

مقدمه ناشر

← PHOTO



Ensaniha

FOLLOW



لیدیز اند جنتلمن!

«آخر ریاضی خواندن از چه
روست و به چه کار ما طالبان
انسانی آید؟!»



Liked by sina and 225971 others



kheili sabz

View all 752065 comments

11 MINUTES AGO

دوست عزیز لایک لزن!

چند تا دلیل بگم!

۱- کنگور آقا کنگور! توو کنگور تون ریاضی دارید باید در صدشو خوب بزیندا!

۲- بالاخره هفتون باید یکم حساب کتاب بلد باشید توو زندگیتون. به کار تون میاد مثلا محاسبه ای اینکه اگر درصد سود وامو از اکسیریم نمودار نزولی درآمدتون کم کنید می تونید تابع چند مجهولس اجاره خونه و قسط و قرض و کلاس کنگور فرزند دلیند توئسو حل کنید یا مجبورید از بهانه های قبلی مشتق بگیریید و مشتقات بهانه رو بین سایخونه و بانک و سوپری سر کوچه به تساوی تقسیم کنید!

۳- جدای از شوخی. ذهنی که با روش های علم ریاضی تربیت شده منطقی تر و تحلیلی تره. توو سنجش مسایل اطرافش. اجزای پدیده ها رو بهنر تفکیک می کنه. روابطشونو درست تر می سنجه. و تصمیمای درست تری می گیره.

۴. وقتی به زندگی دانشمندی بزرگ نگاه می کنی. می بینی خلیانسون آدمای تک بعدی ای نبودن. از این سینای فیلسوف و پزشک. خیام شاعر و ریاضیدان و منجم... تا پروفیسور حسایی فیزیکدان عاشق ادبیات و اینشتین فیزیکدان و یالون نواز... البته که همیشه همه ای علومو تخصصی دنبال کرد اما می تونیم با کمک گرفتن از هر علمی. به بخش از وجودمونو پرورش بدیم.

ما آدما همه و همه دنبال شناخت و معرفت هستیم! شناخت خودمون و شناخت جهان و برای این شناخت کلی ابزار و وسیله لازم داریم. یکی از ابزارهای شناختن جهان الان توو دستای تونه. ریاضی دریابش.

در انتها به تشکر هم بکنیم از مؤلفای عزیز کتاب. دوستان محترم واحد تولید. مسئول پروژه کتاب خاتم مرادی و همه دوستان دیکهای که برای چاپ این کتاب زحمت کشیدن.



تقدیم به پدرم که یادش همیشه باهامه
تقدیم به دوست و همکار عزیزم، معلم فرهیخته امیر فرمانی
که دیگر در بین ما نیست ...
علی شهبازی
امیر زراندوز

مقدمهٔ مولف

سلام به همهٔ دوستان می‌گن اگر خودتون رو برای آینده آماده نکنید، به زودی می‌فهمید که متعلق به گذشته هستید! ما هم تصمیم گرفتیم خودمان را به روز کنیم و این به‌روز کردن را ادامه خواهیم داد! کتاب جدید با کتاب قبلی مان کلی تفاوت خوب دارد.

توضیحات ساختار کتاب

کتابی که می‌بینید ۳ تا فصل دارد. در ابتدای هر فصل درس‌نامه‌های آن را آوردیم. البته با تیتروهای مهم و مرتبط با کتاب درسی، فصل‌ها را به چند درس تقسیم کردیم. بعد تست‌های آن فصل را می‌بینید. تست‌ها را آن قدر با دقت چیدیم که ببینید کیف می‌کنید! تست‌ها هم مثل درس‌نامه، تیترو دارند. در انتهای کتاب، پاسخ‌نامهٔ تشریحی کل تست‌های کتاب را آورده‌ایم. اگر کتاب‌های ریاضی انسانی دهم و یازدهم ما را خوانده باشید، می‌دانید پاسخ تشریحی ما، چه قدر تشریحی است!

