشهٔ قرینهٔ هم** برای معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ به‌دست می‌آید.

$$2)\ A<0 \quad , \quad x^2=A\ (\text{غیرممکن})$$

بنابراین ریشه‌های منفی معادلهٔ $aA^2+bA+c=0$، ریشه‌ای برای معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ نخواهند داشت.

$$3)\ A=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

به عنوان مثال، در معادلهٔ $x^4+x^2-2=0$ داریم:

$$x^2=A \Rightarrow A^2+A-2=0 \Rightarrow (A-1)(A+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=-2 \end{cases}$$

به ازای $A=1$، معادلهٔ اولیه دارای دو ریشهٔ ±1 است و به ازای $A=-2$، ریشه‌ای برای معادلهٔ اولیه نخواهیم داشت. بنابراین معادلهٔ $x^4+x^2-2=0$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

بنابراین برای بحث در مورد تعداد ریشه‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$، کافی است روی تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $aA^2+bA+c=0$ بحث شود.

تست

به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ $2x^4-mx^2+m-2=0$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟

۱) $1<m<4$
۲) $m<2$
۳) $m>2$ ، $m\neq4$
۴) $m>1$

پاسخ: با انتخاب $x^2=A$، معادله به‌صورت $2A^2-mA+m-2=0$ درمی‌آید. برای آن‌که معادلهٔ دو مجذوری $2x^4-mx^2+m-2=0$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، باید معادلهٔ $2A^2-mA+m-2=0$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد (به ازای هر ریشهٔ مثبت A، دو مقدار برای x به‌دست می‌آید). شرط داشتن دو ریشهٔ مثبت آن است که:

$$P=\frac{c}{a}>0 \quad , \quad S=-\frac{b}{a}>0 \quad , \quad \Delta>0$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2}>0 \Rightarrow m>2\ ,\ S=-\frac{b}{a}=\frac{m}{2}>0 \Rightarrow m>0\ ,\ \Delta=m^2-4(2)(m-2)=m^2-8m+16=(m-4)^2>0 \Rightarrow m\neq4$$

بنابراین اگر $m\neq4$ و $m>2$، آن‌گاه معادلهٔ دو مجذوری دارای چهار ریشهٔ حقیقی و متمایز است. بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

با توجه به مطالب گفته‌شده و در نظر گرفتن دو معادلهٔ زیر، می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (1) \quad \xrightarrow{A=x^2} \quad aA^2+bA+c=0 \quad (2)$$

۱) اگر معادلهٔ (۲) دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد، آن‌گاه معادلهٔ (۱) دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز می‌باشد. بنابراین:

معادلهٔ دو مجذوری دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز است. $\Leftrightarrow \underbrace{\frac{c}{a}>0 \quad , \quad -\frac{b}{a}>0 \quad , \quad \Delta>0}_{\text{شرط داشتن دو ریشهٔ مثبت برای معادلهٔ (۲)}}$

۲) اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۲) صفر و دیگری مثبت باشد، آن‌گاه معادلهٔ (۱) سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

معادلهٔ دو مجذوری سه ریشهٔ حقیقی دارد. $\Leftrightarrow \underbrace{c=0 \quad , \quad -\frac{b}{a}>0}_{\text{شرط آن‌که معادلهٔ (۲)، یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ مثبت داشته باشد.}}$

به عنوان مثال، معادلهٔ $x^4-4x^2=0$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است:

$$x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2=4 \Rightarrow x=\pm2 \end{cases}$$

۳) اگر معادلهٔ (۲) دارای ریشهٔ مضاعف مثبت و یا دارای دو ریشهٔ حقیقی یکی مثبت و دیگری منفی باشد، آن‌گاه معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ قرینهٔ هم هستند.

$$\underbrace{\frac{c}{a}<0}_{\text{معادلهٔ (۲) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.}} \quad \text{یا} \quad \underbrace{-\frac{b}{2a}>0 \quad , \quad \Delta=0}_{\text{شرط آن‌که معادلهٔ (۲) یک ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد.}} \Leftrightarrow \text{معادلهٔ دو مجذوری دو ریشهٔ قرینهٔ هم دارد.}$$

به عنوان مثال، معادلهٔ $x^4-3x^2-4=0$ دارای دو ریشهٔ قرینهٔ هم است:

$$x^4-3x^2-4=0 \xrightarrow{x^2=A} A^2-3A-4=0 \Rightarrow (A-4)(A+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ A=-1 \Rightarrow x^2=-1 \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$$

۴) در دو حالت، معادلهٔ (۱) فقط یک ریشهٔ حقیقی (ریشهٔ مضاعف) دارد:

حالت اول: اگر $b=c=0$، آن‌گاه معادله به‌صورت $ax^4=0$ درمی‌آید که تنها ریشهٔ آن $x=0$ است.

حالت دوم: اگر $c=0$ و $-\frac{b}{a}<0$، آن‌گاه معادله فقط یک ریشهٔ مضاعف $x=0$ دارد. به عنوان مثال، معادلهٔ $x^4+2x^2=0$ فقط یک ریشهٔ مضاعف $x=0$ دارد:

$$x^4+2x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$$

۵) در هر یک از حالت‌های زیر معادلهٔ (۱) ریشهٔ حقیقی ندارد:

آ) $\Delta>0$، $S<0$ و $P>0$ (معادلهٔ (۲) دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است.)

ب) $\Delta<0$ (معادلهٔ (۲) ریشهٔ حقیقی ندارد.)

پ) $-\frac{b}{2a}<0$ و $\Delta=0$ (معادلهٔ (۲) ریشهٔ مضاعف منفی دارد.)

تست

اگر معادلهٔ $mx^4+4x^2-(m+2)=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی یکی مثبت و دیگری منفی باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m>0$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<0$ ۳) $m>3$ یا $m<-1$ ۴) $-1<m<3$

پاسخ : با انتخاب $A=x^2$، معادله به‌صورت $mA^2+4A-(m+2)=0$ درمی‌آید.

در دو حالت زیر، معادلهٔ دو مجذوری دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی می‌باشد:

۱) معادلهٔ $mA^2+4A-(m+2)=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی باشد:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow -\frac{m+2}{m}<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m>0 \text{ یا } m<-2$$

۲) معادلهٔ $mA^2+4A-(m+2)=0$ دارای ریشهٔ مضاعف مثبت باشد:

$$-\frac{b}{2a}>0 \quad , \quad \Delta=0$$

$$-\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow -\frac{4}{2m}>0 \Rightarrow m<0 \quad , \quad \Delta=16+4m(m+2)=0 \Rightarrow 4m^2+8m+16=0 \Rightarrow m^2+2m+4=0$$

معادلهٔ $m^2+2m+4=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. پس حالت دوم اتفاق نمی‌افتد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تشکیل معادلهٔ درجه دوم جدید

☆۱۶۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+4x+1=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ می‌باشد؟

۱) $x^2-14x+1=0$ ۲) $x^2+14x+1=0$ ۳) $x^2-12x+1=0$ ۴) $x^2+12x+1=0$

☆۱۶۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی-۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۱۶۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2+kx-1=0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۶۶. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+ax+b=0$، دو واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادلهٔ $5x^2+4x-1=0$ هستند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۳ ۴) ۴

☆۱۶۷. ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+ax+b=0$، یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7x+1=0$، بیش‌تر است، b کدام است؟ (سراسری تجربی-۸۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۶۸. ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$ از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-4x-1=0$ یک واحد بیش‌تر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور-۸۶)

