

فهرست مطالب

۱۱	فصل دوم: تابع
۱۳۷	درس اول: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی
۱۴۵	درس دوم: توابع پلکانی و قدر مطلق
۱۶۲	درس سوم: اعمال بر روی توابع

۱۱	فصل سوم: آمار
۱۶۷	درس اول: شاخص‌های آماری
۱۷۴	درس دوم: سری‌های زمانی

۱۲	فصل اول: آمار و احتمال
۱۸۲	درس اول: شمارش
۱۹۷	درس دوم: احتمال
۲۱۶	درس سوم: چرخه آمار در حل مسائل

۱۲	فصل دوم: الگوهای خطی
۲۲۱	درس اول: مدل‌سازی و دنباله
۲۳۲	درس دوم: دنباله‌های حسابی

۱۲	فصل سوم: الگوهای غیرخطی
۲۴۵	درس اول: دنباله هندسی
۲۶۰	درس دوم: ریشه‌های توان و توان گویا
۲۶۹	درس سوم: تابع نمایی

۲۷۵	پاسخ‌های تشریحی
------------	------------------------

۱۰	فصل اول: معادله درجه دوم
۶	درس اول: معادله و مسائل توصیفی
۱۱	درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها
۲۹	درس سوم: معادله‌های شامل عبارتهای گویا

۱۰	فصل دوم: تابع
۳۷	درس اول: مفهوم تابع
۴۱	درس دوم: ضابطه جبری تابع
۴۷	درس سوم: نمودار تابع خطی
۵۲	درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

۱۰	فصل سوم: کار با داده‌های آماری
۶۷	درس اول: گردآوری داده‌ها
۷۳	درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۸۴	درس سوم: معیارهای پراکندگی

۱۰	فصل چهارم: نمایش داده‌ها
۹۶	درس اول: نمودارهای یک متغیره
۱۰۸	درس دوم: نمودارهای چندمتغیره

۱۱	فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی
۱۱۶	درس اول: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها
۱۲۹	درس دوم: استدلال ریاضی



رياضی و آمار

پایه دهم



پایه دهم

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

ابتدا ببینیم معادله چیست. جواب یا ریشه معادله به پی میگویند و انواع معادلاتی که قراره تو این فصل ببینیم اینها هستند.

معادله



به هر تساوی که در آن مجهول (متغیر) وجود دارد و به ازای بعضی مقادیر برای آن مجهول، تساوی برقرار است، معادله می‌گویند. مثلاً هر یک از تساوی‌های $3x = 6$ ، $2x^2 + 4x = 0$ و $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{2} = 2x$ ، یک معادله هستند.

جواب یا ریشه معادله

به عدد یا عددی که به جای مجهول قرار می‌گیرند و معادله را به یک تساوی عددی درست تبدیل می‌کنند، جواب یا ریشه معادله می‌گوییم. مثلاً در معادله $3x = 6$ ، اگر $x = 4$ باشد، آن‌گاه تساوی به صورت $3(4) = 6$ در می‌آید که نادرست است زیرا $12 \neq 6$ می‌باشد پس $x = 4$ جواب معادله نیست، اما اگر به جای مجهول x عدد ۲ را قرار دهیم، به یک تساوی درست می‌رسیم، پس $x = 2$ جواب معادله یا ریشه معادله است.

حل معادله

منظور از حل یک معادله به دست آوردن جواب یا جواب‌های معادله است. در این فصل با سه نوع از معادلات به نام‌های معادله درجه اول، معادله درجه دوم و معادله گویا آشنا می‌شویم.

معادله درجه اول



هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است را معادله درجه اول می‌نامند. مثلاً معادله $3x - 4 = 0$ یک معادله درجه اول است. (در معادله درجه اول توان متغیر x برابر یک است) اما معادلات $2x^2 + 5x = 3$ (توان x برابر ۲ است)، $x + \frac{2}{x} = 3$ (در مخرج کسر اومده) و $2|x| - 4 = 0$ (داخل قدر مطلق قرار گرفته) درجه اول نیستند.

حل معادله درجه اول

معادله درجه اول $ax + b = 0$ در صورتی که a مخالف صفر باشد (اگر $a = 0$ بشه، x از معادله حذف می‌شه) همواره یک جواب دارد. برای حل آن، جمله دارای مجهول یعنی ax را در همان سمتی که هست نگه داشته و عدد b را به طرف دیگر تساوی می‌بریم (هواست هست که وقتی b رو می‌بری اون سمت تساوی باید علامتش رو قرینه کنی؟) حال با تقسیم طرفین معادله بر ضریب x یعنی عدد a ، مقدار x که همان جواب یا ریشه معادله است، به دست می‌آید.

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

مثلاً جواب معادله $3x + 5 = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

+۵ رفخت اونور شد -۵

توجه: مطمئناً انتظار ندارید که در کنکور، معادله درجه اول را به صورت $ax + b = 0$ بدهند و از شما جواب معادله را بخواهند (فدایی خیلی آسون میشه)، معمولاً با معادله‌ای سروکار دارید که چند تا جمع و تفریق و ضرب نیاز دارد تا در نهایت به فرم $ax + b = 0$ در آید و یا ممکن است معادله شامل کسرهایی باشد که باید با ضرب طرفین معادله در یک عدد مناسب (عدد مناسب عددی که همه کسرها رو از بین می‌بره. همون کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌هاست.) کسرها را از بین ببریم.

؟ جواب معادله $2(1-x) - 3(x+1) = 14$ کدام است؟

گزینه ۲ ابتدا کاری می‌کنیم که در معادله فقط یک بار x دیده شود: (اینجوری بشه $ax + b = 0$)

$$2(1-x) - 3(x+1) = 14 \Rightarrow 2 - 2x - 3x - 3 = 14 \Rightarrow -5x - 1 = 14 \Rightarrow -5x = 14 + 1 \Rightarrow -5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{-5} = -3$$

نکته! جواب هر معادله، در خود معادله صدق می‌کند، یعنی با قرار دادن جواب معادله در معادله، به یک تساوی عددی درست می‌رسیم.

حالا با این جمله می‌شود دو کار مهم کرد:

۱ اگر جواب معادله در گزینه‌های تستی داده شده بود می‌توان گزینه‌ها را در معادله جای‌گذاری کرد، هر کدام صدق کرد همان جواب معادله سؤال است. (این کار بعضی اوقات از راه اصلی طولانی‌تره، اما باید به‌عنوان یه ابزار حل بلر باشیم) مثلاً حل تمرین قبلی را با این روش ببینید:

۱) $x = -4 \Rightarrow 2(1 - (-4)) - 3(-4 + 1) = 14 \Rightarrow 2(5) - 3(-3) = 14 \Rightarrow 10 + 9 = 14 \Rightarrow 19 = 14$ ✗

۲) $x = -3 \Rightarrow 2(1 - (-3)) - 3(-3 + 1) = 14 \Rightarrow 2(4) - 3(-2) = 14 \Rightarrow 8 + 6 = 14 \Rightarrow 14 = 14$ ✓

بنابراین $x = -3$ جواب معادله است و نیازی به بررسی گزینه‌های (۳) و (۴) نیست.

۲ تست‌هایی مثل مثال زیر که مجهول دیگری غیر از x دارند، می‌توانند شما را مجبور به استفاده از مفهوم «جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند» کنند. در این گونه سؤال‌ها یک معادله جدید از دل معادله به‌دست می‌آید که باید آن را حل کنید و مجهول دیگر را به‌دست آورید.

؟ اگر $x = -4$ جواب معادله $mx + \frac{x}{4} = -3m$ باشد، مقدار m کدام است؟

گزینه ۳ جواب معادله، در معادله صدق می‌کند. پس به جای تمام x ها عدد -4 را قرار می‌دهیم:

$$m(-4) + \frac{(-4)}{4} = -3m \Rightarrow -4m - 1 = -3m \Rightarrow -1 = -3m + 4m \Rightarrow -1 = m \Rightarrow m = -1$$

نکته! وقتی گفته می‌شود دو معادله ریشه مشترک دارند، باید ریشه یک معادله را به‌دست آورید و در دیگری جای‌گذاری کنید.

؟ دو معادله $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$ و $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$ جواب مشترک دارند. مقدار m کدام است؟

گزینه ۲ وقتی دو معادله جواب مشترک دارند، یعنی جواب معادله $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$ ، جواب معادله $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$ نیز هست، پس ابتدا جواب معادله $2(x-3) + 3x = 4(x-1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$2x - 6 + 3x = 4x - 4 \Rightarrow 5x - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 5x - 4x = -4 + 6 \Rightarrow x = 2$$

حال $x = 2$ را در معادله $\frac{x+m}{2} + \frac{x+1}{2} = m+1$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار m معلوم شود:

$$\frac{2+m}{2} + \frac{2+1}{2} = m+1 \Rightarrow 2+m+3 = 2m+2 \Rightarrow 5+m = 2m+2 \Rightarrow 5-2 = 2m-m \Rightarrow 3 = m \Rightarrow m = 3$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک آگه یارت نیومر، اول یادآوری زیر رو بفون، بعد برو سراغ تست بعدی.

یادآوری! کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b یا k . م. م دو عدد a و b ، کوچک‌ترین عددی است که بر هر دو عدد a و b بخش پذیر است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای ک. م. م در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسراست. در اینجا ما از ک. م. م برای از بین بردن مخرج کسره‌های معادله استفاده می‌کنیم.

؟ جواب معادله $\frac{1-x}{6} + \frac{x+3}{2} = \frac{2x}{3}$ کدام است؟

گزینه ۳ برای آن‌که از شر مخرج‌ها خلاص شویم، کافی است طرفین معادله را در ۶ ضرب کنیم: (کوچک‌ترین عددی که هم بر ۲، هم بر ۳ و هم بر ۶ بخش پذیره)

$$6 \times \left(\frac{1-x}{6} + \frac{x+3}{2} \right) = 6 \times \frac{2x}{3} \Rightarrow 1-x+3(x+3) = 4x \Rightarrow 1-x+3x+9 = 4x \Rightarrow 2x+10 = 4x \Rightarrow 10 = 4x-2x \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$$

معادلات درجه اول غیرعادی

۱ بعضی اوقات ظاهر معادله، درجه اول نیست اما با ساده کردن معادله، تمام x هایی که توان غیر یک دارند، با هم ساده می‌شوند و معادله به یک معادله درجه اول تبدیل می‌شود و جواب معادله به راحتی معلوم می‌شود (در یک کلاس^۳، از ظاهر معادله نترسین، شاید طبل تو خالی باشه)

؟ جواب معادله $x(x+2) - 2 = x^2 - 3(x-1)$ با جواب کدام معادله برابر است؟

(۱) $-x+2=3$ (۲) $3x+6=0$ (۳) $2x-4=0$ (۴) $-3x+3=0$

✓ گزینه ۴ ابتدا با انجام دادن ضرب‌ها و جمع و تفریق‌ها معادله را مرتب می‌کنیم، شاید معادله ساده‌تر از ظاهرش شود:

$$x(x+2) - 2 = x^2 - 3(x-1) \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = x^2 - 3x + 3 \xrightarrow[\text{ساده می‌شود.}]{\text{از طرفین تساوی}} 2x + 3x = 3 + 2 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین جواب معادله، $x=1$ است. حال باید بررسی کنیم که $x=1$ جواب کدام گزینه است. برای این کار $x=1$ را در تک تک معادله‌ها جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم در کدام صدق می‌کند. واضح است که $x=1$ فقط در معادله $-3x+3=0$ صدق می‌کند.

۲ گاهی بعد از ساده‌سازی معادله، تمام x ها با هم ساده می‌شوند (دیگر هیچ x ای در معادله نیست). حال دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) اگر بعد از ساده شدن x ها به یک تساوی همیشه درست رسیدیم (مثلاً به تساوی $3=3$ ، سپریم)، معادله بی‌شمار جواب دارد.

ب) اگر بعد از ساده شدن x ها به یک تساوی همیشه نادرست رسیدیم (مثلاً به $3=4$ ، سپریم)، معادله جواب ندارد.

؟ معادله $m(x+2) = -2x+5$ جواب ندارد. مقدار m کدام است؟

(۱) -4 (۲) -3 (۳) -2 (۴) -1

✓ گزینه ۳ برای آن‌که معادله درجه اول جواب نداشته باشد، باید x در معادله نباشد، پس:

$$m(x+2) = -2x+5 \Rightarrow mx+2m = -2x+5 \Rightarrow m = -2$$

باید با هم ساده شوند.

ثانیاً به ازای $m = -2$ ، معادله به تساوی نادرست تبدیل شود که در اینجا به ازای $m = -2$ به تساوی نادرست $-4=5$ می‌رسیم پس قطعاً معادله جواب ندارد.

؟ معادله $(m+1)(x-3) = -4x+n+2$ بی‌شمار جواب دارد. مقدار $m+n$ کدام است؟

(۱) -5 (۲) 5 (۳) -10 (۴) 10

✓ گزینه ۲ اولاً باید x در معادله حضور نداشته باشد، پس:

$$(m+1)(x-3) = -4x+n+2 \Rightarrow (m+1)x - 3(m+1) = -4x+n+2 \Rightarrow m+1 = -4 \Rightarrow m = -5$$

باید با هم ساده شوند.

ثانیاً باید بعد از این‌که x حذف شد، یک تساوی همیشه درست داشته باشیم. پس:

$$-3(m+1) = n+2 \xrightarrow{m=-5} -3(-5+1) = n+2 \Rightarrow -3(-4) = n+2 \Rightarrow 12 = n+2 \Rightarrow 12-2 = n \Rightarrow n = 10$$

بنابراین $m+n$ برابر $5+10 = 15$ می‌باشد.

کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی


گاهی یک مسئله را به صورت توصیفی بیان می‌کنند و مقدار مجهولی را از ما می‌خواهند. در این‌گونه مسائل باید مقدار مجهول را x فرض کرده و با توجه به صورت سؤال، ارتباط x را با دیگر فرض‌های مسئله بنویسیم. معادله حاصل، یک معادله درجه اول است که با حل آن مقدار مجهول، معلوم می‌شود.

؟ دو برابر عددی به علاوه یک، مساوی پنج برابر همان عدد منهای چهار می‌باشد. آن عدد کدام است؟

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

✓ گزینه ۱ عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم. دو برابر عدد به علاوه یک، یعنی $2x+1$ و هم‌چنین پنج برابر همان عدد منهای چهار، یعنی $5x-4$ ، حال این دو با هم برابرند، پس $2x+1=5x-4$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$2x+1=5x-4 \Rightarrow 1+4=5x-2x \Rightarrow 5=3x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

نکته ! ممکن است ارتباط مجهول با فرض‌های دیگر مسأله، در قالب یک مفهوم هندسی بیان شود. موارد زیر را به‌خاطر بسپارید.

نام	مثلث	مربع	مستطیل	دایره	ذوزنقه
شکل					
محیط	$a + b + c$	$4a$	$2(a + b)$	$2\pi r$	$a + b + c + d$
مساحت	$\frac{1}{2} a \times h$	a^2	ab	πr^2	$\frac{1}{2} (a + b) \times h$

طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ واحد بیش‌تر است. اگر محیط مستطیل ۳۶ باشد، مساحت آن کدام است؟

- ۵۶ (۱) ۶۵ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴)

گزینه ۲ فرض می‌کنیم عرض مستطیل x باشد، با توجه به صورت سؤال، طول آن $2x + 3$ خواهد بود. (در صورت سؤال گفته از دو برابر عرض یعنی $2x$ سه واحد بیشتر یعنی $2x + 3$). چون محیط مستطیل برابر ۳۶ است، پس:

$$2(x + 2x + 3) = 36 \Rightarrow 2(3x + 3) = 36 \Rightarrow 3x + 3 = 18 \Rightarrow 3x = 18 - 3 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

بنابراین طول مستطیل برابر $2x + 3 = 2(5) + 3 = 13$ و عرض آن برابر ۵ است، پس مساحت مستطیل برابر $5 \times 13 = 65$ می‌باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس
۱

معادله درجه اول

- کدام معادله زیر، یک معادله درجه اول است؟

(۱) $3x^2 + 2x = 5$ (۲) $3x - 1 = 2 - \frac{x}{2}$ (۳) $|x| + 2x = 5$ (۴) $2x + \frac{2}{x} = 4$
- کدام معادله زیر، یک معادله درجه اول است؟

(۱) $x^2 + 1 = 3x(x - 1)$ (۲) $x(x - 2) = 2x$ (۳) $x + 2x(1 - x) = x^2$ (۴) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x(x^2 - 2)$
- جواب معادله $13x - 7 = 8(x + 1)$ چند واحد با کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی اختلاف دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸
- جواب معادله $13x - 56 = 4x + 5(8 - 3x)$ چگونه است؟

(۱) فرد (۲) مضرب ۳ (۳) مربع کامل (۴) مضرب ۵
- جواب معادله $2(1 - x) - 3(x + 1) = 14$ چند واحد با جواب معادله $6 - 5x + 1 = 6$ اختلاف دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- جواب معادله $0 = 5x - (-3x - (2x - (x - 9)))$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱
- در معادله $\frac{5}{6}x = -(x - 6) + 2x$ ، قرینۀ جواب معادله بر کدام عدد بخش پذیر است؟

(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۱
- جواب معادله $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}x$ کدام است؟

(۱) $\frac{21}{5}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $\frac{19}{3}$ (۴) $\frac{25}{7}$
- مجموع جواب معادله $\frac{1-x}{2} - \frac{2-x}{3} = \frac{1-x}{4}$ با معکوشش کدام است؟

(۱) $3/6$ (۲) $4/8$ (۳) $4/2$ (۴) $5/2$

۱۰. جواب معادله $\frac{4}{3}(x-6) + \frac{1}{4}(x+4) = 5$ کدام است؟
 ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)
۱۱. جواب معادله $\frac{11x}{3} + 4 = \frac{12x}{7} - 37$ کدام است؟
 -۴۱ (۱) -۴۰ (۲) -۲۱ (۳) -۳۷ (۴)
۱۲. اگر $A = 2 - 3x$ و $B = 5x - 2$ باشند، جواب معادله $2A + 3B = 7$ کدام است؟
 -۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)
۱۳. اگر $1 - 2x = a$ ، $b = a + 3$ و $c = 2 - b$ باشند، به ازای کدام مقدار m معادله $2a - b + c = m$ بی شمار جواب دارد؟
 -۳ (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۶ (۴)
۱۴. اگر جواب معادله $3(x-2) + 4(x+a) = 28$ برابر ۲ باشد، مقدار a کدام است؟
 ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)
۱۵. معادله $3x + 5 = x(7-a) + 2$ جواب ندارد. مقدار a کدام است؟
 ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)
۱۶. معادله $3x + 7(5 - 4x) + nx = m$ بی شمار جواب دارد. مقدار $m + n$ کدام است؟
 ۵۰ (۱) ۵۵ (۲) ۶۰ (۳) ۶۵ (۴)

کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

۱۷. سن پدری ۴ برابر سن فرزندش است. اگر پنج سال بعد سن او سه برابر سن فرزندش شود، مجموع سن آن‌ها اکنون چقدر است؟
 ۴۰ (۱) ۴۵ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴)
۱۸. آرش سه برابر امیر پول دارد و پول محمد از پول امیر ۴۰ هزار تومان بیش تر است. اگر مجموع پول سه نفر ۸۴۰ هزار تومان باشد، پول محمد چند تومان است؟
 ۱۶۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۲۰ (۴)
۱۹. یک عدد ۴ برابر عدد دیگر است. اگر مجموع آن‌ها ۶۵ باشد، حاصل ضرب آن‌ها کدام است؟
 ۶۸۹ (۱) ۵۷۴ (۲) ۵۸۲ (۳) ۶۷۶ (۴)
۲۰. ۷ عدد طبیعی متوالی را در نظر بگیرید. اگر مجموع چهار عدد ابتدایی با مجموع سه عدد انتهایی برابر باشد، مجموع دو عدد بزرگ تر کدام است؟
 ۲۷ (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴)
۲۱. یک شرکت دارای ۲ مدیر، ۳ مهندس و ۷ کارمند است. حقوق هر مهندس $\frac{2}{3}$ حقوق هر مدیر و ۳ برابر حقوق هر کارمند می‌باشد. اگر حقوق ماهانه شرکت ۱۵۰ میلیون تومان باشد، حقوق یک مدیر چند میلیون تومان است؟
 ۱۸ (۱) ۱۵ (۲) ۲۷ (۳) ۳۲ (۴)
۲۲. شخصی $\frac{1}{3}$ مسیری را با سرعت آرام و $\frac{1}{4}$ باقی مانده مسیر را با سرعت بیش تری طی می‌کند. پس از آن به مدت نیم ساعت ۵۴۰۰ متر با سرعت زیاد ادامه داده تا به ۲۰۰ متری پایان مسیر می‌رسد. طول مسیر چند متر است؟
 ۱۰۸۰۰ (۱) ۱۱۲۰۰ (۲) ۱۱۶۰۰ (۳) ۱۲۴۰۰ (۴)
۲۳. مساحت مستطیل شکل مقابل ۹۱ واحد مربع است. مقدار y کدام است؟

 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
۲۴. طول یک مستطیل از سه برابر عرض آن دو واحد کم تر است. روی طول این مستطیل، مثلث متساوی الاضلاعی بنا می‌کنیم. اگر محیط پنج ضلعی حاصل ۱۶ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟
 ۱۲ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۶ (۴)
۲۵. در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

 ۵ (۱) ۵/۵ (۲) ۶/۵ (۳) ۷ (۴)

(انسانی داخل ۱۴۰۱)

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

معادله درجه دوم

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم. (a نمی‌تونه صفر باشه چون اگر $a = 0$ باشه، معادله درجه درجه دوم نیست، اما در معادله درجه دوم b و c می‌تونن صفر باشن). به a ، b و c ضرایب معادله می‌گوییم که اعداد حقیقی هستند. a ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت معادله است. مثلاً هر یک از معادلات $2x^2 + 3x + 5 = 0$ ، $x^2 + 3x = 0$ و $2x^2 - 8 = 0$ معادله درجه دوم هستند.

حل معادله درجه دوم

برای حل معادله درجه دوم یعنی به دست آوردن x هایی که در تساوی صدق کنند، روش‌های مختلفی وجود دارد که در ادامه با آن‌ها آشنا می‌شوید. این‌که کدام روش را برای حل معادله انتخاب کنیم، بستگی به ضرایب معادله دارد که کم‌کم با حل مثال‌های متنوع انتخاب روش حل مسلط می‌شوید.

۱ ضرایب خاص: برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در قدم اول به ضرایب معادله توجه می‌کنیم. به این صورت که:

الف) اگر $a + c + b = 0$ باشد، یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. مثلاً داریم:

$$2x^2 + 5x - 7 = 0 \xrightarrow[\substack{2+(-7)+5=0}]{a+c+b=0} x = 1, x = -\frac{7}{2}$$

ب) اگر $a + c = b$ باشد، یکی از جواب‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است. مثلاً داریم:

$$5x^2 + 12x + 7 = 0 \xrightarrow[\substack{5+7=12}]{a+c=b} x = -1, x = -\frac{7}{5}$$

پس ممکنه ضرایب معادله، فاص باشن و فیلی سریع و بی‌دردرس بتونیم جوابشو پیدا کنیم. اول می‌موم a و c ، یعنی ضریب x^2 و عدد ثابت رو به دست می‌یاریم. آله با b ، یعنی ضریب x مساوی بشه یا جمعش با اون صفر بشه، معادله یک معادله فاصله و سریع می‌تونید جوابشو درس بنزید. در حالت اول جواب‌ها -۱ و $-\frac{c}{a}$ و در حالت دوم جواب‌ها ۱ و $\frac{c}{a}$ میشه.

؟ ریشه بزرگ‌تر معادله $\sqrt{3}x^2 + 2 - (2 + \sqrt{3})x = 0$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4) \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3) \qquad -1 \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$

✓ گزینه (۳) اگر به معادله دقت کنید $a = \sqrt{3}$ ، $b = -(2 + \sqrt{3})$ و $c = 2$ است. واضح است که $a + c + b = 0$ می‌باشد، پس یک ریشه آن $x = 1$ و ریشه دیگر $x = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ است. ($\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است، پس $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1/7}$ هتماً از یک بزرگ‌تره) بنابراین ریشه بزرگ‌تر معادله $\frac{2}{\sqrt{3}}$ است که گویا شده آن در گزینه (۳) وجود دارد، ببینید:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ب) ممکن است در معادله درجه دوم b یا c یا هر دو صفر باشند که در این صورت به آن معادله درجه دوم ناقص می‌گوییم. در این حالات نیز حل معادله درجه دوم کار آسانی است.

۱) اگر $c = 0$ باشد آن‌گاه معادله به فرم $ax^2 + bx = 0$ خواهد بود. با فاکتورگیری می‌توان آن را به فرم $x(ax + b) = 0$ در آورد. می‌دانیم اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است. پس:

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

مثلاً جواب‌های معادله $x^2 + 6x = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

❓ اگر صفر و ۴ ریشه‌های معادله $x^2 - ax + x + b = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۳(۱) ۴(۲) ۵(۳) ۶(۴)

✔️ **گزینه ۳** چون یک ریشه معادله صفر است، پس حتماً عدد ثابت معادله، یعنی b برابر صفر می‌باشد. از طرفی داریم:

$$b = 0 \Rightarrow x^2 - ax + x = 0 \Rightarrow x^2 + (-a+1)x = 0 \Rightarrow x(x + (-a+1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - a + 1 = 0 \Rightarrow x = a - 1 \end{cases}$$

بنابراین $a - 1$ برابر ۴ می‌باشد. پس:

$$a - 1 = 4 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a + b = 5 + 0 = 5$$

۲ اگر $b = 0$ باشد، معادله به صورت $ax^2 + c = 0$ درمی‌آید. اگر a و c هم‌علامت نباشند (یکی مثبت باشد و یکی منفی) معادله دو ریشه قرینه $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ و $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ دارد. (اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله جواب ندارد). مثلاً معادله‌های زیر را ببینید:

$$2x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$$

$$2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

📌 **توجه** دقت کنید x^2 هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. پس معادله $x^2 = -3$ جواب ندارد. در ضمن می‌دانیم اگر $\square^2 = 0$ باشد، $\square = \pm 0$ خواهد بود، پس از تساوی $x^2 = 3$ نتیجه می‌شود $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ است. به این روش، روش ریشه‌گیری می‌گوییم.

۳ اگر $b = c = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف صفر است. (ریشه مضاعف **رنگه پیه**؟)

$$ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

■ **ریشه مضاعف**: در یک معادله درجه دوم، اگر دو ریشه با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم معادله ریشه مضاعف دارد. مثلاً $x = 3$ ریشه مضاعف معادله $(x - 3)^2 = 0$ است. نگاه کنید:

$$(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 3$$

📌 **یادآوری** حتماً به یاد دارید که وقتی ضرب دو یا چند عبارت صفر شود، حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

با کمک این یادآوری روش دیگری برای حل معادله‌های درجه دوم معرفی می‌کنیم:

۲ **روش تجزیه**: در دوره اول دبیرستان با چند اتحاد جبری آشنا شدید. تعدادی از این اتحادها را می‌توان در حل معادله درجه دوم به کار برد. قبل از هر چیز یک بار این اتحادها را ببینیم.

$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	اتحاد مربع دو جمله‌ای
$9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	اتحاد مزدوج
$(x + 2)(x - 5) = x^2 - 3x - 10$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	اتحاد جمله مشترک

❓ به کمک اتحادها، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $(2x + \frac{1}{4})^2 = \square + \square + \frac{1}{4}$ ب) $(x - 2y)^2 (\square + \square) = x^2 - 4y^2$ پ) $x^2 - \square + 12 = (x - 6)(x - 2)$

✔️ الف) به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(2x + \frac{1}{4})^2 = \square + \square + \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2, 2x$$

↓ ↓ ↓
 اولی به توان ۲ دو برابر اولی در دومی دومی به توان ۲

ب) اتحاد مزدوج به ما کمک می‌کند. کافی است پیرانتز دوم مجموع x و $2y$ باشد. پس:

$$(x - 2y)(\square + \square) = x^2 - 4y^2 \Rightarrow x, 2y$$

پ) با توجه به اتحاد جمله مشترک داریم:

$$x^2 - \square + 12 = (x - 6)(x - 2) \Rightarrow 8x$$

↓
جمع غیرمشترک‌ها در مشترک

حالا بریم سراغ روش تجزیه در حل معادله درجه دو. آماده اید؟

بعد از این که ضرایب معادله برای حل آن کاری برای ما نکردند، سراغ تجزیه می‌رویم. در بسیاری از مواقع اتحاد جمله مشترک کارساز است. اگر ضریب X^2 برابر یک بود، معادله $X^2 + bx + c = 0$ را به صورت $(X + \dots)(X + \dots) = 0$ نوشته و جاهای خالی را با دو عددی پر می‌کنیم که حاصل ضرب آن‌ها برابر c و حاصل جمع آن‌ها برابر b شود. حال چون ضرب دو پیرانتز صفر شده است، پس تک تک آن‌ها صفر می‌باشند.

$$X^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (X + \square)(X + \square) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X + \square = 0 \Rightarrow X = -\square \\ X + \square = 0 \Rightarrow X = -\square \end{cases}$$

دو عددی که ضریبان c و جمعشان b است.

به طور مثال؛ حل معادلات زیر را به روش تجزیه ببینید:

الف) $X^2 + 2X - 15 = 0 \Rightarrow (X + \dots)(X + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{۵ و -۳ پطوره؟}} (X + 5)(X - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X + 5 = 0 \Rightarrow X = -5 \\ X - 3 = 0 \Rightarrow X = 3 \end{cases}$

ب) $X^2 + 10X + 21 = 0 \Rightarrow (X + \dots)(X + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{۳ و ۷ پطوره؟}} (X + 3)(X + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X + 3 = 0 \Rightarrow X = -3 \\ X + 7 = 0 \Rightarrow X = -7 \end{cases}$

پ) $X^2 - 6X + 8 = 0 \Rightarrow (X + \dots)(X + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{-۲ و -۴ پطوره؟}} (X - 2)(X - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \\ X - 4 = 0 \Rightarrow X = 4 \end{cases}$

نکته! اگر ضریب X^2 در یک معادله درجه دوم یک نباشد و ما اصرار به حل معادله به روش تجزیه داشته باشیم، می‌توانیم این‌گونه عمل کنیم که ضریب X^2 را برداریم و در عدد ثابت معادله ضرب کنیم و سپس ریشه‌های معادله جدید را به دست آوریم. (وقتی ضریب X^2 را برمی‌داریم، ضریب X برابر یک میشه. حالا می‌تونیم تجزیه کنی یا شاید معادله با ضرایب قاص بشه) در انتها ریشه‌های به دست آمده را بر ضریب X^2 تقسیم می‌کنیم تا ریشه‌های معادله اصلی به دست آید.

به طور مثال؛ حل معادله $6X^2 + X - 15 = 0$ را ببینید:

$$6X^2 + X - 15 = 0 \Rightarrow X^2 + X - 9 = 0 \Rightarrow (X + \dots)(X + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{۱۰ و -۹ موافقی؟}} (X + 10)(X - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X + 10 = 0 \Rightarrow X = -10 \\ X - 9 = 0 \Rightarrow X = 9 \end{cases}$$

جمعشان ۱ و ضریبان ۹۰ است.

حال کافی است برای به دست آوردن ریشه‌های معادله اصلی -10 و 9 را بر ضریب X^2 یعنی 6 تقسیم کنیم، پس $X = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$ و $X = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ریشه‌های معادله $6X^2 + X - 15 = 0$ هستند.

یک مثال دیگر ببینید. می‌خواهیم معادله $2X^2 - 7X + 3 = 0$ را حل کنیم:

$$2X^2 - 7X + 3 = 0 \Rightarrow X^2 - 7X + 6 = 0 \xrightarrow{\text{قاص شد}} X = 1, X = \frac{6}{1} = 6$$

$1+6=7$

حال باید ریشه‌های به دست آمده را بر ضریب X^2 یعنی 2 تقسیم کنیم، پس ریشه‌های معادله $2X^2 - 7X + 3 = 0$ برابر $X = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و $X = \frac{6}{2} = 3$ هستند.

نکته! گاهی اوقات فرم معادله به گونه‌ای است که می‌توانیم از اتحاد مزدوج برای حل معادله استفاده کنیم.

ریشه کوچک‌تر معادله $4X^2 - (2-X)^2 = 0$ کدام است؟

۲ (۱) -۳ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

گزینه ۱ معادله به فرم $\square^2 - \square^2 = 0$ است. اتحاد مزدوج خیلی به ما کمک می‌کند.

$$4X^2 - (2-X)^2 = 0 \Rightarrow (2X)^2 - (2-X)^2 = 0 \Rightarrow (2X - (2-X))(2X + (2-X)) = 0 \Rightarrow (2X - 2 + X)(2X + 2 - X) = 0$$

$$\Rightarrow (3X - 2)(X + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3X - 2 = 0 \Rightarrow 3X = 2 \Rightarrow X = \frac{2}{3} \\ X + 2 = 0 \Rightarrow X = -2 \end{cases}$$

بنابراین ریشه کوچک‌تر معادله $X = -2$ است.

نکته! اگر در معادله درجه دوم عبارت‌های یکسان در طرفین تساوی وجود داشت، می‌توانیم آن‌ها را با هم ساده کنیم اما ریشه عبارت ساده‌شده را باید جزو جواب‌های معادله در نظر بگیریم.

سؤال؟ مجموع جواب‌های معادله $(x-2)(x-4) = x-2$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

گزینه ۳ در طرفین معادله $(x-2)$ وجود دارد. آن را از طرفین معادله حذف می‌کنیم، اما باید ریشه آن، یعنی $x=2$ را جزو جواب‌های معادله در نظر بگیریم. حال جواب دیگر معادله را به دست آوریم:

$$(x-2)(x-4) = x-2 \Rightarrow x-4 = 1 \Rightarrow x = 1+4 = 5$$

بنابراین $x=2$ و $x=5$ ریشه‌های معادله‌اند، پس مجموع ریشه‌ها $2+5=7$ است.

روش دلتا: اگر معادله درجه دوم در حالات خاص نبود و تجزیه کردن آن هم مشکل یا امکان‌پذیر نبود، سراغ روش دلتا (Δ) می‌رویم. در معادله

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ داریم:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

توجه به Δ مبین معادله درجه دوم نیز می‌گویند.

مثلاً حل معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را با روش Δ ببینید، واضح است که در این معادله $a=4$ ، $b=7$ و $c=-2$ است، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4(4)(-2) = 49 + 32 = 81$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 + 9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 - \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 - 9}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

یک دقیقه با من باش. شما می‌تونید معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ رو به روش تجزیه هم حل کنید. نگاه کنید:

$$4x^2 + 7x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow (x + \dots)(x + \dots) = 0 \xrightarrow{\text{علاوه } -1 \text{ و } 8} (x + 8)(x - 1) = 0$$

پیمشون ۷ و ضربشون -۸ باشه.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۴ می‌کنیم}} \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

توصیه جذر اعداد زیر را حفظ کنید، در روش دلتا به کارتان می‌آید.

a	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹	۱۹۶	۲۲۵	۲۵۶	۲۸۹	۳۲۴	۳۶۱	۴۰۰
\sqrt{a}	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

نکته! گاهی اوقات ممکن است با جذر اعداد بزرگ‌تری هم مواجه شوید. باید با سعی و خطا کار را تمام کنید.

سؤال؟ ریشه کوچک‌تر معادله $2x^2 + 7x + 3 = 0$ چند برابر ریشه بزرگ‌تر آن است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴)

۲ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

گزینه ۳ ریشه‌های معادله را به روش دلتا به دست می‌آوریم. توجه کنید $a=2$ ، $b=7$ و $c=3$ است، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 + 5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 - 5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

بنابراین ریشه بزرگ‌تر $-\frac{1}{2}$ و ریشه کوچک‌تر -3 است، پس $-\frac{3}{-\frac{1}{2}} = 6$ می‌باشد. (هواست هست تو اعداد منفی هر چه به سمت صفر میریم عدد بزرگ‌تر می‌شه؟ $-\frac{1}{2}$ به صفر نزدیک‌تره، پس بزرگ‌تر از -3 هستش. اول فکر کردی چون ریشه کوچک‌تر چند برابر ریشه بزرگ‌تره هتماً کوچک‌تر از

یک میشه و گفتی میشه $\frac{1}{3}$ ؟؟؟)

پایه دهم • فصل اول |

۴ روش مربع کامل کردن: اتحاد مربع کامل دوجمله‌ای را یادتان هست؟ $((a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2)$. می‌توان معادله درجه دوم را به کمک این اتحاد به شکل $(x + m)^2 = n$ تبدیل کرد، سپس با ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله را به دست آورد.

برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به روش مربع کامل گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

۱ اگر $a \neq 1$ باشد، طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود.

$$2x^2 - 8x - 10 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 - 4x - 5 = 0$$

۲ عدد ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم:

$$x^2 - 4x = 5$$

۳ نصف ضریب x را به توان ۲ می‌رسانیم و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 5 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$$

۴ حال سمت چپ تساوی مربع کامل است و می‌توانیم آن را به فرم $(x + m)^2$ بنویسیم.

$$(x - 2)^2 = 9$$

۵ با ریشه‌گیری، ریشه‌های معادله به دست می‌آیند.

$$(x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x - 2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -3 + 2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

نکته! روش Δ نتیجه روش مربع کامل کردن است. توصیه می‌کنم زمانی از روش مربع کامل کردن، معادله $x^2 + bx + c = 0$ را حل کنید که b عددی زوج باشد تا نصف ضریب x کسری نشود و در محاسبات دچار اشتباه نشوید.