جزئیات درس‌نامه، تست‌ها و پاسخ‌نامه

۱- درس‌نامه

- هر موضوعی را به طور کامل توضیح دادیم. هر جا که می‌شد، روش حل را «مرحله به مرحله» و «در قالب یک مثال» توضیح دادیم. بعد از مثال حتماً تست آموزشی در درس‌نامه آورده‌ایم. بعضی وقت‌ها با توجه به اهمیت مطلب، تعداد این تست‌های آموزشی ۳ یا ۴ تا هم شده است.
- فرمول‌ها، نکات، تذکرها همگی داخل کادر مخصوص هستند.
- بعضی جاها که مطالب زیاد بود، آخر کار، کل داستان را در کادر «جمع‌بندی» برایتان آورده‌ایم.
- حتماً درس‌نامه را بخوانید و بعد سراغ حل تست‌ها بروید.

۲- تست‌ها

- واقعاً خوب شدن! تعریف الکی نمی‌کنیم!
- تیترو تست‌ها به همان ترتیب تیترو درس‌نامه‌ها است.
 - چینش سؤالات از آسان به سخت رعایت شده.
 - پیشنهاد ما این است که تمام تست‌ها را حل کنید ولی اگر زمانی سراغ تست‌ها رفتید که وقت کمی داشتید، تست‌های آبی‌رنگ را حل کنید.
 - سؤالاتی که سخت‌تر هستند با علامت (E) مشخص کرده‌ایم. اگر دنبال درصد بالا هستید، نباید از آن‌ها رد شوید.
 - «شبییه‌ساز تمرینات کتاب درسی»، «سؤالات کنکورهای سراسری» و کلی «تست تألیفی استاندارد» برایتان آورده‌ایم که پوشش نسبتاً کاملی روی تیپ سؤال‌های مهم دارند.

هر چند تو ریاضی، اگر ۱۰ میلیون سؤال از به بیفت مهم حل کنی، ممکنه سؤال بصری، ایده‌اش کاملاً بپرید باشه!

۳- پاسخ‌ها

- فارسی‌نویسی در پاسخ‌ها به طور کامل انجام شده.
- هر جایی که احساس کردیم ابهامی در ذهن‌تان به وجود می‌آورد را توضیح داده‌ایم.
- یک سری نکات را در پاسخ‌ها تکرار کرده‌ایم و یک سری نکته جدید هم آورده‌ایم.
- بعضی سؤالات را به ۲ یا ۳ روش حل کرده‌ایم. معمولاً یکی از روش‌ها از بقیه سریع‌تر است که قابل تشخیص است.

تیمی که پشت کتاب بوده

- تشکر از دوستانی که در این مدت کنارمان بودند و دلسوزانه به ما کمک کردند:
- دکتر ابودر نصری و کمیل نصیری مدیران خوش‌فکر و خفن انتشارات
 - آقای سعید احمدپور که تغییرات خوب کتاب را مدیون سخت‌گیری‌های ایشان هستیم؛ مرسی از شما.
 - خانم لولوا مرادی عزیز که همیشه با روی باز و با انرژی پیگیر کارهای کتاب بودن.
 - خانم‌ها نرجس تیمناک، زهرا جالینوسی، هتا مرادی و آقایان محسن فراهانی، پیام ابراهیم‌نژاد، سپهر متولی، محمدرضا حسین‌زاده، سجاد شهبازی فراهانی، ایوب نعمایی و مهرداد اسپیدکار که زحمت ویراستاری این کتاب را کشیدند. آقای فراهانی، تشکر ویژه که در روزهای شلوغ کاریتون، کار ما رو رها نکردین.
 - تشکر بسیار ویژه از دوستان تولید
 - تشکر از دوستان عزیزم در خیلی‌سبز؛ ایمان سلیمان‌زاده، رسول محسنی‌منش، کوشا نشتایی و نوید شاهی
 - تشکر ویژه از یه دوست خوب
 - در آخر تشکر ویژه از مادرم که هیچ وقت نیستیم!