۱) -5 ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

☆۱۶۹. اگر هر یک از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $4x^2-7x+3=0$ باشد، a کدام است؟ (سراسری تجربی-۸۶)

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6

۱۷۰. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کم‌تر است؟ (سراسری تجربی-۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

☆۱۷۱. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۷۲. اگر هر یک از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+ax+b=0$، سه برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $-x^2+5x+7=0$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{30}{7}$ ۲) $\frac{25}{7}$ ۳) $-\frac{25}{7}$ ۴) $-\frac{30}{7}$

★۱۷۳. ضرایب معادلهٔ درجه دوم $2mx^2-(m-2)x+m-2=0$ همگی گویا و یکی از ریشه‌های معادله $3-\sqrt{3}$ می‌باشد. مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $-\frac{3}{11}$ ۴) $-\frac{2}{11}$

قسمت چهارم: تابع درجه دو

ویژگی‌های سهمی

☆۱۷۴. رأس سهمی $y=x^2-4x+3$ کدام است؟

۱) $(2,-1)$ ۲) $(-2,15)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(-1,6)$

☆۱۷۵. بیش‌ترین مقدار سهمی $y=-3x^2+12x-1$ کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☆۱۷۶. کم‌ترین مقدار سهمی $y=x^2+6x-4$ کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۱) -13 ۲) -9 ۳) -7 ۴) -3

☆**۱۷۷.** اگر مینیمم سهمی با ضابطهٔ $y=(m-1)x^2+x$ برابر ۲- باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۱۷۸. اگر بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۴- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۴

☆**۱۷۹.** نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-x^2+(m+1)x+2m-1$ روی محور Oy دارای ماکزیمم است. عرض نقطهٔ ماکزیمم کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸۰. به ازای کدام مقدار a، نقطهٔ مینیمم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2-2\sqrt{2}x+a$ بر روی خط $y=1$ واقع است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☆**۱۸۱.** اگر نقطهٔ $S(1,1)$ نقطهٔ ماکزیمم سهمی $y=ax^2+bx$ باشد، مقادیر a و b کدام‌اند؟

۱) $a=-2$ و $b=1$ ۲) $a=-1$ و $b=2$ ۳) $a=-1$ و $b=-2$ ۴) $a=-2$ و $b=-1$

۱۸۲. معادلهٔ سهمی که $S(-1,3)$ رأس آن است و از نقطهٔ $(-2,4)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y=-x^2-2x-3$ ۲) $y=-x^2+2x+3$ ۳) $y=x^2-2x+4$ ۴) $y=x^2+2x+4$

☆**۱۸۳.** اگر خط $x=1$ محور تقارن سهمی $y=2x^2+3mx+1$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۸۴. محور تقارن سهمی $y=-2x^2+5x-1$، خط به معادلهٔ $3x-2y=1$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{11}{8}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

☆**۱۸۵.** اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

☆**۱۸۶.** نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ محور x ها را در نقاط $x=-1$ و $x=3$ و محور y ها را در نقطهٔ $y=-1$ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ مینیمم تابع کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

☆**۱۸۷.** فرض کنید نقاط $(-2,5)$، $(0,5)$ و $(1,11)$، بر سهمی $y=ax^2+bx+c$ واقع باشند، این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (سراسری تجربی - ۹۹)

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-1,4)$ ۳) $(2,9)$ ۴) $(2,15)$

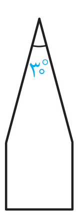
۱۸۸. فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ گذرا بر نقطهٔ $(3,1)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $(5,-7)$ ۲) $(5,-9)$ ۳) $(2,5)$ ۴) $(1,5)$

☆**۱۸۹.** پرتابگری وزنه‌ای را پرتاب می‌کند. ارتفاع وزنه بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=-5t^2+20t+1$ به‌دست می‌آید. بعد از .... ثانیه وزنه به بالاترین ارتفاع ممکن می‌رسد و ارتفاع نقطهٔ اوج وزنه .... می‌باشد. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۲ ، ۲۱ ۲) ۲/۵ ، ۱۹/۷۵ ۳) ۳ ، ۱۶ ۴) ۳/۵ ، ۹/۷۵

☆**۱۹۰.** پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 30° قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)



۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۸۴

صفرهای تابع

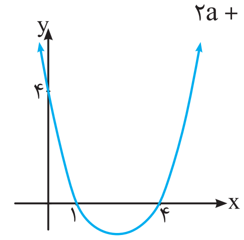
☆**۱۹۱.** کدام تابع زیر، فاقد صفر است؟

۱) $y=x^2+3x+2$ ۲) $y=-x^2+2x+3$ ۳) $y=-x^2+3x-4$ ۴) $y=x^2-4x-2$

۱۹۲. اگر منحنی $y=(x-a)^۲-۱$ محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های $k_۱$ و $k_۲$ قطع کند، مقدار $k_۱+k_۲$ کدام است؟

۱) a ۲) $۲a$ ۳) $۲a-۲$ ۴) $۲a+۲$

☆۱۹۳. معادلهٔ سهمی مقابل کدام است؟ (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)



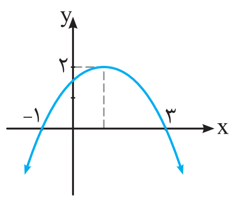
۱) $y=-x^۲-۵x+۴$

۲) $y=-x^۲+۵x+۴$

۳) $y=x^۲-۵x+۴$

۴) $y=x^۲-۳x+۴$

۱۹۴. سهمی مقابل، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)



۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۹۵. به ازای کدام مقدار k، دو سهمی به معادلات $y=-x^۲+x+k$ و $y=x^۲-۳x+۱$ همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

نمودار تابع درجه ۲

☆۱۹۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^۲+(a+۳)x-۱$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $a<-۹$ ۲) $a<-۳$

۳) $a>-۱$ ۴) $-۳<a<۰$

۱۹۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m-۲)x^۲-۲(m+۱)x+۱۲$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $m>۲$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

☆۱۹۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+۲)x^۲+۳x+۱-m$، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $m>۱$ یا $m<-۲$ ۲) $-۲<m<۱$

۳) فقط $m<-۲$ ۴) فقط $m>۱$

☆۱۹۹. اگر منحنی به معادلهٔ $y=۲x^۲-۴x+m-۳$، محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $m>۳$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $۴<m<۹$

۲۰۰. منحنی به معادلهٔ $y=(x-۱)(x^۲-ax+a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعهٔ مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $-۴<a<۰$ ۲) $۰<a<۲$ ۳) $۰<a<۴$ ۴) $a>۴$

۲۰۱. نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+۴x+a-۳$ از طرف بالا بر محور x ها مماس شده است، طول نقطهٔ تماس کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۲۰۲. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -۳ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

☆۲۰۳. اگر تابع درجه دوم $f(x)=(m+۲)x^۲+۴x+(m-۱)$ محور x ها را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، مقادیر m کدام است؟

۱) $-۱<m<۴$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) $-۲<m<۳$ ۴) $-۳<m<۲$ ، $m\neq -۲$

۲۰۴. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(۱-m)x^۲+x+(m-۲)$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟ (سراسری تجربی)

۱) $m<۱$ ۲) $m>۲$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $-۱<m<۲$

☆۲۰۵. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=(m-۱)x^۲+mx+m-۳$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m>۲$ ۲) $۱<m<۳$ ۳) $m<۱$ ۴) $۰<m<۱$

۲۰۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) $a\le ۲$ ۲) $۰<a\le ۲$ ۳) $۲<a<۳$ ۴) $۰<a<۳$