؟ حل معادله $0 = 3x^2 + 2x - 4$ به روش مربع کامل منجر به معادله $(x + m)^2 = n$ شده است. مقدار n کدام است؟

$$\frac{1}{9} \quad (1) \qquad \frac{1}{3} \quad (3) \qquad \frac{1}{6} \quad (2) \qquad \frac{13}{9} \quad (4)$$

✓ گزینه ۴ ابتدا طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود. حال به طرفین معادله توان دوم نصف ضریب x را اضافه می‌کنیم و داریم:

$$3x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$$

متماً $(x + m)^2$ است.

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{13}{9} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{13}{9} \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

بعضی معادلات درجه دوم نیستند اما می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. (مثلاً معادله $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ درجه دوم نیست اما اگر $x^2 = t$ باشد، اونوقت معادله به صورت $t^2 - 2t - 3 = 0$ درمیار که یک معادله درجه دومه). حال معادله درجه دوم حاصل که بر حسب متغیر جدید مثلاً t هست را حل می‌کنیم تا t به دست آید. سپس عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم را مساوی تهای به دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود. مثلاً حل معادله $0 = x^4 - 2x^2 - 3$ را ببینید:

$$x^4 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \xrightarrow[\text{فاصله شر}]{1+(-3)=-2} t = -1, t = 3$$

حال x^2 را برابر تهای به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

؟ مجموع ریشه‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر معادله $(x^2 - 3x)^2 - (x^2 - 3x) - 6 = 0$ کدام است؟

$$2(1) \quad 3(2) \quad 4(3) \quad 5(4)$$

✓ گزینه (۳) اگر فرض کنیم $x^2 - 3x = t$ باشد، معادله به صورت $t^2 - t - 6 = 0$ می‌شود. حال ریشه‌های معادله درجه دوم حاصل را به دست می‌آوریم:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

سپس $x^2 - 3x$ را برابر آهای به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$t = 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 9 - 4(1)(-3) = 21} x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

$$t = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{فاصله شد}]{1+2+(-3)=0} x = 1, x = 2$$

واضح است که ریشه بزرگ‌تر معادله $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ و ریشه کوچک‌تر آن $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ است، پس مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{3 + \sqrt{21}}{2} + \frac{3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{3 + \sqrt{21} + 3 - \sqrt{21}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

! نکته گاهی اوقات در یک معادله درجه دوم، یک عبارت بر حسب x تکرار می‌شود. در این جا هم می‌توانیم آن عبارت تکرار شونده را t فرض کنیم و ریشه‌های معادله جدید، یعنی t را به دست آوریم. در آخر عبارتی که مساوی با t قرار داده بودیم را مساوی آهای به دست آمده می‌گذاریم تا x به دست آید.

؟ ریشه کوچک‌تر معادله $(3x + 1)^2 + 9(3x + 1) + 14 = 0$ کدام است؟

$$1(1) \quad -1(2) \quad -\frac{5}{3}(3) \quad -\frac{1}{3}(4)$$

✓ گزینه (۳) عبارت $3x + 1$ در معادله تکرار می‌شود. با فرض $3x + 1 = t$ معادله به صورت زیر ساده می‌شود و داریم:

$$t^2 + 9t + 14 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \\ t + 7 = 0 \Rightarrow t = -7 \end{cases}$$

حال $3x + 1$ را برابر آهای به دست آمده قرار می‌دهیم تا x معلوم شود:

$$t = -2 \Rightarrow 3x + 1 = -2 \Rightarrow 3x = -2 - 1 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

$$t = -7 \Rightarrow 3x + 1 = -7 \Rightarrow 3x = -7 - 1 \Rightarrow 3x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

بنابراین ریشه کوچک‌تر معادله $x = -\frac{8}{3}$ است.

توجه کن این معادله درجه دومه، اما چون $3x + 1$ تو معادله تکرار میشه، $3x + 1$ رو t گرفتیم و معادله رو حل کردیم. می‌تونستیم معادله رو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ در بیاریم و حل کنیم که کمی وقت گیره.

$$(3x + 1)^2 + 9(3x + 1) + 14 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 + 27x + 9 + 14 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 33x + 24 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = \frac{-24}{9} = -\frac{8}{3}$$

تعداد جواب‌های معادله درجه دوم

همان طور که دیدیم برای به دست آوردن ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به روش دلتا، Δ زیر رادیکال قرار می‌گیرد. می‌دانیم اعداد منفی زیر رادیکال نمی‌روند (مثلاً $\sqrt{-2}$ ریزی؟). پس علامت Δ تعیین‌کننده تعداد ریشه‌های معادله می‌باشد، به جدول زیر توجه کنید:

علامت Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
تعداد ریشه‌ها	معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	معادله یک ریشه مضاعف دارد.	معادله ریشه حقیقی ندارد.
ریشه‌ها	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	-

! نکته اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ضرایب a و c مختلف‌العلامت باشند (یکی مثبت باشد، یکی منفی) حتماً $\Delta > 0$ است و معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

؟ کدام معادله زیر ریشه حقیقی ندارد؟

$$(1) \quad 3x^2 + x - 4 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (4) \quad (x-2)(x+1) + 5 = 0$$

✓ گزینه (۴) در گزینه (۱) که a و c مختلف علامت هستند (یکی $+$ ، $+$ ، $+$ ، $-$) حتماً $\Delta > 0$ است، پس دو ریشه حقیقی متمایز دارد. در گزینه‌های (۲) و (۳) مقدار Δ را به دست می‌آوریم:

$$\text{ریشه مضاعف دارد.} \quad \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

$$\text{دو ریشه حقیقی متمایز دارد.} \quad \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12$$

بنابراین گزینه (۴) یعنی معادله $(x-2)(x+1) + 5 = 0$ ریشه حقیقی ندارد. برای تمرین بیش‌تر دلتای آن را به دست آوریم. ابتدا باید معادله را به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ در آوریم:

$$(x-2)(x+1) + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11$$

اتفاق جمله مشترک

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

؟ معادله $x^2 + (m+1)x + 4 = 0$ ریشه مضاعف دارد. بزرگ‌ترین مقدار m کدام است؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -4 \quad (4) \quad -5$$

✓ گزینه (۲) باید دلتای معادله صفر شود. واضح است که $a = 1$ ، $b = m+1$ و $c = 4$ است، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (m+1)^2 = 16 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \begin{cases} m+1 = 4 \Rightarrow m = 3 \\ m+1 = -4 \Rightarrow m = -5 \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار m برابر ۳ است.

! نکته گاهی اوقات به جای آن‌که بگویند فلان معادله ریشه مضاعف دارد، می‌گویند تفاضل دو ریشه معادله صفر است.

؟ در معادله درجه دوم $4x^2 - 20x + m = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر است. یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

$$(1) \quad 2/25 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 2/5 \quad (4) \quad 3/5$$

✓ گزینه (۳) چون تفاضل دو ریشه معادله صفر است، یعنی معادله ریشه مضاعف دارد، پس دلتای معادله برابر صفر است:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-20)^2 - 4(4)(m) = 0 \Rightarrow 400 - 16m = 0 \Rightarrow 16m = 400 \Rightarrow m = \frac{400}{16} = \frac{100}{4} = 25$$

وقتی معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، آن‌گاه ریشه معادله $x = \frac{-b}{2a}$ است، پس:

$$m = 25 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-20)}{2 \times 4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2/5$$

! نکته وقتی گفته می‌شود معادله دو ریشه حقیقی دارد، یعنی معادله می‌تواند دو ریشه حقیقی متمایز یا مساوی داشته باشد، پس باید $\Delta \geq 0$ باشد.

؟ به ازای چند مقدار طبیعی برای a معادله $x^2 + 4x + a - 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟

$$(1) \quad 6 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 3$$

✓ گزینه (۲) چون معادله دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta \geq 0$ باشد:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4^2 - 4(1)(a-1) \geq 0 \Rightarrow 16 - 4(a-1) \geq 0 \Rightarrow 16 - 4a + 4 \geq 0 \Rightarrow 20 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 20 \Rightarrow a \leq \frac{20}{4} \Rightarrow a \leq 5$$

بنابراین a می‌تواند مقادیر طبیعی $1, 2, 3, 4, 5$ را بپذیرد که ۵ مقدار است.

روابط بین ریشه‌های معادله با ضرایب معادله


اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، می‌توان مجموع ریشه‌ها ($S = x_1 + x_2$)، حاصل ضرب ریشه‌ها ($P = x_1 x_2$) و قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها ($D = |x_1 - x_2|$) را بدون نیاز به حل معادله و با استفاده از ضرایب معادله به دست آورد که در زیر می‌بینید:

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = P = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 - x_2| = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(اگر $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ باشند، می‌تونی تمامی روابط بالا رو فوراً اثبات کنی.)

❓ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

✔️ **گزینه ۱** ضرایب معادله $a=1$ ، $b=3$ و $c=-2$ هستند، $x_1 x_2$ و $x_1 + x_2$ را می‌توانیم بر حسب ضرایب معادله به دست آوریم، پس:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

❓ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشند، حاصل $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$ کدام است؟

$$-13 \quad (۴)$$

$$13 \quad (۳)$$

$$-26 \quad (۲)$$

$$26 \quad (۱)$$

✔️ **گزینه ۲** سعی می‌کنیم رابطه $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$ را بر حسب $x_1 + x_2$ و $x_1 x_2$ بنویسیم:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = P(S^2 - 2P) = \left(\frac{c}{a}\right) \left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) \right) = -2 \left((-3)^2 - 2(-2) \right) = -2(9 + 4) = -2 \times 13 = -26$$

❓ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $5x^2 - 8x - 4 = 0$ باشند، مقدار $|x_1^2 - x_2^2|$ کدام است؟

$$\frac{102}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{96}{25} \quad (۳)$$

$$\frac{90}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{84}{25} \quad (۱)$$

✔️ **گزینه ۳** به کمک اتحاد مزدوج می‌توان $x_1^2 - x_2^2$ را به صورت $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ نوشت، پس:

$$\begin{aligned} |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| &= \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times \left(-\frac{b}{a}\right) \right| = \left| \frac{\sqrt{64 - 4(5)(-4)}}{5} \times \left(-\frac{-8}{5}\right) \right| = \left| \frac{\sqrt{64 + 80}}{5} \times \frac{8}{5} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{144}}{5} \times \frac{8}{5} \right| = \left| \frac{12}{5} \times \frac{8}{5} \right| = \left| \frac{96}{25} \right| = \frac{96}{25} \quad (\text{رو فقط کردی یا نه؟}) \end{aligned}$$

عبارت	نحوه محاسبه بر حسب S و P
$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$	$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = P \times S$
$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$
$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$ <i>($x_1^2 + x_2^2$ بالا مناسبه شره بور)</i>
$x_1^3 + x_2^3$	$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$

نکته! همان‌طور که ملاحظه کردید گاهی

اوقات $x_1 - x_2$ و $x_1 x_2$ ، $x_1 + x_2$ یعنی S ، P و D در دل یک عبارت وجود دارند. در این موارد باید با استفاده از اتحادهای جبری، تجزیه کردن، فاکتورگیری و مخرج مشترک‌گیری و ... عبارت را بر حسب S ، P و D نوشت. چند نمونه در جدول مقابل ببینید و نحوه به دست آوردن آن‌ها را تمرین کنید.

توجه بعضی اوقات ممکن است عبارات را به صورت فارسی بیان کنند. چند نمونه ببینید:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	مجموع معکوس ریشه‌ها	$x_1^2 + x_2^2$	مجموع مربعات ریشه‌ها
$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$	مجموع جذر ریشه‌ها	$x_1^3 + x_2^3$	مجموع مکعبات ریشه‌ها
$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$	مجموع معکوس مربع ریشه‌ها	$ x_1^2 - x_2^2 $	قدر مطلق تفاضل مربعات ریشه‌ها

دو حالت خاص:

۱ اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه قرینه داشته باشد، حتماً مجموع ریشه‌ها صفر است، پس b حتماً صفر است.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

(این مطلب رو در حالت خاص معادله درجه دو دیده بودیم. این هم از یک زاویه دیگر)

۲ اگر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ معکوس هم باشند، حتماً حاصل ضرب آن‌ها یک است، پس حتماً $a = c$ می‌باشد.

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c$$

؟ ریشه‌های معادله $mx^2 - 4x + 2m - 1 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

✔ **گزینه ۲** چون ریشه‌ها معکوس یکدیگرند، پس $\frac{c}{a} = 1$ و در نتیجه $a = c$ می‌باشد:

$$a = c \Rightarrow m = 2m - 1 \Rightarrow 1 = 2m - m \Rightarrow m = 1$$

به ازای $m = 1$ معادله به صورت $x^2 - 4x + 1 = 0$ می‌شود، بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر $4 = -\left(-\frac{4}{1}\right) = \frac{b}{a}$ است.

! نکته گاهی در بعضی تست‌ها یک رابطه بر حسب دو ریشه معادله داده می‌شود و باید پارامتر موجود در معادله را تعیین کنیم. در این گونه مسائل نوشتن حاصل ضرب یا حاصل جمع ریشه‌ها یا هر دو و قرار دادن آن‌ها با رابطه داده شده در یک دستگاه (دستگاه پیه؟) کلید حل مسأله است.

■ دستگاه معادلات خطی: در واقع دو معادله و دو مجهول داریم، مثل $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ ، یکی از راه‌های حل کردن آن، حذف کردن x یا y است

تا به یک معادله یک مجهول برسیم. نام این روش حل، روش حذفی است. حل دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ را ببینید.

$$(-2) \times \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1 \xrightarrow{\text{بای‌گذاری در یکی از معادلات}} 2x + 3(1) = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

؟ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x + 2m + 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطه $\alpha + 2\beta = -5$ برقرار است؟

- ۲ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) -۱ (۱)

✔ **گزینه ۴** با توجه به این‌که ضریب x^2 و ضریب x پارامتر ندارند، پس می‌توانیم مجموع ریشه‌ها یعنی $\alpha + \beta$ را به دست آوریم.

$$\text{می‌دانیم } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \text{، پس:}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases} \Rightarrow \beta = -3 \xrightarrow{\text{دو معادله را}} \alpha = 1$$

حال برای به دست آوردن m از حاصل ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2m+1}{1} \Rightarrow 1 \times (-3) = 2m+1 \Rightarrow 2m+1 = -3 \Rightarrow 2m = -3-1 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{2} = -2$$

! نکته گاهی اوقات قسمتی از عبارتی که بر حسب ریشه‌ها می‌خواهند، شبیه خود معادله است. در این موارد این‌که «ریشه معادله در معادله صدق می‌کند» کلید حل سؤال است.

❓ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2 + 3\beta - 5$ کدام است؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۵ (۲)

۱۸ (۱)

✔️ **گزینه ۴:** یک بار عبارت خواسته شده را به صورت $\alpha^2 - 5 + 3\beta$ ببینید. موافقید که $\alpha^2 - 5$ شبیه قسمتی از معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ است. می‌دانیم $x = \alpha$ در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 5 = 3\alpha$$

بنابراین عبارت $\alpha^2 - 5 + 3\beta$ برابر $3\alpha + 3\beta$ است. حال داریم:

$$3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 3\left(-\frac{-3}{1}\right) = 3 \times 3 = 9$$

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل اقتصادی

در هر بنگاه اقتصادی، سه مؤلفه هزینه، درآمد حاصل از فروش و سود وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱ **هزینه:** هزینه تولید x واحد کالا که شامل هزینه اولیه (راه‌اندازی، تجهیزات، تبلیغات و ...) و هزینه تولید است که با $C(x)$ نمایش می‌دهند.

۲ **درآمد:** اگر N واحد کالا با قیمت هر واحد P به فروش برسد، $N \times P$ درآمد حاصل از فروش است که آن را با $R(x)$ نشان می‌دهند.

۳ **سود:** اگر هزینه‌ها را از درآمد حاصل از فروش x واحد کالا کم کنیم، آن چه باقی می‌ماند سود حاصل از فروش x واحد کالا است که آن را با $P(x)$ نشان می‌دهند.

بنابراین در یک بنگاه اقتصادی « هزینه - درآمد = سود » می‌باشد.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

❓ تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x واحد از یک کالا به صورت $R(x) = -x^2 + 12x$ و تابع هزینه آن به صورت $C(x) = 98 - 9x$ است. درآمد شرکت

پس از تولید حداقل چند کالا برابر ۱۲ واحد می‌شود؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۱۰ (۲)

۱۱ (۱)

✔️ **گزینه ۴:** ابتدا تابع سود را به دست می‌آوریم تا ببینیم با تولید چند واحد کالا تابع سود برابر ۱۲ می‌شود:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 12x - (98 - 9x) \Rightarrow P(x) = -x^2 + 12x - 98 + 9x \Rightarrow P(x) = -x^2 + 21x - 98$$

حال معادله $P(x) = 12$ را حل می‌کنیم:

$$P(x) = 12 \Rightarrow -x^2 + 21x - 98 = 12 \Rightarrow x^2 - 21x + 110 = 0 \Rightarrow x^2 - 21x + 110 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 11) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 11$$

بنابراین شرکت پس از تولید حداقل ۱۰ واحد کالا سود ۱۲ واحدی می‌کند. (معنی حداقل رو هم که می‌دونیم.)

■ **نقطه سر به سر:** تعداد تولید یک بنگاه اقتصادی که به ازای آن هزینه و درآمد برابر می‌شود (سود شرکت صفر همیشه) و بنگاه نه سود می‌کند نه ضرر را نقطه سر به سر می‌گوییم.

❓ تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x واحد کالا به صورت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ و تابع هزینه آن $C(x) = 25 - \frac{13}{4}x$ است. این شرکت دومین باری

که به نقطه سر به سر خود می‌رسد، به ازای تولید چند واحد کالا است؟

۲۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۵ (۱)

✔️ **گزینه ۳:** نقطه سر به سر نقطه‌ای است که تابع سود شرکت برابر صفر شود. پس ابتدا تابع سود را به دست می‌آوریم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - (25 - \frac{13}{4}x) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 25 + \frac{13}{4}x \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}x - 25$$

حال معادله $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}x - 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 20) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 20$$

بنابراین شرکت برای اولین بار به ازای تولید ۵ کالا و برای دومین بار به ازای تولید ۲۰ کالا به نقطه سر به سر می‌رسد.