حرف آخر

به نظرم هر آن‌چه از ریاضی انسانی برای کنکورتان نیاز داشتید را در این کتاب آورده‌ایم ولی اگر جایی نقصی می‌بینید آن را از طریق سایت خیلی‌سبز با ما در میان بگذارید. ممنون از شما

www.kheilisabz.com

۲۲ تیر ۱۴۰۱

فهرست

تست

درس‌نامه

۴۰

۸

درس ۱: شمارش

۴۹

۲۱

درس ۲: احتمال

۵۹

۳۶

درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

فصل اول

آنالیز ترکیبی و احتمال

۷۹

۶۲

درس ۱: مدل‌سازی و دنباله

۸۴

۷۰

درس ۲: دنباله حسابی

فصل دوم

الگوهای خطی

۱۱۷

۹۴

درس ۱: دنباله هندسی

۱۲۶

۱۰۲

درس ۲: توان‌های گویا

۱۳۰

۱۱۰

درس ۳: تابع نمایی

فصل سوم

الگوهای غیرخطی

۱۳۴

پاسخ‌نامه تشریحی

۲۱۵

پاسخ‌نامه کلیدی

درس اول شمارش



اصل جمع و اصل ضرب

سالاد سزار	سالاد
سالاد سبز	
چای	نوشیدنی گرم
قهوه	
هات چاکلت	

فرض کنید علی به یک کافه رفته که منوی سالاد و نوشیدنی گرم آن به صورت مقابل است: دو حالت زیر را با دقت بخوانید و حواستان به کلمات «یا» و «و» در آن‌ها باشد.

- ← (۱) سالاد سزار
- ← (۲) سالاد سبز
- ← (۳) چای
- ← (۴) قهوه
- ← (۵) هات چاکلت

①

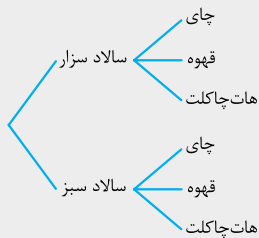
علی می‌خواهد «یک سالاد» یا «یک نوشیدنی گرم» بخورد. در این حالت، علی ۵ انتخاب دارد

دو انتخاب اول مربوط به سالادها و ۳ انتخاب بعدی مربوط به نوشیدنی‌ها بود. یعنی او به $2 + 3 = 5$ حالت می‌تواند انتخاب کند.

②

علی می‌خواهد «یک سالاد» و «یک نوشیدنی گرم» بخورد.

در این حالت علی باید هم از منوی سالاد انتخاب کند و هم از منوی نوشیدنی گرم. علی می‌تواند «سالاد سزار» را با هر یک از نوشیدنی‌های «چای، قهوه و هات چاکلت» انتخاب کند. همین‌طور می‌تواند «سالاد سبز» را با هر یک از نوشیدنی‌های «چای، قهوه و هات چاکلت» انتخاب کند. پس برای هر سالاد، ۳ انتخاب متمایز از نوشیدنی‌ها دارد؛ یعنی به $2 \times 3 = 6$ حالت می‌تواند یک سالاد و یک نوشیدنی انتخاب کند:



در این درس می‌خواهیم بشماریم ولی نه با دست و دونه‌دونه! می‌خواهیم از راه میان‌بر تعداد حالت‌های انجام یک کار را بشماریم. با توجه به مثال بالا، دو اصل زیر را تعریف می‌کنیم:

• **۱. اصل جمع** • اگر بتوان کاری را به m روش (انتخاب یک سالاد به دو روش یا دو حالت) و کار دیگری را به n روش (انتخاب یک نوشیدنی به ۳ روش یا ۳ حالت) انجام داد و این دو کار را نتوان با هم انجام داد (علی می‌خواهد یک سالاد یا یک نوشیدنی بخورد)، در این صورت به $m + n$ روش می‌توان کار اول یا کار دوم را انجام داد.

• **۲. اصل ضرب** • اگر کاری طی دو مرحله انجام شود، به طوری که مرحله اول به m روش و مرحله دوم به n روش انجام‌پذیر باشد (مثل انتخاب سالاد به ۲ روش و انتخاب نوشیدنی به ۳ روش)، کل آن کار به $m \times n$ روش قابل انجام است.