☆**۲۰۷.** به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y=ax^۲-(a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $a\le -۲$ ۲) $a>-۲$ ۳) $a>۰$ ۴) $-۲\le a<۰$

☆**۲۰۸.** با کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+۲)x^۲-۲x+۱$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $m<-۲$ ۲) $m<-۱$ ۳) $-۲<m<-۱$ ۴) $-۴<m<-۲$

۲۰۹. به ازای کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=mx^۲+(m-۳)x+m$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\in \mathbb{R}$ ۲) $m\in\varnothing$ ۳) $۰<m<۱$ ۴) $۱<m<۲$

۲۱۰. حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^۲+mx-۱$ همواره در زیر محور x ها باشد، کدام است؟

۱) $-۴<m\le ۰$ ۲) $m<۰$ ۳) $m\le ۰$ ۴) $m>-۴$

۲۱۱. با کدام مجموعه مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-mx+m-۲$ همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد؟

۱) $\{m:m>۰\}$ ۲) $\{m:m>۲\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

☆**۲۱۲.** به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$ بالای محور x هاست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

۲۱۳. منحنی به معادلهٔ $y=(۲x+۱)(x+۸)$ با خطوط $y=mx$ نقطهٔ مشترکی ندارد. مجموعهٔ مقادیر m چگونه است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) $۵<m\le ۱۳$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۹<m<۲۵$

☆**۲۱۴.** به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور x هاست؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

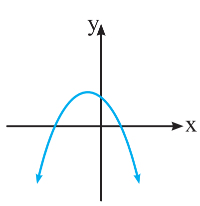
۱) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $m>\frac{۳}{۲}$

۲۱۵. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+۲)x^۲-۲mx+۱$ همواره بالای محور x ها است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $m>-۲$ ۲) $-۲<m<-۱$ ۳) $-۲<m<۲$ ۴) $-۱<m<۲$

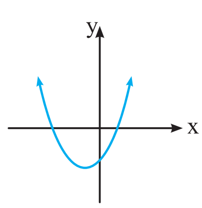
– نمودار تست‌های بعدی، سهمی $y=ax^۲+bx+c$ است. با توجه به نمودار داده‌شده به تست‌ها پاسخ دهید.

☆**۲۱۶.** علامت a و c کدام است؟ (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



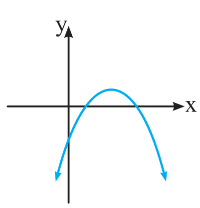
۱) $a,c>۰$
۲) $a,c<۰$
۳) $c<۰$ ، $a>۰$
۴) $c>۰$ ، $a<۰$

☆**۲۱۷.** علامت a و b چگونه است؟ (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



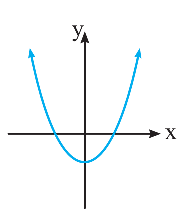
۱) $a,b>۰$
۲) $a,b<۰$
۳) $a>۰$ ، $b<۰$
۴) $b>۰$ ، $a<۰$

۲۱۸. علامت b و c چگونه است؟ (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



۱) $b,c>۰$
۲) $b,c<۰$
۳) $c<۰$ ، $b>۰$
۴) $c>۰$ ، $b<۰$

☆**۲۱۹.** کدام گزینه صحیح است؟



۱) $ac>۰$ ، $b=۰$
۲) $ac<۰$ ، $b=۰$
۳) $ac>۰$ ، $b>۰$
۴) $ac<۰$ ، $b<۰$

علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

☆۲۲۰. معادلهٔ $(2+m)x^2+4x+m+5=0$ دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت دارد. حدود m کدام است؟

۱) $-5<m<-2$ ۲) $m>-2$ یا $m<-5$ ۳) $-2<m<1$ ۴) $m>1$ یا $m<-2$

☆۲۲۱. کدام معادلهٔ زیر دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) $5x^2+3x+2=0$ ۲) $2x^2+x+2=0$ ۳) $3x^2-5x+1=0$ ۴) $3x^2+7x+1=0$

۲۲۲. معادلهٔ $(m-2)x^2+(m+2)x+4=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است. حدود m کدام است؟

۱) $0<m<6$ ۲) $m<2$ ۳) $m\in(2,6)\cup(6,+\infty)$ ۴) $m\in(-2,2)$

☆۲۲۳. به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجه دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

☆۲۲۴. معادلهٔ $2x^2-5x+1=0$،

۱) فاقد ریشهٔ حقیقی است.
۲) دو ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.
۳) دو ریشهٔ حقیقی منفی دارد.
۴) دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت دارد.

۲۲۵. معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

★۲۲۶. حدود m برای آن‌که معادلهٔ $(m+1)x^2+(2-m)x+(m-3)=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت باشد و ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر باشد، کدام است؟

۱) $-1<m<3$ ۲) $-1<m<2$ ۳) $m<-1$ یا $m>2$ ۴) $m<0$

بحث روی تعداد ریشه‌های معادلهٔ دو مجذوری

★۲۲۷. اگر معادلهٔ $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۸۵)

۱) $m<-4$ ۲) $m>4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $4<m<9$

★۲۲۸. اگر معادلهٔ $x^4-4x^2+a=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی باشد، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $a<0$ ۲) $a<3$
۳) $a>1$ ۴) $0<a<3$

★۲۲۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، از معادلهٔ $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $m\geq 1$ ۲) $m<2$ ۳) $1\leq m<2$ ۴) هیچ مقدار m

★۲۳۰. به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx-3\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی- ۸۸)

۱) $-\frac{3}{2}<m<2$ ۲) $0<m<2$ ۳) $\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}<m<2$

قسمت پنجم: معادلات گویا و رادیکالی

حل معادلات گویا

☆۲۳۱. معادلهٔ $2x+\frac{3}{x}=-1$ چه وضعیتی دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد. ۲) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۳) دو ریشهٔ منفی دارد. ۴) ریشهٔ مضاعف دارد.

۲۳۲. تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۲۳۳. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $4=\frac{2x}{x+1}-\frac{3}{x-2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۲۳۴. حاصل عبارت سمت چپ معادلهٔ $x\left(\frac{۳}{x^۲+x}-\frac{۲}{x-۱}\right)=\frac{-۲x+۱}{x-۱}$ به ازای جواب معادله کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۳

☆۲۳۵. به ازای کدام مقدار مثبت a، معادلهٔ $\frac{x+a}{x}-\frac{x}{x+a}=\frac{۴a}{x+a}$ دارای جواب $x=۱$ است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۳۶. اگر $x=۱$ جواب معادلهٔ $\frac{-x-۷}{x^۲-x-۲}=\frac{۲x}{x+۱}-\frac{a}{x-۲}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) فاقد جواب دیگر

★۲۳۷. جواب طبیعی معادلهٔ $-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{x+۱}+\frac{۱}{x-۳}$ در نامعادلهٔ $۱\leq\frac{x+a}{۵}\leq۲$ صدق می‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $۰\leq a\leq۴$ ۲) $۳\leq a\leq۸$ ۳) $۰\leq a\leq۸$ ۴) $-۳\leq a\leq۱$

۲۳۸. مجموعه جواب معادله‌های $\frac{b}{x+۱}+\frac{a}{x}=۴$ و $x^۲-۳x+۲=۰$ یکسان است. a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) -۱۲ ۴) -۸

★۲۳۹. معادلهٔ $\left(\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}\right)^۲+۳\left(\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}\right)+۲=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۴۰. به ازای کدام مقدار صحیح a، معادلهٔ $\frac{a}{x^۲-۱}=\frac{ax}{x+۱}-\frac{۲}{x-۱}$ فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