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل توصیفی

حل بعضی از مسائل توصیفی منجر به حل یک معادله درجه دوم می‌شود. در این‌گونه مسائل معمولاً دو جواب برای مجهول پیدا می‌شود که یکی از آن‌ها با توجه به شرایط سؤال قابل قبول نیست. مثلاً اگر سن فردی، عدد منفی شود، طول یک ضلع هندسی منفی شود و ... آن‌ها جواب‌های غیر قابل قبول مسأله هستند.

۱۰ حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی از ۹ برابر عدد کوچک‌تر، ۸ واحد بیش‌تر است. عدد کوچک‌تر بر کدام عدد بخش پذیر است؟

۴(۱) ۵(۲) ۶(۳) ۷(۴)

۱۱ گزینه ۱ فرض می‌کنیم x و $x+2$ دو عدد زوج متوالی هستند. طبق صورت سؤال $x(x+2)$ برابر $9x+8$ است، پس:

$$x(x+2) = 9x+8 \Rightarrow x^2+2x = 9x+8 \Rightarrow x^2+2x-9x-8 = 0 \Rightarrow x^2-7x-8 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = 8$$

واضح است که -1 عددی زوج نیست، پس غیر قابل قبول است و $x = 8$ جواب مسأله می‌باشد که با توجه به گزینه‌ها بر ۴ بخش پذیر است.

۱۲ در شکل مقابل مستطیلی که طول آن ۱۰ واحد بیش‌تر از عرض آن است را از درون مربعی به ضلع ۴۰ برداشته‌ایم. اگر

مساحت قسمت رنگی ۱۵۲۵ باشد، محیط مستطیل کدام است؟

۳۵(۱) ۴۰(۲) ۵۰(۳) ۶۰(۴)

۱۳ گزینه ۲ اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن $x+10$ است. بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$1525 = 40^2 - x(x+10) \Rightarrow 1525 = 1600 - (x^2+10x) \Rightarrow x^2+10x = 1600 - 1525$$

$$\Rightarrow x^2+10x = 75 \Rightarrow x^2+10x-75 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+15) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -15$$

واضح است که -15 نمی‌تواند عرض مستطیل باشد. پس عرض مستطیل ۵ بوده و طول آن برابر ۱۵ می‌شود. بنابراین محیط مستطیل برابر است با:

$$P = 2(5+15) = 2 \times 20 = 40$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس
۲

حل معادله درجه دوم

۲۶. ریشه بزرگ‌تر معادله $3x^2 + 4x + 1 = 0$ کدام است؟

۱(۱) $\frac{1}{4}$ ۲(۲) -1 ۳(۳) $-\frac{1}{3}$ ۴(۴) $-\frac{3}{4}$

۲۷. ریشه مثبت معادله $37x^2 - 16x - 21 = 0$ ، چند واحد از ریشه مثبت معادله $x^2 - 2x = x$ کم‌تر است؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

۲۸. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $0 = (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)x^2$ باشند، مقدار $x_1^3 + x_2^3$ کدام است؟

۱(۱) $2\sqrt{2}-3$ ۲(۲) $\sqrt{2}-3$ ۳(۳) $2\sqrt{2}-1$ ۴(۴) $\sqrt{2}-1$

۲۹. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر -1 است. اگر $6a = b = 5c$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

۱(۱) $1/2$ ۲(۲) $2/1$ ۳(۳) $-1/2$ ۴(۴) $-2/1$

۳۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $0 = 4x^2 - x - 3$ و $|x_1| = -x_2$ باشد، مقدار $4x_1 + 3x_2$ کدام است؟

۱(۱) -2 ۲(۲) -1 ۳(۳) 1 ۴(۴) صفر

۳۱. اگر $x = 1$ یکی از جواب‌های معادله درجه دوم $0 = 5x^2 - 3x + k$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱(۱) $-0/4$ ۲(۲) $-0/3$ ۳(۳) $0/3$ ۴(۴) $0/4$

۳۲. اگر $x = -5$ یکی از ریشه‌های معادله $0 = x^2 + (2m-4)x + m - 9$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

۱(۱) 2 ۲(۲) -2 ۳(۳) 1 ۴(۴) -1

۳۳. اگر $x = m$ ریشه مثبت معادله $0 = 3x^2 - x + 2mx - 4$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

۱(۱) $-\frac{2}{3}$ ۲(۲) $\frac{4}{3}$ ۳(۳) $-\frac{3}{2}$ ۴(۴) $-\frac{4}{3}$

۳۴. معادله $x^2 + (m+6)x - m = 15$ دو ریشه قرینه دارد. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۹ (۳) -۱ (۴) -۱۶

۳۵. به ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادله $0 = (a^2 - 9)x - (a + 3)x^2$ قرینه یکدیگرند؟

- (۱) $\{3\}$ (۲) $\{\}$ (۳) $\{-3\}$ (۴) $\{3, -3\}$

۳۶. کدام معادله با بقیه، هیچ ریشه مشترکی ندارد؟

- (۱) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (۲) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (۳) $x^2 + x - 12 = 0$ (۴) $x^2 - 6x + 8 = 0$

۳۷. اگر $x = -3$ یک ریشه معادله $0 = x^2 - (m-1)x + 4m - 27$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۸. ریشه‌های معادله $(2x-8)(6+2x) = (3x-12)(-3x-9)$ کدام است؟

- (۱) ۴, ۳ (۲) -۴, ۳ (۳) -۴, -۳ (۴) -۳, ۴

۳۹. ریشه کوچک‌تر معادله $0 = 4x^2 - (2-x)^2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۰. مجموع جواب‌های معادله $0 = x^2(x-1) - 4(x-1)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۱. مجموع جواب‌های معادله $0 = (x+1)^2(x-3) - 4x(x-3)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۲. ریشه‌های معادله $0 = (x-2)(4x-5) = 2-x$ چگونه‌اند؟

- (۱) یک ریشه مثبت دارد. (۲) دو ریشه مثبت دارد.
(۳) دو ریشه مختلف‌العلامت دارد. (۴) یک ریشه منفی دارد.

۴۳. یکی از ریشه‌های معادله $0 = x^2 + 4x + 1$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $-2 - \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $2 - 2\sqrt{3}$

۴۴. مجموع ریشه بزرگ‌تر معادله $0 = x^2 - 8x + 13$ و ریشه کوچک‌تر معادله $0 = 2x^2 - 6$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۵. یکی از ریشه‌های معادله $0 = x^2 - 5x + 3$ به صورت $m + \sqrt{n}$ است. مقدار $m + n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{23}{4}$ (۲) $\frac{19}{2}$ (۳) $\frac{23}{2}$ (۴) $\frac{19}{4}$

۴۶. اگر x_1 ریشه کوچک‌تر معادله $0 = x^2 - 4x - 1$ باشد، مقدار x_1^2 کدام است؟

- (۱) $8 - 2\sqrt{5}$ (۲) $12 - 4\sqrt{5}$ (۳) $8 + 4\sqrt{5}$ (۴) $9 - 4\sqrt{5}$

۴۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $0 = 12x^2 - 5x - 2$ و $x_1 > x_2$ باشد، مقدار $3x_1 + 4x_2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۸. ریشه بزرگ معادله $0 = x^2 - 5x + 3$ به صورت $\frac{m + \sqrt{n}}{p}$ است. مقدار $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۴۹. مجموع ریشه بزرگ‌تر معادله $0 = x^2 - 2x - 2$ و ریشه کوچک‌تر معادله $0 = x^2 - 8x + 13$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۵۰. اگر $x = 3$ یک ریشه معادله $0 = ax^2 - (2a+3)x + a + 1$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۱. اگر $x = n$ ریشه منفی معادله $0 = 5x^2 + nx - 3$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

۵۲. اگر معادله $4x^2 - 32x = 5$ را به روش مربع کامل حل کنیم، کدام معادله حاصل می شود؟

$$(x-8)^2 = \frac{49}{4} \quad (1) \quad (x-4)^2 = \frac{69}{4} \quad (2) \quad (x-4)^2 = \frac{69}{4} \quad (3) \quad (x-4)^2 = \frac{59}{4} \quad (4)$$

۵۳. در حل معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ ، معادله $(x+m)^2 = n$ حاصل شده است. مقدار $m+n$ کدام است؟

$$\frac{49}{16} \quad (1) \quad \frac{53}{16} \quad (2) \quad \frac{59}{16} \quad (3) \quad \frac{61}{16} \quad (4)$$

۵۴. در حل معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ به معادله $x^2 + mx = n$ رسیدیم. کدام عدد را به طرفین آن اضافه کنیم تا با روش ریشه‌گیری جواب‌های معادله به دست آید؟

$$9 \quad (1) \quad \frac{9}{4} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

۵۵. مجموع جواب‌های معادله $9 = (2-x)^2 - (2-x)^2$ کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 4 + 2\sqrt{5} \quad (3) \quad 4 + 2\sqrt{3} \quad (4)$$

۵۶. ریشه مثبت معادلات $9 = (3x-2)^2 - 9 = 0$ و $a = (4x-1)^2$ مشترک‌اند. مقدار a کدام است؟

$$\frac{225}{16} \quad (1) \quad \frac{289}{9} \quad (2) \quad \frac{196}{16} \quad (3) \quad \frac{256}{9} \quad (4)$$

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

۵۷. تعداد جواب‌های حقیقی معادله $9 = 10x^2 + x^4$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \text{صفر} \quad (5)$$

۵۸. ریشه کوچک‌تر معادله $8 = 6x^2 - x^4$ کدام است؟

$$-\sqrt{2} \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad -\sqrt{3} \quad (3) \quad -3 \quad (4)$$

۵۹. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $54 = 15x^2 - x^4$ کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 4\sqrt{2} \quad (2) \quad 54 \quad (3) \quad 8\sqrt{2} \quad (4)$$

۶۰. تعداد ریشه‌های معادله $10 = 6x - x^2 + 2(x-3)^4$ کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4)$$

۶۱. در معادله درجه دوم $6 = (x-1) + 2\sqrt{3}(x-1)$ بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

$$4 - \sqrt{3} \quad (1) \quad 3 - \sqrt{3} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{3} \quad (4)$$

۶۲. مجموع ریشه‌های مثبت معادله $100 = 29x^2 - x^4$ کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

۶۳. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $3 = 2x^2 + (x^2 - 1)^2$ کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (1) \quad -2\sqrt{2} \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

۶۴. مجموع جواب‌های معادله $6 = 5(x-2) - (x-2)^2$ کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

۶۵. مجموع ریشه‌های معادله $64 = 20x^2 - x^4$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 8 \quad (4)$$

تعداد جواب‌های معادله درجه دوم

۶۶. معادله $3 - k + (x-3)^2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. کم‌ترین مقدار صحیح k کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

۶۷. معادله $1 - a + 6x + 2x^2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. کم‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟

$$-5 \quad (1) \quad -4 \quad (2) \quad -3 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

۶۸. به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $3 = ax - 3x^2$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

$$\text{هر مقدار} \quad (1) \quad \text{هیچ مقدار} \quad (2) \quad a = \pm 6 \quad (3) \quad \text{فقط } a > 6 \quad (4)$$

(انسانی خارج ۹۱)

- ۶۹.** به ازای چند عدد طبیعی a ، معادله $x^2 - 4x + a = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
- ۷۰.** معادله $(x-1)^2 - k = 6$ ریشه مضاعف دارد. اگر معادله $x^2 + kx + a + 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، بیشترین مقدار صحیح a کدام است؟
 ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)
- ۷۱.** معادله $mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$ ریشه مضاعف دارد. کمترین مقدار m کدام است؟
 -۱ (۱) ۱ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)
- ۷۲.** معادله $x^2 + (2-a)x - 2a + 1 = 0$ دو ریشه مساوی دارد. مجموع مقادیر a کدام است؟
 ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)
- ۷۳.** به ازای کدام مقدار m در معادله $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$ اختلاف ریشه‌ها برابر صفر است؟
 ۳، ۲ (۱) -۴، ۳ (۲) -۳، ۲ (۳) -۳، ۴ (۴)
- ۷۴.** معادله درجه دوم $x(2x-5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه مضاعف دارد. مقدار ریشه مضاعف کدام است؟
 - $\frac{5}{2}$ (۱) - $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴)
- ۷۵.** معادله $x^2 + (a+1)x + 36 = 0$ یک ریشه مضاعف دارد. این ریشه کدام می‌تواند باشد؟
 -۴ (۱) -۸ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)
- ۷۶.** معادله $ax^2 + 8x + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد. حدود a کدام است؟
 ۱) $a > 8$ ۲) $a > 16$ ۳) $a < 8$ ۴) $a < 16$
- ۷۷.** اگر $x = m$ ریشه معادله $x^2 - 3mx - 8 + m = 0$ باشد، حاصل ضرب مقادیر m کدام است؟
 ۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (نشدنی)
- ۷۸.** معادله $(x^2 - 4)^2 (x^2 - 6x - 7) = 0$ چند ریشه متمایز دارد؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)
- ۷۹.** مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3) = 12$ کدام است؟
 -۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)

روابط بین ریشه‌های معادله با ضرایب معادله

- ۸۰.** معادله $3x^2 - 6x + m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز x_1 و x_2 است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 ۱) $x_1 x_2 < 1$ ۲) $x_1 x_2 > 1$ ۳) $x_1 x_2 < 3$ ۴) $x_1 x_2 > 3$
- ۸۱.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ باشند، مقدار $\frac{5(x_1 + x_2)}{x_1 x_2}$ کدام است؟
 ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)
- ۸۲.** چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح است؟
 الف) معادله درجه دوم $\frac{7}{17}x^2 + ax - \frac{19}{3} = 0$ فقط در صورتی که $a > 6$ باشد، دو جواب حقیقی متمایز دارد.
 ب) معادله درجه دوم $x(2x-5) = a$ به ازای $a = \frac{5}{4}$ ریشه مضاعف دارد.
 پ) در معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x - 12 = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه $-\frac{5}{4}$ باشد، ریشه مثبت $\frac{3}{4}$ است.
 ت) اگر حاصل ضرب دو ریشه معادله $3x^2 + 7x - 2m + 2 = 0$ برابر ۲- باشد، ریشه بزرگ‌تر $\frac{2}{3}$ است.
 ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)
- ۸۳.** به ازای کدام مقدار k حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $(k+3)x^2 - 7x + k = 0$ برابر $-\frac{1}{3}$ است؟
 -۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)
- ۸۴.** اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله $a(x+1)^2 - x + 1 = 8$ برابر $-\frac{2}{5}$ باشد، مقدار a کدام است؟
 ۱۲ (۱) $\frac{35}{3}$ (۲) ۵ (۳) $\frac{35}{7}$ (۴)

- ۸۵.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + ax + 16 = 0$ باشند و $x_1 + x_2 = 8$ ، $5x_1x_2 = a$ مقدار a کدام است؟
 (۱) -12 (۲) -10 (۳) -8 (۴) -6
- ۸۶.** در معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x - 12 = 0$ مجموع دو ریشه $\frac{5}{3}$ می‌باشد. ریشه مثبت کدام است؟
 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6
- ۸۷.** در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه مثبت کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{4}{3}$
- ۸۸.** در معادله درجه دوم $3x^2 + 7x - 2m + 2 = 0$ ، حاصل ضرب دو ریشه -2 می‌باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) 1 (۴) 2
- ۸۹.** در معادله درجه دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر 5 باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟
 (۱) $2/5$ (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5
- ۹۰.** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (\alpha - 3)x + 4\beta = 0$ باشند، مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟
 (۱) -1 (۲) 1 (۳) 2 (۴) -2
- ۹۱.** ریشه‌های کدام معادله معکوس یکدیگرند؟
 (۱) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۲) $2x^2 - 8x - 2 = 0$ (۳) $x^2 + 3x - 10 = 0$ (۴) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
- ۹۲.** به ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟
 (۱) $-1/5$ (۲) $1/5$ (۳) 2 (۴) 3
- ۹۳.** اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 - x + m = 0$ برابر 3 است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟
 (۱) 2 (۲) -2 (۳) 3 (۴) -3
- ۹۴.** اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 + abx - 3 = 0$ باشند، مبین معادله کدام است؟
 (۱) 21 (۲) -3 (۳) -21 (۴) 3
- ۹۵.** اگر m و n ریشه‌های معادله $x^2 - (m-2)x + n - 4 = 0$ باشند، مقدار mn کدام است؟
 (۱) -4 (۲) -6 (۳) 4 (۴) 6
- ۹۶.** اگر m و n ریشه‌های معادله $x^2 + (m+2)x + 2n = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$
- ۹۷.** اگر -2 و 6 ریشه‌های معادله $x^2 + (a-b)x + 3a + 4b - 7 = 0$ باشند، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟
 (۱) -2 (۲) -3 (۳) -4 (۴) -6
- ۹۸.** حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 3 = 0$ کدام است؟
 (۱) 4 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 6
- ۹۹.** مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 6
- ۱۰۰.** اگر $x = m$ ریشه معادله $3x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$ باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) 2 (۳) 3 (۴) نشدنی
- ۱۰۱.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3x^2 - 21x - 14 = 0$ باشند، مقدار $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2}$ کدام است؟
 (۱) -6 (۲) 12 (۳) -9 (۴) 18
- ۱۰۲.** در معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ مجموع معکوس ریشه‌ها کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

- ۱۰۳.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ باشند، مقدار $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ کدام است؟
 ۱) ۲۰- ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸
- ۱۰۴.** در معادله $2x^2 + 6x - 7 = 0$ ، مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟
 ۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴
- ۱۰۵.** مجموع مکعبات ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - 5 = 0$ کدام است؟
 ۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸
- ۱۰۶.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 6 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$ کدام است؟
 ۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۶ ۴) -۸
- ۱۰۷.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، مقدار $(x_1 - \frac{2}{x_2})(x_2 + \frac{2}{x_1})$ کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵
- ۱۰۸.** در معادله $x^2 - (m+2)x + 6 = 0$ یک ریشه، ۶ برابر ریشه دیگر است. مقدار مثبت m کدام است؟
 ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲
- ۱۰۹.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - (m^2 - 1) = 0$ باشند و $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 45$ ، مقدار مثبت m کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶
- ۱۱۰.** در معادله $x^2 + (m-4)x + 27 = 0$ یک ریشه مربع ریشه دیگر است. مقدار m کدام است؟
 ۱) -۶ ۲) -۸ ۳) -۱۰ ۴) -۱۲
- ۱۱۱.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + (a+2)x + 4 = 0$ باشند و $x_1^2 x_2 = 8$ ، مقدار a کدام است؟
 ۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۶ ۴) -۶
- ۱۱۲.** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + m - 3 = 0$ باشند، به‌زای کدام مقدار m تساوی $\alpha^3 \beta^2 + \alpha^2 \beta^3 = 7$ برقرار است؟
 ۱) ۴، ۲ ۲) ۱، ۳ ۳) ۲، ۵ ۴) ۱، ۵
- ۱۱۳.** در معادله $x^2 - 3mx + 81 = 0$ ، یک ریشه، سه برابر مربع ریشه دیگر است. مقدار m کدام است؟
 ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲
- ۱۱۴.** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (a-3)x - a = 0$ باشند و $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟
 ۱) -۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱
- ۱۱۵.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3x^2 + ax - 6 = 0$ باشند و $x_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟
 ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶
- ۱۱۶.** در معادله $x^2 - 9x + 3m + 6 = 0$ تفاضل مربعات ریشه‌ها برابر ۲۷ است. مقدار m کدام است؟
 ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶
- ۱۱۷.** اگر $x = a$ یک ریشه معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد، مقدار $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$ کدام است؟
 ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$
- ۱۱۸.** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $2\beta^2 - 5\beta^2 + \alpha^3$ کدام است؟
 ۱) ۱۰۰ ۲) ۹۵ ۳) ۹۰ ۴) ۸۵
- ۱۱۹.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 6x - m + 7 = 0$ باشند و $2x_1 - x_2 = 15$ باشد، مقدار m کدام است؟
 ۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸
- ۱۲۰.** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + 2a = 0$ باشند و $2x_1 + 3x_2 = 19$ باشد، مقدار a کدام است؟
 ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -۳
- ۱۲۱.** اگر رابطه $3\alpha - \beta = 5$ بین ریشه‌های معادله $ax^2 - 3ax + 1 = 0$ برقرار باشند، مقدار a کدام است؟
 ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -۲



پاسخ‌های تشریحی

پایه ۱۰ فصل اول: معادله درجه دوم

۱ ۲

در معادله درجه اول، توان متغیر x همواره برابر یک است. در گزینه‌ها فقط معادله گزینه (۲) این چنین است. در گزینه (۱) x^2 وجود دارد. در گزینه (۳) x درون قدر مطلق است و در گزینه (۴) هم x در مخرج کسر دیده می‌شود.