کاربرد معادلات گویا

☆۲۴۱. در یک مستطیل، نسبت مجموع طول با دو برابر عرض به طول با نسبت طول به عرض آن برابر است. در این مستطیل، طول چند برابر عرض است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

☆۲۴۲. عرض یک مستطیل طلایی $۳+\sqrt{۵}$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $۱۷+۴\sqrt{۵}$ ۲) $۱۸+۵\sqrt{۵}$ ۳) $۱۹+۷\sqrt{۵}$ ۴) $۲۲+۱۰\sqrt{۵}$

۲۴۳. تیم فوتبال A در ۱۱ بازی ابتدایی خود جمعاً ۲۷ امتیاز کسب کرده است. اگر این تیم در تمام بازی‌های بعدی، امتیاز کامل را کسب کرده باشد و میانگین امتیازهای کل او ۲/۸ باشد، این تیم چند بازی انجام داده است؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۱۹ ۴) ۱۳

☆۲۴۴. دو گلولهٔ A و B با سرعت ثابت، فاصلهٔ ۶۰ متری را طی می‌کنند. اگر سرعت گلولهٔ A، ۱۰ متر بر ثانیه بیش‌تر از سرعت گلولهٔ B باشد، آن‌گاه گلولهٔ A، نیم ثانیه زودتر از گلولهٔ B این مسیر را طی می‌کند. سرعت گلولهٔ A چند متر بر ثانیه است؟ (مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۲۴۵. فاصلهٔ بین دو شهر واقع در کنار رودخانه‌ای ۴۸ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۷ ساعت است. در صورتی‌که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیش‌تر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی در جهت حرکت آب کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

☆۲۴۶. برای رنگ‌آمیزی نمای یک ساختمان از دو دستگاه A و B استفاده می‌شود. اگر این دو دستگاه با هم کار کنند، این رنگ‌آمیزی ۴ ساعت طول می‌کشد. اگر سرعت کار دستگاه A، دو برابر سرعت کار دستگاه B باشد، با دستگاه B در چند ساعت می‌توان نمای این ساختمان را رنگ‌آمیزی کرد؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۷/۵ ۴) ۹

☆۲۴۷. سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ (سراسری تجربی- ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

☆**۲۴۸.** پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۸)

۱) ۱۲　۲) ۱۲/۵　۳) ۱۳/۵　۴) ۱۵

☆**۲۴۹.** بهروز یک مجلّه را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) ۳۲　۲) ۳۳　۳) ۳۵　۴) ۳۶

★**۲۵۰.** اگر سه شیر آب A، B و C هم‌زمان باز باشند، یک استخر را در ۱۸ ساعت پر از آب می‌کنند. اگر حجم آبی که از شیر A خارج می‌شود، ۲ برابر حجم آب خارج‌شده از شیر B و حجم آب خارج‌شده از شیر B، سه برابر حجم آب خارج‌شده از شیر C باشد، آن‌گاه این استخر پس از چند ساعت فقط با شیر B پر می‌شود؟

۱) ۳۶　۲) ۴۸　۳) ۵۴　۴) ۶۰

حل معادلات رادیکالی

☆**۲۵۱.** جواب معادلهٔ $x-\sqrt{x}=۲$، کدام است؟ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۴　۴) ۹

☆**۲۵۲.** کدام‌یک از معادلات زیر، دارای ریشهٔ حقیقی است؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $۲+\sqrt{x-۴}=۰$　ب) $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۳}=۰$　پ) $\sqrt{۳x-۶}+\sqrt{x^۲-۲x}=۰$

۱) آ　۲) ب　۳) آ و ب　۴) پ

۲۵۳. معادلهٔ $۲x+\sqrt{۲x-۱}=۱$ دارای: ....

۱) یک جواب مضاعف است.　۲) جواب نیست.　۳) دو جواب متمایز است.　۴) یک جواب است.

☆**۲۵۴.** معادلهٔ $۳x-۲+\sqrt{۴x-۳}=۰$، از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) یک جواب دارد.　۲) دو جواب هم‌علامت　۳) دو جواب با علامت مختلف　۴) جواب ندارد.

☆**۲۵۵.** معادلهٔ $x\sqrt{۱-x^۲}+۳\sqrt{۱-x^۲}=۰$، چند جواب دارد؟

۱) یک　۲) دو　۳) سه　۴) چهار

۲۵۶. معادلهٔ $x\sqrt{x-۲}-x=۰$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) دو ریشه　۲) چهار ریشه　۳) سه ریشه　۴) یک ریشه

☆**۲۵۷.** معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}=\sqrt{۲-x}+\sqrt{۲x-۲}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ریشهٔ حقیقی ندارد.　۲) ۳　۳) ۲　۴) ۱

۲۵۸. معادلهٔ $\sqrt[۴]{x^۳+x-۱۰}+\sqrt{x^۲-۳x+۲}=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۴　۲) ۲　۳) ۱　۴) فاقد جواب است.

۲۵۹. در معادلهٔ $\sqrt{۲+\sqrt{۲x-x^۳}}=\sqrt{۲}$، مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$　۲) $-۲\sqrt{۲}$　۳) -۱　۴) صفر

☆**۲۶۰.** به ازای کدام مقدار a، $x=۳$ جواب معادلهٔ $۲x+\sqrt{۳x+a}=۱۰$ می‌باشد؟

۱) ۸　۲) ۷　۳) ۶　۴) ۵

☆**۲۶۱.** اگر $x=۴$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{۵x-x^۲}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$　۲) ۲　۳) ۳　۴) جواب دیگر ندارد.

☆**۲۶۲.** اگر $۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۸)

۱) ۱/۵　۲) ۲/۵　۳) ۳/۵　۴) ۴/۵

۲۶۳. اگر $\sqrt{3a+16}+2a=1$ باشد، عدد $4a+9$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

☆**۲۶۴.** به ازای کدام مقدار a، $x=-1$ ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{x^2-4x+a}+\sqrt{3x+a}=4$ می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -3 ۴) -2

☆**۲۶۵.** حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^2+4x+5}=x^2+4x+3$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

★**۲۶۶.** مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x+1}=1$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) -3

★**۲۶۷.** حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{\frac{8x+17}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+2}{8x+17}}=\frac{10}{3}$، کدام است؟

۱) $\frac{39}{41}$ ۲) $\frac{35}{41}$ ۳) $\frac{151}{71}$ ۴) $\frac{153}{71}$

کاربرد معادلات رادیکالی

☆**۲۶۸.** طول نقاطی واقع بر محور xها و به فاصلهٔ $3\sqrt{2}$ از نقطهٔ $(-1,3)$ کدام است؟

۱) $5,-1$ ۲) $-5,1$ ۳) $4,-2$ ۴) $2,-4$

☆**۲۶۹.** فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(m,2m+3)$ و $B(2,-3)$ برابر ۵ است. مقادیر m کدام‌اند؟

۱) $-3,-1$ ۲) $4,-1$ ۳) $-3,2$ ۴) $4,-2$

۲۷۰. طول نقطهٔ M واقع بر محور طول‌ها که از دو نقطهٔ $B(-2,3)$ و $C(4,-1)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

☆**۲۷۱.** عرض نقطهٔ M واقع بر محور yها که از دو نقطهٔ $(1,1)$ و $(3,-3)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

☆**۲۷۲.** مثلث متساوی‌الساقین ABC با رأس‌های $A(a,-1)$، $B(3,2)$ و $C(2,4)$ و قاعدهٔ BC مفروض است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) -6 ۴) $-5/5$

★**۲۷۳.** نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

★**۲۷۴.** دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۲۷۵. فاصلهٔ نقطهٔ A به طول مثبت روی خط $y=x+3$ از نقطهٔ $(-1,1)$ برابر ۵ است. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۷۴ — ۱ ۲ ۳ ۴

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$، طول رأس سهمی از رابطهٔ $x_S=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید که با قرار دادن این نقطه در معادلهٔ سهمی، عرض نقطهٔ رأس نیز مشخص می‌شود. پس:

$$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow y_S=2^2-4\times2+3=-1$$

$\Rightarrow$ رأس سهمی: $S(2,-1)$

۱۷۵ — ۱ ۲ ۳ ۴

سهمی $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a<0$ و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$، بیش‌ترین مقدار را دارد:

$$y=-3x^2+12x-1\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2(-3)}=2$$

با قرار دادن عدد ۲ به جای x در ضابطهٔ سهمی، بیش‌ترین مقدار به‌دست می‌آید:

$$x=2\Rightarrow y=-3(2)^2+12(2)-1=-12+24-1=11$$

۱۷۶ — ۱ ۲ ۳ ۴

به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ با شرط $a>0$، سهمی $y=ax^2+bx+c$، دارای کم‌ترین مقدار است:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2(1)}=-3$$

$$\Rightarrow y=(-3)^2+6(-3)-4=9-18-4=-13$$

۱۷۷ — ۱ ۲ ۳ ۴

اگر گفته شود سهمی دارای مینیمم یا ماکزیممی برابر b است، یعنی عرض رأس آن برابر b است.

طول رأس سهمی $=-\frac{1}{2(m-1)}$ ، عرض سهمی $=-2$

$\Rightarrow$ رأس سهمی: $S(\frac{-1}{2(m-1)},-2)$

مختصات رأس سهمی در معادلهٔ سهمی $y=(m-1)x^2+x$ صدق می‌کند:

$$-2=(m-1)\left(\frac{-1}{2(m-1)}\right)^2+\frac{-1}{2(m-1)}$$

$$\Rightarrow -2=\cancel{(m-1)}\times\frac{1}{4(m-1)^{\cancel{2}}}-\frac{1}{2(m-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4(m-1)}-\frac{1}{2(m-1)}=-2\Rightarrow\frac{1-2}{4(m-1)}=-2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4(m-1)}=2\Rightarrow 8(m-1)=1\Rightarrow 8m-8=1$$

$$\Rightarrow 8m=9\Rightarrow m=\frac{9}{8}$$

۱۷۸ — ۱ ۲ ۳ ۴

روش تستی: برای آن‌که تابع درجهٔ دوم بیش‌ترین مقدار را داشته باشد باید ضریب x^2 عددی منفی باشد، لذا: $k+3<0\Rightarrow k<-3$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۱) صحیح است.

روش تشریحی: تابع درجه دوم به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ بیش‌ترین مقدار را اختیار می‌کند:

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2(k+3)}=\frac{2}{k+3}\ ,\ f\left(\frac{2}{k+3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{(k+3)}\times\frac{4}{(k+3)^{\cancel{2}}}-4\times\frac{2}{k+3}+k=0$$

$$\xrightarrow{\times(k+3)}4-8+k(k+3)=0\Rightarrow k^2+3k-4=0$$

$$\Rightarrow (k+4)(k-1)=0\Rightarrow k=-4\ ,\ k=1$$

همچنین $k+3$ باید عددی منفی باشد، لذا $k=-4$ قابل قبول است.

۱۷۹ — ۱ ۲ ۳ ۴

طول هر نقطه روی محور yها برابر صفر است، لذا:

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{m+1}{-2}=0\Rightarrow m=-1$ (طول ماکزیمم)

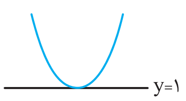
$$\Rightarrow y=-x^2-3\xrightarrow{x=0}y_{max}=-3$$

۱۸۰ — ۱ ۲ ۳ ۴

در سهمی، اگر ضریب x^2 مثبت باشد، آن‌گاه سهمی دارای مینیمم است. پس:

ضریب $x^2=a>0$

نمودار تابع باید به‌صورت



باشد، لذا

معادلهٔ $ax^2-2\sqrt{2}x+a=1$ دارای ریشهٔ مضاعف است، بنابراین:

$$ax^2-2\sqrt{2}x+a-1=0\xrightarrow[\text{ریشهٔ مضاعف}]{\text{شرط داشتن}}\Delta=8-4a(a-1)=0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)}a^2-a-2=0\Rightarrow(a-2)(a+1)=0\xrightarrow{a>0}a=2$$

۱۸۱ — ۱ ۲ ۳ ۴

نقطهٔ $S(1,1)$ در معادلهٔ سهمی $y=ax^2+bx$ صدق می‌کند:

$y=ax^2+bx\xrightarrow{x=y=1}1=a+b$ (۱)

از طرفی طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید. پس:

$-\frac{b}{2a}=1\Rightarrow -b=2a\Rightarrow b=-2a$ (۲)

(۱)،(۲) $\Rightarrow 1=a-2a\Rightarrow 1=-a\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=2$

۱۸۲ — ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم معادلهٔ سهمی با رأس $S(\alpha,\beta)$ به‌صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ می‌باشد. در این سؤال رأس سهمی به‌صورت $S(-1,3)$ است. پس معادلهٔ سهمی عبارت است از:

$$y=a(x+1)^2+3$$

نقطهٔ $(-2,4)$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$y=a(x+1)^2+3\xrightarrow{x=-2,y=4}4=a(-2+1)^2+3\Rightarrow a=1$$

معادلهٔ سهمی: $y=(x+1)^2+3=x^2+2x+1+3$

$$\Rightarrow y=x^2+2x+4$$

۱۸۳ ۱ ۲ **۳** ۴

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c\ (a\neq ۰)$، خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$، معادلهٔ محور تقارن سهمی است. پس طبق فرض داریم:

$$-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow -\frac{۳m}{۴}=۱\Rightarrow -۳m=۴\Rightarrow m=-\frac{۴}{۳}$$

۱۸۴ ۱ **۲** ۳ ۴

خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۵}{۴}$ معادلهٔ محور تقارن سهمی است:

$$\begin{cases}۳x-۲y=۱\\ x=\frac{۵}{۴}\end{cases}\Rightarrow \frac{۱۵}{۴}-۲y=۱\Rightarrow y=\frac{۱۱}{۸}$$

۱۸۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

در سهمی $y=ax^۲+bx+c$، خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن است، لذا:

$$x=۲=-\frac{۱}{۲(a-۱)}\Rightarrow ۴(a-۱)=-۱\Rightarrow a-۱=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳\ ,\ y=۰\xrightarrow{\times(-۴)}x^۲-۴x-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰\xrightarrow{x>۰}x=۶$$

۱۸۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

مختصات نقاط $(-۱,۰)$، $(۳,۰)$ و $(۰,-۱)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$(۰,-۱)\Rightarrow -۱=c\Rightarrow y=ax^۲+bx-۱$ روی منحنی قرار دارد.

$(-۱,۰)\Rightarrow ۰=a-b-۱\Rightarrow a-b=۱$ روی منحنی قرار دارد.