۲ ۴

ابتدا تک تک معادله‌ها را مرتب می‌کنیم تا ببینیم توان x در کدام معادله برابر یک است.

$$1) \quad 3x(x-1) = x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 - 3x = x^2 + 1$$

با هم سازه نمی‌شوند.

$$2) \quad x(x-2) = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 2x$$

$$3) \quad x + 2x(1-x) = x^2 \Rightarrow x + 2x - 2x^2 = x^2$$

با هم سازه نمی‌شوند.

بنابراین گزینه (۴) پاسخ درست است. به گزینه (۴) دقت کنید:

$$4) \quad (x-1)(x^2+x+1) = x(x^2-2) \Rightarrow x^3 - 1 = x^3 - 2x$$

پس شاره؟

$$\Rightarrow -1 = -2x \Rightarrow -1 = -2x$$

به اتحاد چاق و لاغر توجه کنید:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

بنابراین $(x-1)(x^2+x+1)$ برابر $x^3 - 1$ است. (اگر فکر می‌کنی تشفی‌بخش اتناز سفته یکی یکی ضرب کن)

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$$

۳ ۳

ابتدا جواب معادله $13x - 7 = 8(x+1)$ را به دست می‌آوریم:

$$13x - 7 = 8x + 8 \Rightarrow 13x - 8x = 8 + 7 \Rightarrow 5x = 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{5} = 3$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی، ۱۰ می‌باشد، پس جواب معادله $10 - 3 = 7$ واحد با آن اختلاف دارد.

۳ ۴

جواب معادله را به دست می‌آوریم:

$$4x + 5(8 - 3x) = 13x - 56 \Rightarrow 4x + 40 - 15x = 13x - 56$$

-11x

$$\Rightarrow -11x + 40 = 13x - 56 \Rightarrow 40 + 56 = 13x + 11x$$

$$\Rightarrow 96 = 24x \Rightarrow x = \frac{96}{24} = 4$$

چون $4 = 2^2$ می‌باشد، پس یک عدد مربع کامل است.

۲ ۵

ابتدا جواب معادله $2(1-x) - 3(x+1) = 14$ را به دست می‌آوریم:

$$2 - 2x - 3x - 3 = 14 \Rightarrow -5x - 1 = 14 \Rightarrow -5x = 14 + 1 \Rightarrow -5x = 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{-5} = -3$$

حال جواب معادله $-5x + 1 = 6$ را به دست می‌آوریم:

$$-5x + 1 = 6 \Rightarrow -5x = 6 - 1 \Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{-5} = -1$$

بنابراین اختلاف جواب‌های دو معادله برابر $2 - (-3) = 5$ می‌باشد.

۳ ۶

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم، برای این کار از داخلی‌ترین پرانتز کار را شروع می‌کنیم:

$$5x - (-3x - (2x - (x - 9))) = 0 \Rightarrow 5x - (-3x - (2x - x + 9)) = 0$$

$$\Rightarrow 5x - (-3x - (x + 9)) = 0 \Rightarrow 5x - (-3x - x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 5x - (-4x - 9) = 0 \Rightarrow 5x + 4x + 9 = 0 \Rightarrow 9x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{9} = -1$$

۳ ۷

ابتدا طرفین معادله را در ۶ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر حذف شود:

$$6 \times (-x - 6) + 12x = 6 \times \left(\frac{5}{6}x\right) \Rightarrow -6(x - 6) + 12x = 5x$$

$$\Rightarrow -6x + 36 + 12x = 5x \Rightarrow 6x + 36 = 5x \Rightarrow 36 = 5x - 6x$$

$$\Rightarrow 36 = -x \Rightarrow x = -36$$

قرینه -36 برابر 36 می‌باشد که با توجه به گزینه‌ها بر ۹ بخش پذیر است.

۲ ۸

ابتدا طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم: (۱۲ ک.م.م. مخرج‌هاست و

همون عدد فوبه هست که باعث میشه تمام مخرج‌ها از بین برن)

$$12 \times \left(\frac{1}{4}x - \frac{4}{3}x\right) = 12 \times \left(\frac{1}{6}x - 2\right) \Rightarrow 3 \times \left(x - \frac{4}{3}x\right) = 6x - 24$$

$$\Rightarrow 3x - 4x = 6x - 24 \Rightarrow -x - 6x = -24 \Rightarrow -7x = -24$$

$$\Rightarrow x = \frac{-24}{-7} = \frac{24}{7}$$

۴ ۹

ابتدا طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم (۱۲ ک.م.م. مخرج‌هاست و

همون عدد فوبه هست) تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$12 \times \left(\frac{1-x}{2} - \frac{2-x}{3}\right) = 12 \times \left(\frac{1-x}{4}\right) \Rightarrow 6(1-x) - 4(2-x) = 3(1-x)$$

$$\Rightarrow 6 - 6x - 8 + 4x = 3 - 3x \Rightarrow -2x - 2 = 3 - 3x$$

-2x

$$\Rightarrow -2x + 3x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5$$

حال مجموع ۵ و معکوسش یعنی $\frac{1}{5}$ برابر است با:

$$5 + \frac{1}{5} = \frac{25+1}{5} = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$$

وقتی در گزینه‌ها اعداد به صورت اعشاری داده شده است، بعد از رسیدن به

$\frac{26}{5}$ کافی است صورت و مخرج را در ۲ ضرب کنیم تا در مخرج عدد ۱۰ ظاهر شود و بتوانیم به راحتی آن را به صورت اعشاری بنویسیم:

$$\frac{26 \times 2}{5 \times 2} = \frac{52}{10} = 5\frac{1}{2}$$

پاسخنامه تشریحی |

۱ ۱۵

برای آن که معادله درجه اول جواب نداشته باشد باید x ها از معادله حذف شوند و در نهایت به یک تساوی نادرست برسیم. پس در معادله $3x + 5 = x(7 - a) + 2$ برای آن که x ها حذف شوند، باید در سمت راست تساوی هم $3x$ داشته باشیم. پس:

$$x(7 - a) = 3x \Rightarrow 7 - a = 3 \Rightarrow 7 - 3 = a \Rightarrow a = 4$$

توجه کنید که با $a = 4$ به تساوی $5 = 2$ می‌رسیم که همواره نادرست است.

۳ ۱۶

اولاً باید x ها حذف شوند، ثانیاً به یک تساوی همیشه درست برسیم، پس:

$$3x + 7(5 - 4x) + nx = m \Rightarrow 3x + 35 - 28x + nx = m$$

$$\Rightarrow -25x + nx = m - 35 \Rightarrow n = 25$$

باید حذف شوند.

حال باید تساوی $m - 35 = 0$ همیشه درست باشد، پس $m = 35$ می‌باشد. بنابراین مقدار $m + n$ برابر $35 + 25 = 60$ است.

۳ ۱۷

اگر سن فرزند را x فرض کنیم، سن پدر $4x$ خواهد بود. پنج سال بعد، سن فرزند $x + 5$ و سن پدر $4x + 5$ خواهد بود که سه برابر سن فرزند است:

$$4x + 5 = 3(x + 5) \Rightarrow 4x + 5 = 3x + 15 \Rightarrow 4x - 3x = 15 - 5 \Rightarrow x = 10$$

بنابراین سن فرزند ۱۰ و سن پدر $4 \times 10 = 40$ است و مجموع سن آن‌ها $10 + 40 = 50$ می‌باشد.

۳ ۱۸

فرض می‌کنیم امیر x هزار تومان پول دارد. پس آرش $3x$ هزار تومان و محمد $x + 40$ هزار تومان پول دارند. حال مجموع پول‌ها 840 هزار تومان است. پس:

$$x + (3x) + (x + 40) = 840 \Rightarrow 5x + 40 = 840$$

$$\Rightarrow 5x = 840 - 40 \Rightarrow 5x = 800 \Rightarrow x = \frac{800}{5} = 160$$

بنابراین پول محمد برابر $x + 40 = 160 + 40 = 200$ هزار تومان است.

۴ ۱۹

اگر یکی از اعداد را x فرض کنیم، دیگری $4x$ خواهد بود. چون مجموع آن‌ها 65 است، پس:

$$x + 4x = 65 \Rightarrow 5x = 65 \Rightarrow x = \frac{65}{5} = 13$$

بنابراین دو عدد 13 و $4 \times 13 = 52$ هستند و حاصل ضرب آن‌ها برابر $13 \times 52 = 676$ می‌شود.

به گزینه‌ها نگاه کن. رقم یکان آن‌ها با هم فرق دارد. پس برای ضرب 13×52 کافی است یکان اعداد را در هم ضرب کنیم $3 \times 2 = 6$ ، پس جواب عددی است که رقم یکان آن 6 باشد یعنی گزینه «۴».

۳ ۱۰

ابتدا طرفین معادله را در 6 ضرب می‌کنیم (همون عدد فوبه):

$$6x \left(\frac{4}{3}(x - 6) + \frac{1}{3}(x + 4) \right) = 6 \times 5 \Rightarrow 8(x - 6) + 3(x + 4) = 30 \\ \Rightarrow 8x - 48 + 3x + 12 = 30 \Rightarrow 11x = 30 + 48 - 12 \Rightarrow 11x = 66 \\ \Rightarrow x = \frac{66}{11} = 6$$

۳ ۱۱

طرفین معادله را در k . م. م. مخرج‌ها یعنی 21 ضرب می‌کنیم:

$$21x \left(\frac{11x}{3} + 4 \right) = 21x \left(\frac{12x}{7} - 37 \right) \Rightarrow 77x + 84 = 36x - 21 \times 37 \\ \Rightarrow 77x - 36x = -21 \times 37 - 21 \times 4 \Rightarrow 41x = -21(37 + 4) \\ \Rightarrow 41x = -21 \times 41 \Rightarrow x = \frac{-21 \times 41}{41} = -21$$

۲ ۱۲

ابتدا به جای A و B به ترتیب $2 - 3x$ و $5x - 2$ را قرار می‌دهیم:

$$2A + 3B = 7 \xrightarrow[\begin{matrix} A=2-3x \\ B=5x-2 \end{matrix}]{\begin{matrix} A=2-3x \\ B=5x-2 \end{matrix}} 2(2 - 3x) + 3(5x - 2) = 7$$

$$\Rightarrow 4 - 6x + 15x - 6 = 7 \Rightarrow 9x - 2 = 7 \Rightarrow 9x = 7 + 2 \Rightarrow 9x = 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{9} = 1$$

۲ ۱۳

ابتدا مقادیر b و c را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$b = a + 3 \xrightarrow{a=2x-1} b = 2x - 1 + 3 \Rightarrow b = 2x + 2$$

$$c = 2 - b \xrightarrow{b=2x+2} c = 2 - (2x + 2) = 2 - 2x - 2 = -2x$$

حال مقادیر a ، b و c را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2a - b + c = m \Rightarrow 2(2x - 1) - (2x + 2) + (-2x) = m$$

$$\Rightarrow 4x - 2 - 2x - 2 - 2x = m \Rightarrow -4 = m$$

صفر

برای آن که معادله بی‌شمار جواب داشته باشد، اولاً x ها باید از بین بروند که در این معادله همین اتفاق افتاد، ثانیاً باید بعد از حذف x ها به یک تساوی همواره درست برسیم، یعنی $m = -4$ باید یک تساوی درست باشد، پس $m = -4$ است.

۳ ۱۴

می‌دانیم جواب معادله در معادله صدق می‌کند، پس اگر عدد 2 را به جای x های معادله قرار دهیم، باید به یک تساوی درست برسیم:

$$3(2 - 2) + 4(2 + a) = 28 \Rightarrow 3 \times 0 + 8 + 4a = 28$$

$$\Rightarrow 0 + 8 + 4a = 28 \Rightarrow 4a = 28 - 8 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = \frac{20}{4} = 5$$

۲۴ ۲

فرض می‌کنیم عرض مستطیل x باشد، پس طول آن $3x - 2$ است. وقتی مثلث متساوی الاضلاع را روی طول آن بنا می‌کنیم تا پنج ضلعی حاصل شود شکل حاصل به صورت مقابل است. می‌دانیم در مثلث متساوی الاضلاع طول سه ضلع برابر است. پس:

$$3(3x - 2) + 2x = 16 \Rightarrow 9x - 6 + 2x = 16$$

$$\Rightarrow 11x = 16 + 6 \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{11} = 2$$

بنابراین عرض مستطیل برابر ۲ و طول آن برابر $3(2) - 2 = 4$ می‌باشد و مساحت آن برابر $4 \times 2 = 8$ می‌شود.

۲۵ ۴

با توجه به اندازه‌های روی شکل و فرض صورت سؤال داریم:

$$x^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times x \times 2 \right) + 3 \Rightarrow 4 = \frac{1}{3}x + 3$$

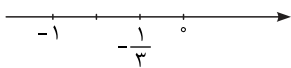
$$\Rightarrow \frac{1}{3}x = 1 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین مساحت دوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} (2 + 5) \times 2 = \frac{1}{2} \times 7 \times 2 = 7$$

۲۶ ۳

به ضرایب معادله دقت کنید. $a + c$ برابر b است ($3 + 1 = 4$) بنابراین یک ریشه معادله -1 و دیگری $-\frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$ است. واضح است که $-\frac{1}{3}$ ریشه بزرگتر معادله است.



در اعداد منفی هر چه به صفر نزدیک‌تر می‌شویم عدد بزرگ‌تر می‌شود.

۲۷ ۲

در معادله $37x^2 - 16x - 21 = 0$ مجموع ضرایب صفر است.

($0 = (-16) + (-21) + (37)$) پس یک ریشه ۱ و ریشه دیگر $\frac{c}{a} = \frac{-21}{37}$ است. بنابراین ریشه مثبت معادله $x = 1$ می‌باشد. حال ریشه‌های معادله $x^2 - 2x = x$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x - x = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

ریشه مثبت $x = 3$ است. پس ریشه مثبت معادله اول $2 = 3 - 1$ واحد از ریشه مثبت معادله دوم کم‌تر است.

۲۸ ۳

به ضرایب معادله دقت کنید، $a = 1$ ، $b = -\sqrt{2} + 1$ و $c = -\sqrt{2}$ است. همان‌طور که می‌بینید $a + c$ برابر b است ($1 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 1$)،

پس یک ریشه -1 و ریشه دیگر $\sqrt{2} = -\frac{c}{a} = \frac{-(-\sqrt{2})}{1}$ است، در نتیجه $x_1^3 + x_2^3$ برابر است با:

$$x_1^3 + x_2^3 = (-1)^3 + (\sqrt{2})^3 = -1 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$$

$$(\sqrt{2})^3 = \underbrace{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}_2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۲۰ ۲

اولین عدد طبیعی را x فرض می‌کنیم، پس ۷ عدد طبیعی متوالی به صورت زیر هستند:

$$x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4, x + 5, x + 6$$

حال گفته شده مجموع چهار عدد ابتدایی با مجموع سه عدد انتهایی برابر است. پس:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = x + 4 + x + 5 + x + 6$$

$$\Rightarrow 4x + 6 = 3x + 15 \Rightarrow 4x - 3x = 15 - 6 \Rightarrow x = 9$$

بنابراین ۷ عدد طبیعی متوالی ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ هستند که مجموع دو عدد بزرگ‌تر برابر $14 + 15 = 29$ است.

۲۱ ۳

فرض می‌کنیم حقوق هر کارمند x میلیون تومان باشد، پس حقوق هر مهندس $3x$ میلیون تومان است. چون حقوق هر مهندس $\frac{2}{3}$ حقوق هر مدیر است، پس حقوق هر مدیر $\frac{3}{2}$ حقوق هر مهندس می‌باشد و برابر $\frac{3}{2} \times 3x = \frac{9}{2}x$ می‌باشد. حال داریم:

$$2 \times \frac{9}{2}x + 3 \times 3x + 7 \times x = 150 \Rightarrow 9x + 9x + 7x = 150$$

$$\Rightarrow 25x = 150 \Rightarrow x = \frac{150}{25} = 6$$

بنابراین حقوق هر مدیر برابر است با:

$$\frac{9}{2}x = \frac{9}{2} \times 6 = 27$$

۲۲ ۲

فرض می‌کنیم طول مسیر x باشد. پس $\frac{1}{3}x$ را با سرعت آرام طی می‌کند. $\frac{1}{4}$ باقی مانده مسیر، یعنی $\frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x)$ که آن را با سرعت بیش‌تر طی می‌کند و در ادامه یک مسیر 5400 متری را طی می‌کند تا ۲۰۰ متر با پایان مسیر فاصله داشته باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x) + \overbrace{5400}^{5400} + 200 = x$$

حال طرفین معادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$12 \times \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(x - \frac{1}{3}x) + 5400 \right) = 12x$$

$$4x + 3(x - \frac{1}{3}x) + 12 \times 5400 = 12x$$

$$\Rightarrow \underbrace{4x + 3x - x}_{6x} + 12 \times 5400 = 12x \Rightarrow 12 \times 5400 = 12x - 6x$$

$$\Rightarrow 12 \times 5400 = 6x \Rightarrow x = \frac{12 \times 5400}{6} = 11200$$

۲۳ ۲

در مستطیل، اضلاع روبه‌رو با هم برابرند، پس:

$$3x - 2 = 2x + 3 \Rightarrow 3x - 2x = 3 + 2 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین طول مستطیل برابر $3(5) - 2 = 13$ می‌باشد. حال از روی مساحت مستطیل، عرض آن را به دست می‌آوریم تا y معلوم شود:

$$13 \times (2x - y) = 91 \xrightarrow{x=5} 13 \times (2(5) - y) = 91$$

$$\Rightarrow 13 \times (10 - y) = 91 \Rightarrow 130 - 13y = 91 \Rightarrow -13y = 91 - 130$$

$$\Rightarrow -13y = -39 \Rightarrow y = \frac{-39}{-13} = 3$$

پاسخنامه تشریحی |

۳۴ ۲

چون معادله $x^2 + (m+6)x - m = 15$ دو ریشه قرینه دارد، پس حتماً ضریب x یعنی b برابر صفر است:

$$m + 6 = 0 \Rightarrow m = -6$$

بنابراین معادله به صورت $x^2 - (-6) = 15$ در می آید و داریم:

$$x^2 + 6 = 15 \Rightarrow x^2 = 15 - 6 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} x = \pm 3$$

پس حاصل ضرب ریشه های معادله برابر $3 \times (-3) = -9$ است.