$(۳,۰)\Rightarrow ۰=۹a+۳b-۱\Rightarrow ۹a+۳b=۱$ روی منحنی قرار دارد.

$$\begin{cases}۳a-۳b=۳\\ ۹a+۳b=۱\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱}{۳},b=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۲}{۳}x-۱$$

رأس سهمی، مینیمم نمودار تابع است، لذا:

$x=-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}-۱=-\frac{۴}{۳}$ (طول رأس سهمی)

۱۸۷ **۱** ۲ ۳ ۴

مختصات سه نقطهٔ داده‌شده در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند.

$(۰,۵)\Rightarrow ۵=a(۰)^۲+b(۰)+c\Rightarrow c=۵$ روی سهمی است.

$\Rightarrow y=ax^۲+bx+۵$

$(-۲,۵)\Rightarrow ۵=a(-۲)^۲+b(-۲)+۵$ روی سهمی قرار دارد.

$\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow ۲a-b=۰\Rightarrow b=۲a\quad (*)$

$(۱,۱۱)\Rightarrow ۱۱=a(۱)^۲+b\times ۱+۵\Rightarrow a+b=۶$ روی سهمی قرار دارد.

$\xrightarrow{(*)}۶=a+۲a\Rightarrow a=۲$

$\xrightarrow{(*)}b=۴\Rightarrow y=۲x^۲+۴x+۵$

با توجه به گزینه‌ها، سهمی از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

۱۸۸ ۱ **۲** ۳ ۴

معادلهٔ سهمی با رأس $A(-۱,۹)$ به‌صورت $y=a(x+۱)^۲+۹$ است. سهمی از نقطهٔ $(۳,۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ $y=a(x+۱)^۲+۹$ صدق می‌کند:

$$۱=a(۳+۱)^۲+۹\Rightarrow -۸=۱۶a\Rightarrow a=-\frac{۸}{۱۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲+۹$$

از نقاط داده‌شده، مختصات نقطهٔ $(۵,-۹)$ در معادله صدق می‌کند. پس سهمی از این نقطه می‌گذرد.

۱۸۹ **۱** ۲ ۳ ۴

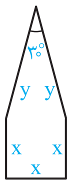
معادلهٔ h، معادلهٔ یک سهمی قائم رو به پایین است. این سهمی به ازای $t=-\frac{b}{۲a}$ بیش‌ترین مقدار را دارد:

$$h(t)=-۵t^۲+۲۰t+۱\Rightarrow t=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲۰}{۲(-۵)}=۲$$

به ازای $t=۲$، بیش‌ترین ارتفاع وزنه به‌دست می‌آید:

$$t=۲\Rightarrow h(۲)=-۵(۲)^۲+۲۰(۲)+۱=-۲۰+۴۰+۱=۲۱$$

۱۹۰ ۱ ۲ **۳** ۴



اگر پنجره کم‌ترین مساحت را داشته باشد، آن‌گاه دارای کم‌ترین نوردهی است. فرض کنیم x طول ضلع مربع و y طول ساق مثلث متساوی‌الساقین باشد، در این صورت:

$$\text{مساحت مربع}=x^۲\ ,\quad \text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}y\times y\times \overset{\frac{۱}{۲}}{\cancel{\sin ۳۰}}=\frac{۱}{۴}y^۲$$

$$\Rightarrow \text{مساحت پنجره}=S=x^۲+\frac{۱}{۴}y^۲\qquad (۱)$$

از طرفی محیط پنجره برابر $۳x+۲y$ می‌باشد. داریم:

$$۳x+۲y=۶\Rightarrow ۲y=۶-۳x\Rightarrow y=۳-\frac{۳}{۲}x\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow S=x^۲+\frac{۱}{۴}(۳-\frac{۳}{۲}x)^۲=x^۲+\frac{۱}{۴}(۹-۹x+\frac{۹}{۴}x^۲)$$

$$=x^۲+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}x+\frac{۹}{۱۶}x^۲=(۱+\frac{۹}{۱۶})x^۲-\frac{۹}{۴}x+\frac{۹}{۴}$$

$$=\frac{۲۵}{۱۶}x^۲-\frac{۹}{۴}x+\frac{۹}{۴}$$

معادلهٔ S، معادلهٔ یک سهمی با ضریب $x^۲$ مثبت است، این سهمی به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کم‌ترین مقدار را دارد، بنابراین:

$$x_{min}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-\frac{۹}{۴}}{۲(\frac{۲۵}{۱۶})}=\frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۲۵}{۸}}=\frac{۸\times ۹}{۲۵\times ۴}=۰/۷۲m$$

۱۹۱ ۱ ۲ **۳** ۴

معادلهٔ محور xها به‌صورت $y=۰$ است. برای آن‌که مشخص کنیم کدام سهمی محور xها را قطع نمی‌کند، باید معادلهٔ $y=۰$ را در هر یک از گزینه‌ها تشکیل دهیم و Δی معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌دست آوریم. اگر $\Delta<۰$ باشد، آن‌گاه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد و در نتیجه نمودار سهمی مربوطه محور xها را قطع نمی‌کند:

۱) $y=x^۲+۳x+۲\ ,\ y=۰\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰$

$\Rightarrow \Delta=(۳)^۲-۴(۱)(۲)=۱>۰$

۲) $y=-x^۲+۲x+۳\ ,\ y=۰\Rightarrow -x^۲+۲x+۳=۰$

$\Rightarrow \Delta=(۲)^۲-۴(-۱)(۳)=۱۶>۰$

۳) $y=-x^۲+۳x-۴\ ,\ y=۰\Rightarrow -x^۲+۳x-۴=۰$

$\Rightarrow \Delta=(۳)^۲-۴(-۱)(-۴)=-۷<۰$

۴) $y=x^۲-۴x-۲\ ,\ y=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۲=۰$

$\Rightarrow \Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(-۲)=۲۴>۰$

قسمت سوم: معادلهٔ درجه دوم

۲۹. معادله‌های درجه دوم زیر را از روش خواسته‌شده حل کنید.

آ) $3x^2+5x-2=0$ (روش کلی)

ب) $x^2-4x=0$ (مربع کامل)

پ) $x^2-4x+3=0$ (تجزیه)

۳۰. هر یک از معادلات زیر را حل کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) $6x^4-x^2-2=0$

ب) $(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5=0$

۳۱. یک معادلهٔ درجه ۳ بنویسید به طوری‌که:

آ) تنها یک ریشه داشته باشد.

ب) دقیقاً دو ریشه داشته باشد.

پ) دقیقاً سه ریشه داشته باشد.

۳۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ باشد، بدون حل معادله، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\alpha+\beta$

ب) $\alpha\beta$

پ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

ت) $\alpha^2+\beta^2$

ث) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

ج) $\alpha^3+\beta^3$

چ) $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}$

ح) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$

۳۳. در معادلهٔ درجه دوم $(m-2)x^2+(2m-1)x-m+5=0$، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{3}{2}$ شود.

ب) حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۲- شود.

۳۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-(2m-1)x+m=0$ باشد، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{5}{3}$

ب) $\alpha^2+\beta^2=\frac{13}{4}$

۳۵. در معادلهٔ $x^2-(m-1)x+18=0$، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) یکی از ریشه‌ها، دو برابر ریشهٔ دیگری باشد.

ب) یکی از ریشه‌ها، سه واحد بزرگ‌تر از ریشهٔ دیگر باشد.

۳۶. در معادلهٔ $2x^2-(2m+1)x+m=0$، مقدار m را طوری به‌دست آورید که:

آ) یکی از ریشه‌ها، قرینهٔ ریشهٔ دیگر باشد.

ب) یکی از ریشه‌ها، عکس ریشهٔ دیگر باشد.