۳۵ ۱

برای آن که ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ قرینه یکدیگر باشند باید $b = 0$ باشد، پس در معادله $(a^2 - 9)x - 6 = 0$ باید $-(a^2 - 9) = 0$:

$$-(a^2 - 9) = 0 \Rightarrow a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

به ازای $a = -3$ ، معادله درجه دوم نیست، زیرا ضریب x^2 برابر صفر می شود.

اما به ازای $a = 3$ معادله به صورت $6x^2 - 6 = 0$ در می آید که داریم:

$$6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس $a = 3$ قابل قبول است.

۳۶ ۳

ریشه تک تک معادلات را به دست می آوریم:

$$1) x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

$$2) x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \end{cases}$$

$$3) x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$4) x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

همان طور که ملاحظه می کنید معادله $x^2 + x - 12 = 0$ ریشه مشترکی با بقیه معادلات ندارد.

۳۷ ۲

ریشه معادله در معادله صدق می کند، پس:

$$(-3)^2 - (m-1)(-3) + 4m - 27 = 0 \Rightarrow 9 - (-3m+3) + 4m - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 9 + 3m - 3 + 4m - 27 = 0 \Rightarrow 7m - 21 = 0 \Rightarrow 7m = 21 \Rightarrow m = \frac{21}{7} = 3$$

بنابراین معادله به صورت $x^2 - 2x - 15 = 0$ است و ریشه دیگر آن برابر است با:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

می خواهیم معادله $x^2 - 2x - 15 = 0$ را به روش تجزیه حل کنیم. چون می دانیم

یکی از ریشه هایش $x = -3$ می باشد، پس یکی از پرانتزها $(x+3)$ است،

حالاً از خودت بپرس $+3$ در چه عددی ضرب بشه تا -15 تولید بشه. بله در -5 .

پس پرانتز بعدی $(x-5)$ است.

۳۹ ۳

چون یک ریشه معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر -1 است، پس ریشه دیگر آن $-\frac{c}{a}$ می باشد، پس:

$$x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} = -\frac{6b}{5b} = -\frac{6}{5} = -1.2$$

۴۰ ۴

در معادله $4x^2 - x - 3 = 0$ مجموع ضرایب برابر صفر است

$(4 + (-3) + (-1) = 0)$ ، پس یک ریشه آن 1 و دیگری $\frac{c}{a} = \frac{-3}{4}$ است.

حالا باید ببینیم کدام یک x_1 و کدام یک x_2 است، چون $|x_1|$ برابر x_1 شده است، پس حتماً x_1 منفی است. در نتیجه $x_1 = -\frac{3}{4}$ و $x_2 = 1$ است.

بنابراین داریم: $4x_1 + 3x_2 = 4(-\frac{3}{4}) + 3(1) = -3 + 3 = 0$

۳۱ ۱

چون $x = 1$ ریشه معادله است، پس مجموع ضرایب صفر است و در

ضمن ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می باشد. پس:

$$5 + k + (-3) = 0 \Rightarrow k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$$

بنابراین جواب دیگر معادله برابر است با:

$$x = \frac{c}{a} = \frac{k}{5} \xrightarrow{k=-2} x = \frac{-2}{5} = \frac{-4}{10} = -0.4$$

۳۲ ۳

ریشه معادله در معادله صدق می کند. پس $x = -5$ را در معادله جای گذاری می کنیم تا مقدار m معلوم شود:

$$x^2 + (2m-4)x + m - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{x=-5} (-5)^2 + (2m-4)(-5) + m - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 25 - 10m + 20 + m - 9 = 0 \Rightarrow -9m + 36 = 0$$

$$\Rightarrow -9m = -36 \Rightarrow m = \frac{-36}{-9} = 4$$

بنابراین معادله به صورت $x^2 + 4x - 5 = 0$ است و چون $a + c + b = 0$ است

$(1 + (-5) + 4 = 0)$ ، ریشه دیگر آن 1 می باشد. توجه کنید -5 همان $\frac{c}{a}$ است.

۳۳ ۴

ریشه معادله در معادله صدق می کند، پس $x = m$ را در معادله

جای گذاری می کنیم تا مقدار m به دست آید:

$$3x^2 - x + 2mx - 4 = 0 \xrightarrow{x=m} 3m^2 - m + 2m(m) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3m^2 - m + 2m^2 - 4 = 0 \Rightarrow 5m^2 - m - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c+b=0} m = 1, m = -\frac{4}{5}$$

چون $x = m$ ریشه مثبت معادله است، پس $m = 1$ قابل قبول است.

حال باید $m = 1$ را در معادله اولیه جای گذاری کنیم تا ریشه دیگر معلوم

شود. اما چون 1 یک ریشه معادله است پس ریشه دیگر معادله حتماً $\frac{c}{a}$

است. در معادله $3x^2 - x + 2mx - 4 = 0$ مقادیر a و b معلوم هستند،

پس نیازی به جای گذاری $m = 1$ در معادله نداریم:

$$a = 3, c = -4 \Rightarrow x = \frac{c}{a} = \frac{-4}{3}$$

۳۸ ۴

روش اول پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم تا معادله درجه دوم را به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ درآوریم:

(این روش به ذهن همه می‌رسد و کمی طولانی و فسته‌کننده هستش)

$$\begin{aligned} (2x-8)(6+2x) &= (3x-12)(-3x-9) \\ \Rightarrow 12x + 4x^2 - 48 - 16x &= -9x^2 - 27x + 36x + 108 \\ \Rightarrow 4x^2 - 4x - 48 &= -9x^2 + 9x + 108 \\ \Rightarrow 4x^2 + 9x^2 - 4x - 9x - 48 - 108 &= 0 \\ \Rightarrow 13x^2 - 13x - 156 &= 0 \xrightarrow{\div 13} x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \end{aligned}$$

روش دوم در پرانتز $(2x-8)$ از ۲؛ در پرانتز $(6+2x)$ نیز از ۲؛ در پرانتز $(3x-12)$ از ۳ و در نهایت در پرانتز $(-3x-9)$ از -۳ فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 2(x-4) \times 2(x+3) &= 3(x-4) \times (-3) \times (x+3) \\ \Rightarrow 4(x-4)(x+3) &= (-9)(x-4)(x+3) \\ \text{می‌دانیم } 4 \text{ با } -9 \text{ برابر نیست، پس باید ضریب آن‌ها، یعنی } (x-4)(x+3) & \text{ برابر صفر باشد تا تساوی برقرار شود. بنابراین داریم:} \end{aligned}$$

$$(x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

۳۹ ۲

با توجه به فرم معادله بهتر است از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} 4x^2 - (2-x)^2 &= 0 \Rightarrow (2x)^2 - (2-x)^2 = 0 \\ \Rightarrow (2x - (2-x))(2x + (2-x)) &= 0 \\ \Rightarrow (2x - 2 + x)(2x + 2 - x) &= 0 \Rightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

۴۰ ۳

از $(x-1)$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} x^2(x-1) - 4(x-1) &= 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 4) = 0 \\ \text{چون ضرب دو پرانتز صفر شده است، پس تک تک آن‌ها صفر هستند:} \\ \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases} \\ \text{بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر } 1+2+(-2) &= 1 \text{ است.} \end{aligned}$$

۴۱ ۳

از $(x-3)$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} (x+1)^2(x-3) - 4x(x-3) &= 0 \Rightarrow (x-3)((x+1)^2 - 4x) = 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x^2 + 2x + 1 - 4x) &= 0 \Rightarrow (x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

چون ضرب دو پرانتز صفر شده است پس تک تک آن‌ها صفر هستند:

$$\begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ (x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

دقت کنید $x=1$ ریشه مضاعف معادله است. بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $5 = 3 + 1 + 1$ می‌باشد.

۴۲ ۲

معادله را به صورت $(x-2)(4x-5) = -(x-2)$ می‌نویسیم. $x-2$ را از طرفین معادله حذف می‌کنیم اما ریشه آن یعنی $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله است.

$$\begin{aligned} (x-2)(4x-5) &= -(x-2) \xrightarrow{x-2 \Rightarrow x=2} 4x-5 = -1 \Rightarrow 4x = -1+5 \\ \Rightarrow 4x &= 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های معادله‌اند که دو ریشه مثبت هستند.

۴۳ ۲

معادله را به روش دلتا حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac &= (4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \\ \text{بنابراین یک ریشه } -2 + \sqrt{3} \text{ و ریشه دیگر } -2 - \sqrt{3} \text{ است که } -2 - \sqrt{3} & \text{ در گزینه‌ها وجود دارد.} \\ \sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

۴۴ ۲

ابتدا ریشه بزرگ‌تر معادله $x^2 - 8x + 13 = 0$ را با روش دلتا به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta &= (-8)^2 - 4(1)(13) = 64 - 52 = 12 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x &= \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3} \\ \text{بنابراین ریشه بزرگ‌تر معادله } 4 + \sqrt{3} \text{ است. حال ریشه کوچک‌تر معادله } & 2x^2 - 6 = 0 \\ 2x^2 - 6 = 0 & \text{ را به روش ریشه‌گیری به دست می‌آوریم:} \end{aligned}$$

واضح است که $x = -\sqrt{3}$ ریشه کوچک‌تر معادله است، بنابراین مجموع $4 + \sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ برابر $4 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 4$ می‌باشد.

۴۵ ۱

ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ را با روش دلتا به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta &= (-5)^2 - 4(1)(3) = 25 - 12 = 13 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

چون در صورت سؤال گفته شده یکی از ریشه‌ها به صورت $m + \sqrt{n}$

است، پس سعی می‌کنیم $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ را به این صورت در آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{5 + \sqrt{13}}{2} &= \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ \text{بنابراین } m &= \frac{5}{2} \text{ و } n = \frac{13}{4} \text{ است و داریم:} \\ m + n &= \frac{5}{2} + \frac{13}{4} = \frac{10 + 13}{4} = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

۵۰ ۲

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\begin{aligned} ax^2 - (2a+3)x + a + 1 &= 0 \Rightarrow a(3)^2 - (2a+3)(3) + a + 1 = 0 \\ \Rightarrow 9a - (6a+9) + a + 1 &= 0 \Rightarrow 9a - 6a - 9 + a + 1 = 0 \Rightarrow 4a - 8 = 0 \\ \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a &= \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

به ازای $a = 2$ معادله به صورت $2x^2 - 7x + 3 = 0$ می‌شود. به کمک روش دلتا داریم:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &\Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{7 \pm 5}{4} \\ \Rightarrow x_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3, &x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

البته می‌شد معادله $2x^2 - 7x + 3 = 0$ را به روش‌های دیگری هم حل کرد. مثلاً تجزیه کردن:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \\ \xrightarrow{a+c=b} x = 1, x = 6 &\xrightarrow{\text{ریشه های واقعی}} x = \frac{1}{2}, x = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

چون یک ریشه این معادله را می‌دونیم، میشه اینجوری هم حلش کرد. $x = 3$ یک ریشه معادله است، پس حتماً در تجزیه اون $(x-3)$ وجود داره. حالا از خودت می‌پرسی x در چی ضرب بشه و به ما $2x^2$ بده؟ آفرین $2x$ و یک بار هم از خودت می‌پرسی -3 در چی ضرب بشه به ما $+3$ بده. معلومه دیگه -1 . پس:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ \Rightarrow x = 3 \\ 2x - 1 = 0 \\ \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۵۱ ۴

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\Delta n^2 + n(n) - 3 = 0 \Rightarrow \Delta n^2 + n^2 = 3 \Rightarrow 6n^2 = 3$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ n = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

از آن جایی که n منفی است، پس $n = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ قابل قبول است.

حال به ازای $n = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ معادله به صورت $\Delta x^2 - \sqrt{\frac{1}{2}}x - 3 = 0$ می‌شود و به کمک روش دلتا داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4(\Delta)(-3) = \frac{1}{2} + 6 = \frac{1+12}{2} = \frac{13}{2} \\ x &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{13}{2}}}{10} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{10\sqrt{2}} = \frac{12}{10\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{20} \\ \Rightarrow x &= \frac{3\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

توجه کنید نیازی نیست ریشه دیگر را به دست آوریم. آن ریشه حتماً $\sqrt{\frac{1}{2}}$ یا $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ است. اینو میدونی که $11 = \sqrt{121}$

۴۶ ۴

معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ را با روش دلتا حل می‌کنیم تا ریشه کوچک‌تر معادله یعنی x_1 را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &\Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4(1)(-1) = 16 + 4 = 20 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{5} \\ \sqrt{20} &= \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5} \end{aligned}$$

حال x_1^2 را به دست می‌آوریم:

$$x_1^2 = (2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2(2)(\sqrt{5}) + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$$

۴۷ ۲

ابتدا ریشه‌های معادله $12x^2 - 5x - 2 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(12)(-2) = 25 + 96 = 121$$

$$\begin{aligned} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2 \times 12} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 11}{24} \\ \Rightarrow x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}, &x = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

چون $x_1 > x_2$ است، پس $x_1 = \frac{2}{3}$ و $x_2 = -\frac{1}{4}$ می‌باشد و داریم:

$$3x_1 + 4x_2 = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 + (-1) = 1$$

۴۸ ۴

با توجه به این‌که ریشه‌های معادله برابر $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ هستند و از آن جایی که در معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ مقدار a برابر ۱ است، پس $m = -b$ و $n = \Delta$ می‌باشد. نگاه کنید:

$$\frac{m + \sqrt{n}}{2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = -b = -(-5) = 5 \\ n = \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(3) \\ = 25 - 12 = 13 \end{cases}$$

بنابراین $m + n = 5 + 13 = 18$ برابر است.

۴۹ ۲

ابتدا ریشه بزرگ‌تر معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین ریشه بزرگ معادله $1 + \sqrt{3}$ است.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3}$$

حال ریشه کوچک معادله $x^2 - 8x + 13 = 0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(13) = 64 - 52 = 12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$$

واضح است که $4 - \sqrt{3}$ ریشه کوچک‌تر معادله است. پس مجموع ریشه‌های خواسته شده برابر است با:

$$(1 + \sqrt{3}) + (4 - \sqrt{3}) = 5$$

۵۲

ابتدا طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$4x^2 - 32x = 5 \Rightarrow x^2 - 8x = \frac{5}{4}$$

 حال نصف ضریب x را به توان ۲ رسانده و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - 8x + 16 = \frac{5}{4} + 16 \Rightarrow (x - 4)^2 = \frac{5 + 64}{4} \Rightarrow (x - 4)^2 = \frac{69}{4}$$

 بنابراین معادله $(x - 4)^2 = \frac{69}{4}$ حاصل می‌شود.

۵۳

 در واقع برای حل معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ از روش مربع کامل کردن استفاده کرده‌ایم، پس:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \Rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16}$$

 بنابراین $m = \frac{3}{4}$ و $n = \frac{49}{16}$ بوده و داریم:

$$m + n = \frac{3}{4} + \frac{49}{16} = \frac{12 + 49}{16} = \frac{61}{16}$$

۵۴

 چون معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ به معادله $x^2 + mx = n$ تبدیل شده و ما می‌خواهیم معادله حاصل را با روش ریشه‌گیری حل کنیم، در واقع می‌خواهیم معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ را به روش مربع کامل کردن حل کنیم. پس ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. $(x^2 - 3x - \frac{1}{2} = 0)$ سپس آن را به صورت $x^2 - 3x = \frac{1}{2}$ می‌نویسیم. حال باید نصف ضریب x را به توان ۲ رسانده و به طرفین معادله اضافه کنیم. پس عددی که اضافه می‌شود عدد $\frac{9}{4} = (-\frac{3}{2})^2$ است.

۵۵

 کافی است از روش ریشه‌گیری معادله $(2-x)^2 - 2 = 9$ را حل کنیم:

$$((2-x)^2 - 2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} (2-x)^2 - 2 = 3 \Rightarrow (2-x)^2 = 5 \\ (2-x)^2 - 2 = -3 \Rightarrow (2-x)^2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-x)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2-x = \sqrt{5} \Rightarrow 2-\sqrt{5} = x \\ 2-x = -\sqrt{5} \Rightarrow 2+\sqrt{5} = x \end{cases} \\ (2-x)^2 = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$\text{مجموع} = (2-\sqrt{5}) + (2+\sqrt{5}) = 4$$

۵۶

 ابتدا ریشه مثبت معادله $9 = (3x-2)^2 - 9 = 0$ را به دست می‌آوریم. می‌توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم یا می‌توانیم -9 را به طرف دیگر تساوی برده و از روش ریشه‌گیری استفاده کنیم که روش دوم به نظر راحت‌تر است. پس:

$$(3x-2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (3x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 = 3 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ 3x-2 = -3 \Rightarrow \text{نیاز به محاسبه نیست.} \end{cases}$$

 چون ریشه مثبت را می‌خواهیم و $\frac{5}{3}$ مثبت است، پس نیازی به ریشه دیگر نداریم. حال $x = \frac{5}{3}$ ریشه معادله $a = (4x-1)^2$ نیز هست، پس در این معادله هم صدق می‌کند:

$$(4(\frac{5}{3})-1)^2 = a \Rightarrow (\frac{20}{3}-1)^2 = a \Rightarrow (\frac{17}{3})^2 = a$$

$$\Rightarrow (\frac{17}{3})^2 = a \Rightarrow a = \frac{289}{9}$$

۱۲، رو فقط کردی یا نه؟
۵۷

 معادله $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ درجه دوم نیست. اگر آن را به صورت $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ در نظر بگیریم، با فرض $x^2 = t$ به معادله درجه دوم $t^2 + 10t + 9 = 0$ تبدیل می‌شود. حال ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم:

$$t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow (t+1)(t+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+1 = 0 \Rightarrow t = -1 \\ t+9 = 0 \Rightarrow t = -9 \end{cases}$$

 چون هر دو مقدار t منفی شده است، پس هیچ جوابی برای x پیدا نمی‌شود، زیرا x^2 هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

۵۸

 اگر معادله $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ را به صورت $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ در نظر بگیریم با فرض $x^2 = t$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t-4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-4 = 0 \Rightarrow t = 4 \\ t-2 = 0 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

حال داریم:

$$t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

 واضح است که کوچک‌ترین ریشه معادله $x = -2$ است.