پ) یکی از ریشه‌ها، یک واحد بیش‌تر از دو برابر ریشهٔ دیگر باشد.

۳۷. معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن: (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

آ) ۴- و ۷ باشند.

ب) $4+\sqrt{5}$ و $4-\sqrt{5}$ باشند.

۳۸. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن ها $\frac{13}{4}$ و حاصل‌ضربشان ۳- باشد. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

۳۹. طول و عرض مستطیلی را مشخص کنید که مساحت آن ۱۵ و محیط آن ۱۷ باشد. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

قسمت چهارم: تابع درجه دو

۴۰. تعیین کنید کدام‌یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام‌یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را تعیین کنید.

(مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۱۵ و تمرین ۳ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

آ) $f(x)=x^2-6x-7$

ب) $g(x)=-2x^2+8x+1$

پ) $h(x)=-\frac{1}{2}x^2-12x$

ت) $m(x)=5x^2-10x$

۴۱. **شخصی که در لبهٔ فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است، توپی را با سرعت اولیهٔ ۲۰ متر برثانیه به سوی بالا پرتاب می‌کند. بعد از t ثانیه، ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است با $h = -5t^2 + 20t + 80$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:**

آ) توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟ (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد؟

پ) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب، توپ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد؟

ت) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

۴۲. **پنجره‌ای به شکل مستطیل داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۸ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.** (مشابه مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۴۳. **صفرهای هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.**

آ) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$　　ب) $g(x) = -x^2 + 11x - 18$

۴۴. **بدون حل و تعیین ریشه‌ها، علامت ریشه‌های هر یک از معادله‌های زیر را مشخص کنید.** (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

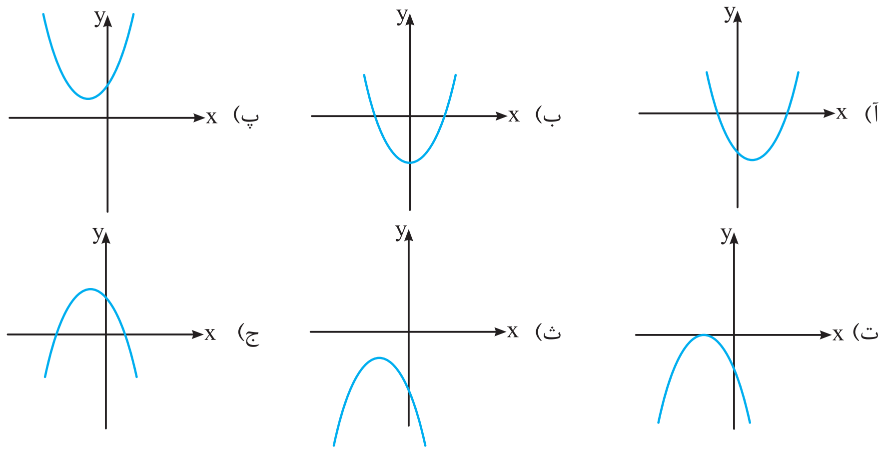
آ) $2x^2 - 5x - 1 = 0$　　ب) $-3x^2 + 11x + 4 = 0$　　پ) $3x^2 - 12x + 5 = 0$　　ت) $x^2 + 17x + 2 = 0$

۴۵. **در معادلهٔ $(m-1)x^2 + 4x - 2m + 6 = 0$، حدود m را چنان مشخص کنید که معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد.**

۴۶. **حدود m را طوری مشخص کنید که معادلهٔ $x^2 + (2m-1)x + 9 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد.**

۴۷. **در هر یک از قسمت‌های زیر، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنید.**

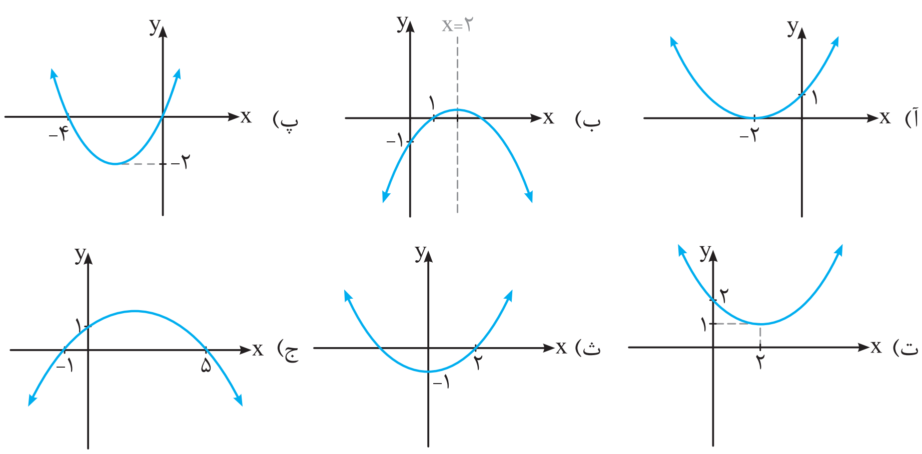
(مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



۴۸. **سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را با شرایط زیر رسم کنید:**

آ) $a > 0$، $b < 0$ و $c > 0$　　ب) $a < 0$، $b > 0$ و $c > 0$

۴۹. **معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید:** (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)



قسمت پنجم: معادلات گویا و رادیکالی

۵۰. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۴}=\frac{۱}{۵}$

ب) $\frac{۴}{x}+\frac{۲x-۱}{x+۱}=\frac{۶}{x}$

پ) $\frac{x}{x-۱}+\frac{۳}{x^۲-۱}=\frac{x-۲}{x+۱}$ (نهایی- شهریور ۹۰)

ت) $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$

ث) $\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{x-۱}{x+۱}=۳x\left(۱-\frac{x-۱}{x+۱}\right)$

ج) $\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{۱+x}{x}-\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$ (نهایی- خرداد ۹۶)

۵۱. به ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{۳x}{x+۲}=\frac{۸}{k}+\frac{۱}{x-۲}$ دارای جواب $x=۱$ است؟ (نهایی- شهریور ۹۲)

۵۲. به ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{۳t^۲+k}{(t^۲+۱)^۲-۶۸}=\frac{۴-t}{۲-۲t}$ دارای جواب $t=-۳$ است؟ (نهایی- دی ۹۵)

۵۳. اگر $x=۲$ یک جواب معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{۲x^۲}{a+x}$ باشد؛

آ) a را تعیین کنید.

ب) به ازای $a=۲$ ریشهٔ دیگر این معادله را در صورت وجود به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۹۵)

۵۴. مجموعه جواب معادلهٔ $۳=\frac{b}{x+۲}+\frac{ax}{x+۴}$ به‌صورت $\{-۱،۲\}$ است. مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۵۵. معادلهٔ گویایی بنویسید که $x=\frac{۲}{۳}$ جواب آن باشد.

۵۶. دو اتومبیل A و B همزمان فاصلهٔ بین دو شهر را که ۱۰۰ کیلومتر می‌باشد، با سرعت ثابت طی می‌کند. اگر سرعت اتومبیل B، ۱۰ کیلومتر بر ساعت کم‌تر از سرعت اتومبیل A باشد، ۲۰ دقیقه دیرتر این مسیر را طی می‌کند. سرعت هر یک از دو اتومبیل را به‌دست آورید.

۵۷. اگر دو ماشین کشت چمن مصنوعی با هم کار کنند، می‌توانند در ۶ ساعت چمن یک زمین فوتبال را بکارند. اگر سرعت کار یکی از آن‌ها سه برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۵۸. یک خط متروی بین شهری، ۴۰ کیلومتر طول دارد. اگر سرعت مترو ۱۲ کیلومتر در ساعت بیش‌تر می‌بود، زمان رفت و برگشت بین دو شهر ۴۵ دقیقه کوتاه‌تر می‌شد. در حال حاضر سرعت حرکت قطار چند کیلومتر در ساعت است؟

۵۹. هر یک از معادلات زیر را حل کنید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحه ۲۳ و تمرین ۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

آ) $\sqrt{x+۴}-۳=۰$

ب) $\sqrt{x^۲+۷}+۵=۳x$

پ) $۳\sqrt{x}=\sqrt{x+۱۸}$

ت) $\sqrt{۲x+۱۵}-\sqrt{x+۴}=۲$

ث) $\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}=۲+\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}$

ج) $x^۲-۳x=\sqrt{x^۲-۳x+۱۲}$

۶۰. بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی هستند؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

آ) $\sqrt{x}+۵=۰$

ب) $\sqrt{x-۲}+۲\sqrt{۱-x}=۰$

پ) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x+۱}+۴=۰$

ت) $\sqrt{x-۴}-\sqrt{۳-x}=۴$

۶۱. معادله‌ای شامل تفاضل دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۲ یکی از ریشه‌های آن باشد.

۶۲. با تشکیل یک معادله، عدد صحیحی پیدا کنید که مجموع آن با جذرش برابر ۱۲ باشد.

۶۳. زمانی که یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر سقوط آزاد می‌کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد، به طوری‌که $t=\sqrt{۱۶-\frac{h}{۵}}$. پس از سه ثانیه، این جسم در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۴ کتاب درسی)

۶۴. نقطه‌ای روی محور y ها و به فاصلهٔ ۶ از نقطهٔ $(۳،۲\sqrt{۵})$ پیدا کنید.

۶۵. نقطه‌ای روی خط $y=۲x-۴$ و به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ $(-۱،۵)$ مشخص کنید.

پاسخ فصل ۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

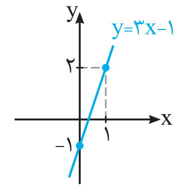
۱

آ) با مشخص کردن دو نقطهٔ دلخواه روی خط، خط را رسم می‌کنیم:

$y=۳x-۱$

x	۰	۱
y	-۱	۲

نمودار ⟵

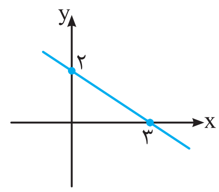


ب)

$۲x+۳y=۶$

x	۰	۳
y	۲	۰

نمودار ⟵

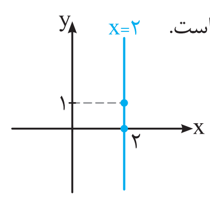


پ) $x=۲$، خطی به موازات محور yها است که طول هر نقطه روی آن برابر ۲ است.

$x=۲$

x	۲	۲
y	۰	۱

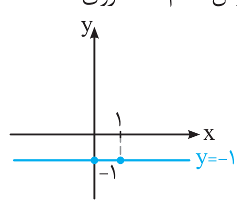
نمودار ⟵



ت) عرض تمام نقاط روی خط $y=-۱$ برابر -۱ است:

x	۰	۱
y	-۱	-۱

نمودار ⟵



۲

آ) معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h به‌صورت $y=mx+h$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ خط با شیب $m=۳$ و عرض از مبدأ $h=۴$ برابر $y=۳x+۴$ است.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ با شیب m به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

$$m=-۲\ ,\ (\underset{x_۱}{۳},\underset{y_۱}{۴})\Rightarrow y-۴=-۲(x-۳)$$

$$\Rightarrow y-۴=-۲x+۶\Rightarrow y=-۲x+۱۰$$

پ) شیب خط گذرنده از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

$$A(-۱,۲),B(۱,۵)\Rightarrow m=\frac{۵-۲}{۱+۱}=\frac{۳}{۲}$$

$$m=\frac{۳}{۲},A(-۱,۲)\Rightarrow y-۲=\frac{۳}{۲}(x+۱)\xrightarrow{\times ۲}۲y-۴=۳(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲y-۴=۳x+۳\Rightarrow ۲y-۳x=۷$$

ت) شیب دو خط موازی با هم برابر است. شیب خط $۲x+۳y=۱$ برابر $-\frac{۲}{۳}=-\frac{\text{ضریب x}}{\text{ضریب y}}=m$ است، پس شیب خط مطلوب نیز برابر $-\frac{۲}{۳}$ می‌باشد:

$$m=-\frac{۲}{۳}\ ,\ A(۴,۵)\Rightarrow y-۵=-\frac{۲}{۳}(x-۴)$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳y-۱۵=-۲x+۸\Rightarrow ۳y+۲x=۸+۱۵=۲۳$$

ث) حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱ است. شیب خط $۳x-۴y=۷$ برابر $\frac{۳}{۴}=-\frac{۳}{-۴}$ می‌باشد، پس شیب خط موردنظر برابر $m=\frac{-۱}{\frac{۳}{۴}}=-\frac{۴}{۳}$ می‌باشد:

$$m=-\frac{۴}{۳}\ ,\ A(-۱,۲)\Rightarrow y-۲=-\frac{۴}{۳}(x+۱)$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳y-۶=-۴x-۴\Rightarrow ۳y+۴x=۲$$

ج) طول از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور xها می‌باشد، پس خط از نقطهٔ $(-۳,۰)$ می‌گذرد. همچنین عرض از مبدأ خط، محل برخورد خط با محور yها می‌باشد. پس خط از نقطهٔ $(۰,۷)$ نیز می‌گذرد:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۰}{۰-(-۳)}=\frac{۷}{۳}$$

$$m=\frac{۷}{۳},(-۳,۰)\Rightarrow y-۰=\frac{۷}{۳}(x+۳)$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳y=۷x+۲۱\Rightarrow ۳y-۷x=۲۱$$

۳

با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}۲x+۳y=-۱\\-x+۴y=-۵\end{cases}$، نقطهٔ تلاقی دو خط به‌دست می‌آید:

$$\begin{matrix} \\ ۲\times\end{matrix}\begin{cases}۲x+۳y=-۱\\-x+۴y=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{۲x}+۳y=-۱\\\cancel{-۲x}+۸y=-۱۰\end{cases}\Rightarrow ۱۱y=-۱۱$$

$$\Rightarrow y=-۱\xrightarrow{۲x+۳y=-۱}۲x+۳(-۱)=-۱\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱$$

پس $A(۱,-۱)$ نقطهٔ تلاقی دو خط است. معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۱,-۱)$ و $B(۳,۷)$ به‌صورت زیر است:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷+۱}{۳-۱}=\frac{۸}{۲}=۴\ ,\ A(۱,-۱)$$

$$\Rightarrow y-(-۱)=۴(x-۱)\Rightarrow y+۱=۴x-۴\Rightarrow y=۴x-۵$$

۴

ابتدا معادلهٔ خطی که از نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(۴,۳)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۳+۱}{۴-۲}=۲\ ,\ A(۲,-۱)\Rightarrow y+۱=۲(x-۲)\Rightarrow y=۲x-۵$$

نقطهٔ $C(a,-۵)$ روی خط $y=۲x-۵$ قرار دارد، پس مختصات نقطهٔ C در این معادله صدق می‌کند:

$$-۵=۲a-۵\Rightarrow ۲a=۰\Rightarrow a=۰$$