۵۹

 معادله $x^4 - 15x^2 + 54 = 0$ درجه دوم نیست، اما اگر آن را به صورت $x^4 - 15x^2 + 54 = 0$ در نظر بگیریم با فرض $x^2 = t$ معادله به صورت $t^2 - 15t + 54 = 0$ می‌شود و داریم:

$$t^2 - 15t + 54 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-6 = 0 \Rightarrow t = 6 \\ t-9 = 0 \Rightarrow t = 9 \end{cases}$$

 حال x^2 را برابرهای به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} t = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \\ t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$3 \times (-3) \times \sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) = 54$$

 می‌توانیم برای به دست آوردن حاصل ضرب ریشه‌های $x^4 - 15x^2 + 54 = 0$ همون تهای به دست آمده را در هم ضرب کنیم...

۶۰

 ابتدا معادله $2(x-3)^4 - x^2 + 6x - 10 = 0$ را به صورت $2(x-3)^4 - (x-3)^2 - 1 = 0$ می‌نویسیم. حال با فرض

$$2(x-3)^4 - (x-3)^2 - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ داریم:}$$

چون $t = (x - 3)^2$ است، داریم:

$$t = 1 \Rightarrow (x - 3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4 \\ x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$t = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x - 3)^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

بنابراین معادله دارای ۲ ریشه است.

چطوری معادله $2(x-3)^4 - x^2 + 6x - 10 = 0$ را به معادله $2(x-3)^4 - (x-3)^2 - 1 = 0$ تبدیل کردیم؟

$$2(x-3)^4 - (x^2 - 6x + 10) = 0 \Rightarrow 2(x-3)^4 - (x^2 - 6x + 9 + 1) = 0 \Rightarrow 2(x-3)^4 - ((x-3)^2 + 1) = 0 \Rightarrow 2(x-3)^4 - (x-3)^2 - 1 = 0$$

۶۱ | ۱

بفرض $t = x - 1$ معادله $x - 1 = t$ معادله $2\sqrt{3}(x-1) = 6$ به صورت $t^2 + 2\sqrt{3}t = 6$ می‌شود. حال در معادله $t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0$ به کمک روش دلتا داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 12 + 24 = 36$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 6}{2} = -\sqrt{3} + 3, t_2 = \frac{-2\sqrt{3} - 6}{2} = -\sqrt{3} - 3$$

حال باید $x - 1$ را برابر t های به دست آمده قرار دهیم تا x معلوم شود:

$$t = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x - 1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} + 3 + 1 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{3}$$

$$t = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x - 1 = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} - 3 + 1 \Rightarrow x = -2 - \sqrt{3}$$

واضح است که بزرگ‌ترین جواب معادله برابر $4 - \sqrt{3}$ است.

۶۲ | ۲

اگر معادله $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ را به صورت $(x^2)^2 - 29x^2 + 100 = 0$ در نظر بگیریم، با فرض $t = x^2$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2 - 29t + 100 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t - 25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4 \\ t - 25 = 0 \Rightarrow x = 25 \end{cases}$$

حال ریشه‌های معادله $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$t = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

بنابراین ریشه‌های مثبت معادله ۲ و ۵ هستند که مجموع آن‌ها برابر $2 + 5 = 7$ است.

۶۳ | ۴

معادله $(x^2 - 1)^2 - 2x^2 + 3 = 0$ درجه دوم نیست، اما با فرض $t = x^2 - 1$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود. فقط باید حواسمان باشد که به جای x^2 مقدار $t + 1$ را قرار دهیم:

$$(x^2 - 1 = t \Rightarrow x^2 = t + 1)$$

$$t^2 - 2(t + 1) + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 2 + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

موافقید که $t^2 - 2t + 1$ را می‌توان به صورت $(t - 1)^2$ نوشت. پس:

$$(t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

بنابراین داریم:

$$x^2 - 1 = t \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

پس حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ است.

۶۴ | ۳

عبارت $x - 2$ در معادله $(x - 2)^2 - 5(x - 2) + 6 = 0$ تکرار شده است. با فرض $t = x - 2$ داریم:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \\ t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله و در نتیجه مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} t = 2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4 \\ t = 3 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 3 + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 4 + 5 = 9$$

۶۵ | ۱

اگر معادله $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ را به صورت $(x^2)^2 - 20x^2 + 64 = 0$ در نظر بگیریم، با فرض $t = x^2$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود. واضح است بعد از به دست آوردن t ها باید آن‌ها را برابر x^2 قرار دهیم و هر یک از معادلات حاصل در صورت داشتن جواب، به ما دو مقدار قرینه هم می‌دهند. پس مجموع آن‌ها حتماً صفر است. بنابراین معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ در صورتی که جواب داشته باشد، مجموع جواب‌ها حتماً صفر است. در معادله دلتای معادله درجه دوم حاصل، بزرگ‌تر از صفر است، پس حتماً t دو جواب دارد و می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع ریشه‌های معادله حتماً صفر است.

۶۶ | ۳

معادله $(x - 3)^2 + 3 - k = 0$ را به صورت $(x - 3)^2 = k - 3$ می‌نویسیم برای آن‌که معادله دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، باید $k - 3 > 0$ باشد، پس:

$$k - 3 > 0 \Rightarrow k > 3 \Rightarrow k = \text{کم‌ترین مقدار صحیح} = 4$$

۶۷ | ۳

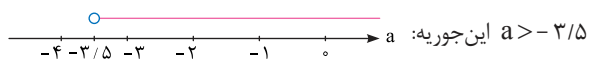
باید دلتای معادله $2x^2 + 6x + 1 - a = 0$ بزرگ‌تر از صفر باشد تا دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 6^2 - 4(2)(1 - a) > 0 \Rightarrow 36 - 8 + 8a > 0$$

$$\Rightarrow 28 + 8a > 0 \Rightarrow 8a > -28 \Rightarrow a > \frac{-28}{8} \Rightarrow a > \frac{-7}{2}$$

$$\Rightarrow a > -3.5$$

بنابراین کم‌ترین مقدار صحیح برای a عدد -3 است.



کوچک‌ترین عدد صحیح کدومه؟ بله -3 هستش.

۶۸ | ۱

چون در معادله $3x^2 + ax - 3 = 0$ ، $a = 3$ و $c = -3$ است و این دو مختلف‌العلامت هستند، پس حتماً $\Delta > 0$ است و معادله دو جواب حقیقی و متمایز دارد. پس a هر مقداری می‌تواند باشد.

۳ ۶۹

چون گفته شده معادله $x^2 - 4x + a = 0$ دو ریشه حقیقی دارد؛ باید $\Delta \geq 0$ باشد، پس:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(a) \geq 0 \Rightarrow 16 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 16$$

$$\Rightarrow a \leq \frac{16}{4} \Rightarrow a \leq 4$$

بنابراین مقادیر طبیعی a می‌توانند ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، پس ۴ مقدار طبیعی می‌پذیرد.

۲ ۷۰

معادله $x^2 - k = 6$ را به صورت $(x-1)^2 = k+6$ می‌نویسیم. چون معادله ریشه مضاعف دارد، پس باید $k+6=0$ باشد در نتیجه $k = -6$ است. حال به ازای $k = -6$ معادله $x^2 + kx + a + 1 = 0$ به صورت $x^2 - 6x + a + 1 = 0$ می‌شود. برای آن‌که این معادله دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta > 0$ باشد. پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(1)(a+1) > 0 \Rightarrow 36 - 4a - 4 > 0$$

$$\Rightarrow 32 - 4a > 0 \Rightarrow 4a < 32 \Rightarrow a < \frac{32}{4} \Rightarrow a < 8$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار صحیح a برابر ۷ است.

۲ ۷۱

چون معادله $mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$ ریشه مضاعف دارد، پس دلتای معادله حتماً صفر است.

$$\Delta = 0 \Rightarrow \underbrace{(-(m-3))^2}_{(m-3)^2} - 4(m)(1) = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 - 4m = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0 \xrightarrow[1+9+(-9)=0]{a+c+b=0} m = 1, m = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

بنابراین کم‌ترین مقدار m برابر ۱ است.

۴ ۷۲

برای آن‌که معادله $x^2 + (2-a)x - 2a + 1 = 0$ دو ریشه مساوی داشته باشد، باید $\Delta = 0$ باشد، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2-a)^2 - 4(1)(-2a+1) = 0 \Rightarrow (2-a)^2 + 8a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + a^2 - 4a + 8a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow a(a+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a = 0 + (-4) = -4$$

۱ ۷۳

باید دلتای معادله $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$ برابر صفر باشد تا دو ریشه معادله برابر باشند و اختلاف آن‌ها برابر صفر شود. پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4(1)(5m-6) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 20m + 24 = 0 \xrightarrow{+4} m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ m-3=0 \Rightarrow m=3 \end{cases}$$

۳ ۷۴

معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

می‌دانیم در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه مضاعف برابر $x = -\frac{b}{2a}$ است،

پس در معادله $x^2 - 5x - a = 0$ ریشه مضاعف برابر $x = -\left(\frac{-5}{2 \times 2}\right) = \frac{5}{4}$ می‌باشد. در این سؤال لازم نیست $\Delta = 0$ را حل کنیم تا a معلوم شود. برای به دست آوردن ریشه مضاعف به ضرایب x^2 و x نیاز داریم. بنابراین مستقیم ریشه مضاعف را به دست می‌آوریم.

۴ ۷۵

چون معادله ریشه مضاعف دارد پس $\Delta = 0$ است:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a+1)^2 - 4(1)(36) = 0 \Rightarrow (a+1)^2 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 = 144 \Rightarrow a+1 = \pm 12 \Rightarrow \begin{cases} a+1=12 \\ a+1=-12 \end{cases}$$

می‌دانیم ریشه مضاعف معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $-\frac{b}{2a}$ است، پس در معادله $x^2 + (a+1)x + 36 = 0$ داریم:

$$x = -\frac{a+1}{2 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} a+1=12 \Rightarrow x = -\frac{12}{2} = -6 \\ a+1=-12 \Rightarrow x = -\left(\frac{-12}{2}\right) = -(-6) = 6 \end{cases}$$

در گزینه‌ها $x = 6$ وجود دارد.

۲ ۷۶

چون معادله $ax^2 + 8x + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد، باید $\Delta < 0$ باشد، پس:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 8^2 - 4(a)(1) < 0 \Rightarrow 64 - 4a < 0 \Rightarrow 4a > 64 \Rightarrow a > \frac{64}{4} \Rightarrow a > 16$$

۴ ۷۷

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$x^2 - 3mx - 8 + m = 0 \Rightarrow m^2 - 3m(m) - 8 + m = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m^2 - 8 + m = 0 \Rightarrow -2m^2 + m - 8 = 0$$

توجه کنید در معادله $-2m^2 + m - 8 = 0$ دلتا منفی است و معادله ریشه

ندارد. پس $x = m$ نمی‌تواند ریشه معادله $x^2 - 3mx - 8 + m = 0$ باشد.

مقدار Δ را ببینید:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(-2)(-8) = 1 - 64 = -63$$

۳ ۷۸

چون ضرب دو پیرانتز برابر صفر شده است، پس تک تک پیرانتزها صفر هستند.

$$(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)^2 (x^2 - 6x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 6x + 7 = 0 \end{cases}$$

در معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ چون $\Delta > 0$ است، پس حتماً دو ریشه متمایز

دارد که قطعاً ۲ و -۲ نیستند. بنابراین معادله $(x^2 - 4)^2 (x^2 - 6x + 7) = 0$

دارای ۴ ریشه متمایز است.

چطور فهمیدیم $\Delta > 0$ است؟ خیلی راحت، Δ را حساب کردیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(7) = 36 - 28 = 8$$

از کجا فهمیدیم ۲ و -۲ ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ نیستند؟

۲ و -۲ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. تساوی برقرار نمی‌شود:

$$(2)^2 - 6(2) + 7 = 0 \Rightarrow 4 - 12 + 7 = 0 \Rightarrow -1 = 0 \quad \times$$

$$(-2)^2 - 6(-2) + 7 = 0 \Rightarrow 4 + 12 + 7 = 0 \Rightarrow 23 = 0 \quad \times$$

حال به ازای $m = 4$ چک می‌کنیم که $\frac{2}{3}$ می‌تواند ریشه معادله باشد. البته با توجه به این که حاصل ضرب ریشه‌ها -2 است، پس ریشه دیگر باید -3 باشد. $x = -3$ را در معادله قرار می‌دهیم که راحت‌تر است:

$$3(9) + 7(-3) - 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

بنابراین گزاره «ت» نیز درست است و این یعنی دو گزاره از گزاره‌های داده شده درست می‌باشد.

۸۳ ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 7x + k = 0$ باشند، در صورت سؤال گفته شده $x_1 x_2 = -\frac{1}{3}$ است، پس:

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{k}{k+3} = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین و سطرین}} 3k = -k - 3 \\ \Rightarrow 2k + k = -3 \Rightarrow 3k = -3 \Rightarrow k = \frac{-3}{3} = -1$$

۸۴ ۳

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$a(x+1)^2 - x + 1 = 8 \Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) - x + 1 - 8 = 0 \\ \Rightarrow ax^2 + 2ax + a - x - 7 = 0 \Rightarrow ax^2 + (2a-1)x + a - 7 = 0 \\ \text{می‌دانیم حاصل ضرب ریشه‌ها برابر } \frac{c}{a} \text{ است، پس:}$$

$$\frac{a-7}{a} = -\frac{2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین و سطرین}} 5a - 35 = -2a \Rightarrow 7a = 35 \Rightarrow a = 5$$

۸۵ ۲

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{16}{1} = 16 \\ x_1 + x_2 = -\frac{a}{1} = -a \end{cases} \text{ در معادله } x^2 + ax + 16 = 0 \text{ داریم:}$$

مقادیر به دست آمده را در تساوی $5x_1 x_2 = 8(x_1 + x_2)$ جای‌گذاری می‌کنیم و داریم:

$$5 \times 16 = 8 \times (-a) \Rightarrow 80 = -8a \Rightarrow a = \frac{80}{-8} = -10$$

۸۶ ۳

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + (m+1)x - 12 = 0$ باشند، طبق گفته سؤال $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$ است، پس:

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{m+1}{1} = \frac{5}{3} \Rightarrow -m-1 = 5 \Rightarrow -m = 5+1 \\ \Rightarrow -m = 6 \Rightarrow m = -6 \Rightarrow m+1 = -6+1 = -5$$

بنابراین معادله به صورت $2x^2 - 5x - 12 = 0$ می‌باشد. به کمک روش دلنا داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)(-12) = 25 + 96 = 121$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} x_1 = \frac{5+11}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

چون سؤال ریشه مثبت را خواسته، لازم نیست ریشه دیگر را محاسبه

$$\text{کنیم، اما ریشه دیگر هم } x_2 = \frac{5-11}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \text{ است.}$$

۷۹ ۲

با فرض $x^2 + x + 2 = t$ داریم:

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 2) = 12 \Rightarrow t(t+1) = 12 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \\ \Rightarrow (t+4)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

حال $x^2 + x + 2$ را برابر t های به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$t = -4 \Rightarrow x^2 + x + 2 = -4 \Rightarrow x^2 + x + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ ریشه ندارد.} \\ t = 3 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S = -\frac{1}{1} = -1$$

بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر -1 است.

۸۰ ۱

چون معادله $3x^2 - 6x + m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است، پس $\Delta > 0$ می‌باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(3)(m) > 0 \Rightarrow 36 - 12m > 0 \\ \Rightarrow 12m < 36 \Rightarrow m < 3$$

از طرفی حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_1 x_2 = \frac{m}{3} \xrightarrow{m < 3} \frac{m}{3} < 1 \Rightarrow x_1 x_2 < 1$$

۸۱ ۲

می‌دانیم $S = x_1 + x_2$ برابر $-\frac{b}{a}$ و $P = x_1 x_2$ برابر $\frac{c}{a}$ است. a, b, c را هم که می‌شناسیم (این دفعه رو می‌گیم: $a = 2, b = 3, c = -5$)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{-5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{5(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{5 \times (-\frac{3}{2})}{-\frac{5}{2}} = \frac{-15}{-\frac{5}{2}} = 3$$

۸۲ ۳

تک تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) چون در معادله داده شده a و c مختلف‌العلامت هستند، پس همواره $\Delta > 0$ بوده و به ازای هر مقدار a دو جواب حقیقی متمایز دارد. بنابراین گزاره «الف» نادرست است.

ب) برای آن که معادله $x(2x - 5) = a$ ریشه مضاعف داشته باشد، باید $\Delta = 0$ شود، پس:

$$2x^2 - 5x - a = 0 \Rightarrow 25 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0 \\ \Rightarrow a = \frac{-25}{8}$$

بنابراین گزاره «ب» نیز نادرست است.

پ) مجموع دو ریشه $-\frac{5}{2}$ است. پس:

$$-\frac{5}{2} = \frac{-(m+1)}{2} \Rightarrow m+1 = 5 \Rightarrow m = 4$$

حال به ازای $m = 4$ چک می‌کنیم که ریشه معادله می‌تواند $\frac{2}{3}$ باشد یا خیر:

$$2\left(\frac{2}{3}\right) + 5\left(\frac{2}{3}\right) - 12 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{10}{3} - 12 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

بنابراین $x = \frac{2}{3}$ در معادله صدق می‌کند، پس گزاره «پ» درست است.

ت) حاصل ضرب دو ریشه -2 است. پس:

$$\frac{-2m+2}{3} = -2 \Rightarrow -2m+2 = -6 \Rightarrow -2m = -8 \Rightarrow m = 4$$

۲ ۸۷

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ باشند، طبق گفته سؤال $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$ است. پس:

$$\frac{1}{6} = -\frac{k+1}{6} \Rightarrow 1 = -k - 1 \Rightarrow 1 + 1 = -k \Rightarrow 2 = -k \Rightarrow k = -2$$

حال به ازای $k = -2$ معادله به صورت $6x^2 - x - 2 = 0$ درمی‌آید. به کمک روش دلتا داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 6} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین ریشه مثبت معادله $\frac{2}{3}$ است.

۱ ۸۸

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x - 2m + 2 = 0$ باشند، طبق گفته سؤال $x_1 x_2 = -2$ است. پس:

$$x_1 x_2 = -2 \Rightarrow \frac{-2m+2}{3} = -2 \Rightarrow -2m+2 = -6 \Rightarrow -2m = -6-2$$

$$\Rightarrow -2m = -8 \Rightarrow m = \frac{-8}{-2} = 4 \Rightarrow -2m+2 = -2(4)+2 = -8+2 = -6$$

بنابراین معادله به صورت $3x^2 + 7x - 6 = 0$ است. حال به کمک روش دلتا ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 7^2 - 4(3)(-6) = 49 + 72 = 121$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \times 3} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-7+11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{-7-11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

بنابراین ریشه بزرگ‌تر معادله برابر $\frac{2}{3}$ است.

۱ ۸۹

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ باشند، طبق گفته سؤال $x_1 x_2 = 5$ است. پس:

$$\Delta = \frac{1-k}{2} \Rightarrow 1-k=10 \Rightarrow 1-10=k \Rightarrow k=-9$$

حال به ازای $k = -9$ معادله به صورت $2x^2 - 9x + 10 = 0$ می‌شود. به کمک روش Δ ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = (-9)^2 - 4(2)(10) = 81 - 80 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{9 \pm 1}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}, x_2 = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین ریشه بزرگ‌تر معادله $2\frac{1}{2}$ است.

۲ ۹۰

می‌دانیم حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{c}{a}$ است، پس:

$$\alpha\beta = \frac{4\beta}{1} \Rightarrow \alpha\beta = 4\beta \Rightarrow \alpha = 4$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها، یعنی $\alpha + \beta$ برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\alpha + \beta = -\left(\frac{-(\alpha-3)}{1}\right) = \alpha - 3 \xrightarrow{\alpha=4} \alpha + \beta = 4 - 3 = 1$$

۴ ۹۱

وقتی دو ریشه معادله معکوس یکدیگر باشند، (یکی α باشد اون یکی $\frac{1}{\alpha}$) آن‌گاه حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۱ می‌شود و این یعنی $\frac{c}{a} = 1$ بوده و $a = c$ است. در گزینه‌ها فقط در معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ، $a = c$ است.

۴ ۹۲

چون ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند، پس $a = c$ است. و داریم:

$$2m + 6 = 2 \Rightarrow 2m = 2 - 6 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{2} = -2$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3m}{2} \xrightarrow{m=-2} x_1 + x_2 = -\left(\frac{-6}{2}\right) = -(-3) = 3$$

۲ ۹۳

می‌دانیم اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ است، پس:

$$|x_1 - x_2| = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{1} = 3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow \Delta = 9$$

از طرفی $\Delta = b^2 - 4ac$ است، پس:

$$9 = (-1)^2 - 4(1)(m) \Rightarrow 9 = 1 - 4m \Rightarrow 9 - 1 = -4m$$

$$\Rightarrow -4m = 8 \Rightarrow m = \frac{8}{-4} = -2$$

حال حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ را به دست می‌آوریم که برابر $\frac{m}{1} = \frac{-2}{1} = -2$ می‌باشد.

۱ ۹۴

چون a و b ریشه‌های معادله‌اند، پس ضرب آن‌ها برابر $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{-3}{1} = -3$ است. حال در معادله به جای ab عدد -3 را قرار می‌دهیم. معادله به صورت $x^2 - 3x - 3 = 0$ می‌شود. مبین معادله همان Δ است، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(-3) = 9 + 12 = 21$$

۲ ۹۵

می‌دانیم مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$m + n = -\frac{-(m-2)}{1} \Rightarrow m + n = m - 2 \Rightarrow n = -2$$

از طرفی حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ می‌باشد، پس:

$$mn = \frac{n-4}{1} \Rightarrow mn = n - 4 \xrightarrow{n=-2} mn = -2 - 4 \Rightarrow mn = -6$$

پاسخنامه تشریحی |

۹۹ ۲

معادله $x^2 - x = t$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود: اما با فرض $x^2 - x = t$

$$t^2 - 14t + 24 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-2=0 \Rightarrow t=2 \\ t-12=0 \Rightarrow t=12 \end{cases}$$

حال $x^2 - x$ را برابر t ‌های به دست آمده قرار می‌دهیم تا ریشه‌های معادله اصلی معلوم شوند:

$$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{-1}{1} = 1$$

بنابراین مجموع همه ریشه‌های معادله برابر $1+1=2$ است.

۱۰۰ ۴

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$3x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0 \Rightarrow 3m^2 - 4m(m) + 2m - 3 = 0 \\ \Rightarrow 3m^2 - 4m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow -m^2 + 2m - 3 = 0$$

چون مجموع مقادیر m را می‌خواهیم ممکن است بگوییم مجموع ریشه‌های معادله $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$m \text{ مجموع مقادیر } = -\frac{2}{-1} = -(-2) = 2$$

درحالی‌که اگر دقت کنید در معادله $-m^2 + 2m - 3 = 0$ ، دلتا منفی است و معادله ریشه حقیقی ندارد، پس $x = m$ نمی‌تواند ریشه معادله $3x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$ باشد.

۱۰۱ ۳

ابتدا به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} = \frac{6x_2 + 6x_1}{x_1x_2} = \frac{6(x_1 + x_2)}{x_1x_2}$$

حال در معادله $3x^2 - 21x - 14 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\left(\frac{-21}{3}\right) = 7 \\ x_1x_2 = \frac{-14}{3} \end{cases} \quad \text{بنابراین مقدار } \frac{6(x_1 + x_2)}{x_1x_2} \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} = \frac{6(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{6 \times 7}{\frac{-14}{3}} = \frac{42 \times 3}{-14} = -9$$

۱۰۲ ۳

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ باشند، مجموع

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} \quad \text{پس، معکوس ریشه‌ها } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ است، پس:}$$

در معادله $x^2 + 4x - 3 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{1} = -4 \\ x_1x_2 = \frac{-3}{1} = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

۹۶ ۴

می‌دانیم در معادله درجه دوم مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب

ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، پس در معادله $x^2 + (m+2)x + 2n = 0$ که m و n ریشه‌های آن هستند، داریم:

$$mn = \frac{2n}{1} \Rightarrow mn = 2n \Rightarrow m = 2$$

$$m + n = -\frac{m+2}{1} \xrightarrow{m=2} 2+n = -\frac{2+2}{1}$$

$$\Rightarrow 2+n = -4 \Rightarrow n = -4-2 \Rightarrow n = -6$$

بنابراین مقدار $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ برابر است با:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{-6} = \frac{-3+1}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

۹۷ ۲

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x_1 + x_2 = -2 + 6 = -\left(\frac{a-b}{1}\right) \Rightarrow 4 = -a + b$$

$$x_1x_2 = -2 \times 6 = \frac{3a + 4b - 7}{1} \Rightarrow -12 = 3a + 4b - 7$$

$$\Rightarrow 3a + 4b = -12 + 7 \Rightarrow 3a + 4b = -5$$

حال از دستگاه $\begin{cases} -a + b = 4 \\ 3a + 4b = -5 \end{cases}$ مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$3 \times \begin{cases} -a + b = 4 \\ 3a + 4b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 12 \\ 3a + 4b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7b = 7 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 3a + 4(1) = -5$$

$$\Rightarrow 3a = -5 - 4 = -9 \Rightarrow a = \frac{-9}{3} = -3 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین $\frac{a}{b} = \frac{-3}{1} = -3$ می‌باشد.

۹۸ ۲

معادله $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 3 = 0$ که درجه دوم نیست. اما اگر

$x^2 + x = t$ باشد به یک معادله درجه دوم بر حسب t تبدیل می‌شود:

$$x^2 + x = t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \xrightarrow{\frac{a+c+b=0}{1+3+(-4)=0}} t = 1, t = 3$$

حال $x^2 + x$ را یک بار برابر ۱ و بار دیگر برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$t = 1 \Rightarrow x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$t = 3 \Rightarrow x^2 + x = 3 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{-3}{1} = -3$$

بنابراین حاصل ضرب همه ریشه‌های معادله $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 3 = 0$ برابر $(-1) \times (-3) = 3$ است.

حواست هست که در هر دو معادله $x^2 + x - 1 = 0$ و $x^2 + x - 3 = 0$ دلتا بزرگ‌تر از صفره، چون a و c مختلف‌العلامت هستند. پس حاصل ضرب ریشه‌هاشون رو از $\frac{c}{a}$ به دست می‌آیم و خیالمون راحت‌تره که دوتا ریشه دارن.

در معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ مقدار $x_1 x_2$ برابر $\frac{4}{1} = 4$ است. پس:

$$x_1 x_2 - \frac{4}{x_1 x_2} = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = 3$$

۱-۸

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - (m+2)x + 6 = 0$ باشند، داریم:

$$x_1 x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

از طرفی در صورت سؤال گفته شده یک ریشه، ۶ برابر ریشه دیگر است، پس $x_1 = 6x_2$ می‌باشد. حال داریم:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 6 \\ x_1 = 6x_2 \end{cases} \Rightarrow 6x_2 \times x_2 = 6 \Rightarrow 6x_2^2 = 6 \Rightarrow x_2^2 = 1 \Rightarrow x_2 = \pm 1$$

اگر $x_2 = 1$ باشد، آن‌گاه در معادله، $a + c + b = 0$ است، پس:

$$1 + 6 + (-m - 2) = 0 \Rightarrow 7 - m - 2 = 0 \Rightarrow 5 - m = 0 \Rightarrow m = 5$$

همین‌جا مقدار مثبت m به دست آمد.

اما اگر $x_2 = -1$ باشد، در معادله، $a + c = b$ است، پس:

$$1 + 6 = -(m + 2) \Rightarrow 7 = -m - 2 \Rightarrow -m = 7 + 2 \Rightarrow -m = 9 \Rightarrow m = -9$$

۱-۹

ابتدا در $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$ از $x_1 x_2$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 45 \Rightarrow \underbrace{x_1 x_2}_{\frac{c}{a}} (x_1 + x_2) = 45$$

$$\Rightarrow \frac{-(m^2 - 1)}{1} \times (-3) = 45 \Rightarrow -(m^2 - 1) \times (-3) = 45$$

$$\Rightarrow (m^2 - 1) = \frac{45}{3} = 15 \Rightarrow m^2 = 15 + 1 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

بنابراین مقدار مثبت m برابر ۴ است.

۱۱۰

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + (m - 4)x + 27 = 0$ باشند، طبق

صورت سؤال $x_1 = x_2^2$ است. از طرفی $x_1 x_2$ برابر $\frac{27}{1} = 27$ است، پس:

$$x_1 x_2 = 27 \xrightarrow{x_1 = x_2^2} x_2^2 \times x_2 = 27 \Rightarrow x_2^3 = 27 = 3^3 \Rightarrow x_2 = 3$$

حال $x = 3$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3^2 + (m - 4)(3) + 27 = 0 \Rightarrow 9 + 3m - 12 + 27 = 0$$

$$\Rightarrow 3m + 24 = 0 \Rightarrow 3m = -24 \Rightarrow m = \frac{-24}{3} = -8$$

۱۱۱

اگر $x_1^2 x_2 = 8$ را به صورت $x_1 \times x_1 x_2 = 8$ بنویسیم، می‌توانیم به جای

$x_1 x_2$ مقدار $\frac{c}{a}$ را قرار دهیم. پس:

$$x^2 + (a + 2)x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{4}{1} = 4$$

$$x_1 \times x_1 x_2 = 8 \xrightarrow{x_1 x_2 = 4} x_1 \times 4 = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{4} = 2$$

می‌دانیم ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$2^2 + (a + 2)(2) + 4 = 0 \Rightarrow 2a + 4 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2a + 12 = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = \frac{-12}{2} = -6$$

۱-۳

ابتدا عبارت $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (3x_1 - 2)(3x_2 - 2) &= 9x_1 x_2 - 6x_1 - 6x_2 + 4 \\ &= 9x_1 x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 \end{aligned}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-2}{1} = -2 \quad \text{حال در معادله } x^2 - x - 2 = 0 \text{ داریم:}$$

$$x_1 + x_2 = -\left(\frac{-1}{1}\right) = -(-1) = 1$$

بنابراین مقدار $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} (3x_1 - 2)(3x_2 - 2) &= 9x_1 x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 \\ &= (9 \times -2) - (6 \times 1) + 4 = -18 - 6 + 4 = -20 \end{aligned}$$

۱-۴

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باشند، مجموع مربعات

ریشه‌ها $x_1^2 + x_2^2$ است، چون: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ و از طرفی

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{2} = -3 \quad \text{و} \quad x_1 x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (-3)^2 - 2\left(-\frac{7}{2}\right) = 9 + 7 = 16$$

۱-۵

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $3x^2 - 6x - 5 = 0$ باشند، مجموع

مکعبات ریشه‌ها برابر $x_1^3 + x_2^3$ است. پس:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

حال در معادله $x_1 + x_2$ و $x_1 x_2$ برابرند با:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\left(\frac{-6}{3}\right) = -(-2) = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $x_1^3 + x_2^3$ برابر است با:

$$x_1^3 + x_2^3 = (2)^3 - 3\left(\frac{-5}{3}\right)(2) = 8 + 10 = 18$$

۱-۶

ابتدا عبارت $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_2 + 1 + x_1 + 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1}$$

حال $x_1 + x_2$ و $x_1 x_2$ را در معادله $x^2 - 4x - 6 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\left(\frac{-4}{1}\right) = 4 \\ x_1 x_2 = \frac{-6}{1} = -6 \end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$ برابر است با:

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{4 + 2}{-6 + 4 + 1} = \frac{6}{-1} = -6$$

۱-۷

ابتدا عبارت $(x_1 - \frac{2}{x_2})(x_2 + \frac{2}{x_1})$ را ساده می‌کنیم:

$$(x_1 - \frac{2}{x_2})(x_2 + \frac{2}{x_1}) = x_1 x_2 + x_1 \times \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} \times x_2 - \frac{4}{x_1 x_2}$$

$$= x_1 x_2 + 2 - 2 - \frac{4}{x_1 x_2} = x_1 x_2 - \frac{4}{x_1 x_2}$$

$$\frac{-2+1}{x_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{x_2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x_2 = -2$$

می‌دانیم ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$3(-2)^2 + a(-2) - 6 = 0 \Rightarrow 12 - 2a - 6 = 0 \Rightarrow -2a + 6 = 0 \\ \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = \frac{-6}{-2} = 3$$

۱۱۶ ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 9x + 3m + 6 = 0$ باشند، تفاضل مربعات ریشه‌ها، یعنی $x_1^2 - x_2^2$ ، بنابراین داریم:

$$x_1^2 - x_2^2 = 27 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 27$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{1} \times \left(-\frac{-9}{1}\right) = \sqrt{\Delta} \times 9 = 27 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \Delta = 9$$

حال داریم:

$$\Delta = 9 \Rightarrow (-9)^2 - 4(1)(3m + 6) = 9 \Rightarrow 81 - 12m - 24 = 9 \\ \Rightarrow 57 - 12m = 9 \Rightarrow 57 - 9 = 12m \Rightarrow 48 = 12m \Rightarrow m = \frac{48}{12} = 4$$

۱۱۷ ۴

ابتدا عبارت $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a-1)}{a(a-1)} = \frac{1}{a(a-1)} = \frac{1}{a^2 - a}$$

از طرفی چون $x = a$ ریشه معادله $x^2 - x - 3 = 0$ است، پس در معادله صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$a^2 - a - 3 = 0 \Rightarrow a^2 - a = 3$$

بنابراین مقدار $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$ برابر است با:

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 - a} = \frac{1}{3}$$

۱۱۸ ۲

کافی است β را در معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ جای‌گذاری کنیم، در این صورت $\beta^2 - 5\beta + 2 = 0$ خواهد بود. پس داریم:

$$\beta^2 - 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 5\beta - 2 \Rightarrow \beta^3 = 5\beta^2 - 2\beta$$

بنابراین عبارت $\alpha^3 + 5\beta^2 - 2\beta$ به رابطه $\alpha^3 + \beta^3$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

حال در معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ داریم:

$$\alpha + \beta = -\left(-\frac{5}{1}\right) = 5, \alpha\beta = \frac{2}{1} = 2$$

بنابراین حاصل $\alpha^3 + 5\beta^2 - 2\beta$ برابر است با:

$$\alpha^3 + 5\beta^2 - 2\beta = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ = 5^3 - 3 \times 2 \times 5 = 125 - 30 = 95$$

۱۱۳ ۱

ابتدا در عبارت $\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = 7$ از $\alpha^2\beta^2$ فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = 7 \Rightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) = 7 \Rightarrow (\alpha\beta)^2(\alpha + \beta) = 7$$

در معادله $x^2 - 7x + m - 3 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\left(-\frac{7}{1}\right) = -(-7) = 7 \\ \alpha\beta = \frac{m-3}{1} = m-3 \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده در رابطه $(\alpha\beta)^2(\alpha + \beta) = 7$ داریم:

$$(m-3)^2 \times 7 = 7 \Rightarrow (m-3)^2 = \frac{7}{7} = 1 \Rightarrow m-3 = \pm 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} m-3 = 1 \Rightarrow m = 1+3 \Rightarrow m = 4 \\ m-3 = -1 \Rightarrow m = -1+3 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

۱۱۳ ۳

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 81 = 0$ باشند، طبق صورت

سؤال $x_1 = 3x_2$ است. از طرفی x_1x_2 برابر ۸۱ می‌باشد، پس:

$$x_1x_2 = 81 \xrightarrow{x_1=3x_2} 3x_2^2 \times x_2 = 81$$

$$\Rightarrow 3x_2^3 = 81 \Rightarrow x_2^3 = \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow x_2^3 = 3^3 \Rightarrow x_2 = 3$$

حال با قرار دادن $x = 3$ در معادله داریم:

$$3^2 - 3m(3) + 81 = 0 \Rightarrow 9 - 9m + 81 = 0$$

$$\Rightarrow 90 - 9m = 0 \Rightarrow 9m = 90 \Rightarrow m = \frac{90}{9} = 10$$

۱۱۴ ۴

می‌دانیم $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است، پس در معادله $x^2 - (a-3)x - a = 0$

داریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \Delta = 8$$

حال داریم:

$$\Delta = 8 \Rightarrow (-(a-3))^2 - 4(1)(-a) = 8$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 + 4a = 8 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

۱۱۵ ۱

از تساوی $x_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x_1x_2 + 1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم در معادله $3x^2 + ax - 6 = 0$ مقدار x_1x_2 برابر $\frac{c}{a}$ است،

پس $x_1x_2 = \frac{-6}{3} = -2$ می‌شود. حال با قرار دادن مقدار به دست

$$\text{آمده در تساوی } \frac{x_1x_2 + 1}{x_2} = \frac{1}{2} \text{ داریم:}$$