تذکره ۱

هر دو اصل بالا، قابل تعمیم به تعداد بیشتر از ۲ هستند؛ مثلاً اگر کاری در ۳ مرحله انجام شود به طوری که مرحله اول به m روش و مرحله دوم به n روش و مرحله سوم به k روش انجام‌پذیر باشد، در کل، آن کار به $m \times n \times k$ روش قابل انجام است.

تذکره ۲

اگر بین جملات از «یا» استفاده کردید، سراغ اصل جمع و اگر از «و» استفاده کردید، سراغ اصل ضرب بروید.

آزمون

از شهر یزد به شهر کاشان ۳ مسیر و از شهر کاشان به تهران ۴ مسیر وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از یزد به تهران برویم؟



۹ (۲)

۷ (۱)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

پاسخ | یک بار کاری که قرار است دهیم را می‌نویسیم:

«از یزد به کاشان برویم و از کاشان به تهران برویم.»

مرحله اول ضرب مرحله دوم

$$۱۲ = \frac{۳}{\text{یزد به کاشان}} \times \frac{۴}{\text{کاشان به تهران}} = \text{تعداد کل حالات}$$

این یعنی با یک کار دو مرحله‌ای روبه‌رو هستیم و باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

تست ۱ | یک معلم برای تدریس کلاس‌های آنلاین می‌خواهد از بین ۴ مدل لپ‌تاپ، ۲ مدل surface و ۵ مدل تبلت، یک وسیله را بخرد. این معلم به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱۱ (۱) ۴۰ (۲) ۱۳ (۳) ۲۸ (۴)

پاسخ ۱ | یک بار کاری که این معلم می‌خواهد انجام دهد را می‌نویسیم:
«او می‌خواهد یک لپ‌تاپ یا یک surface یا یک تبلت بخرد.»

جمع جمع

چون این کارها را نمی‌توان با هم انجام داد، پس با اصل جمع روبه‌رو هستیم:

$$\begin{array}{c} \text{تبلت} \quad \text{لپ‌تاپ} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{تعداد کل حالات} = 4 + 2 + 5 = 11 \\ \downarrow \\ \text{surface} \end{array}$$

تعداد و تنوع سوالات «اصل ضرب» نسبت به «اصل جمع» خیلی بیشتر است. در ادامه روی اصل ضرب بحث می‌کنیم.

روش حل سوالات اصل ضرب

- ۱) ابتدا به تعداد مراحل کار، خانه خالی قرار می‌دهیم و بین آن‌ها علامت ضرب می‌گذاریم.
 - ۲) از خانه‌ای شروع به پرکردن می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارد. (منظور از محدودیت رو تو مثال‌های بعدی براتون توضیح میدم).
 - ۳) سپس بقیه خانه‌ها را پر می‌کنیم.
 - ۴) اعداد قرارگرفته در جاهای خالی را ضرب می‌کنیم تا جواب مسئله به دست آید.
- چند مثال با هم حل کنیم:

تست ۱ | در یک آزمون چهارگزینه‌ای که ۱۰ سؤال دارد، اگر پاسخ‌دادن به سؤال‌ها الزامی باشد، چند حالت ممکن برای پاسخ‌نامه داریم؟

۴۰ (۱) ۱۰۲۰ (۲) ۴۱۰ (۳) ۱۰۴ (۴)

پاسخ ۱ | با یک کار ۱۰ مرحله‌ای روبه‌رو هستیم. (هر سؤال، یک مرحله است):

$$\frac{\text{سؤال ۱}}{\text{سؤال ۱}} \times \frac{\text{سؤال ۲}}{\text{سؤال ۲}} \times \frac{\text{سؤال ۳}}{\text{سؤال ۳}} \times \dots \times \frac{\text{سؤال ۱۰}}{\text{سؤال ۱۰}}$$

با هیچ محدودیتی روبه‌رو نیستیم، پس از همان سؤال ۱ شروع به پرکردن می‌کنیم.

$$\frac{4}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{4}{10} = \frac{4 \times 4 \times \dots \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10} = 4^{10}$$

هر سؤال، ۴ حالت دارد (۱ تا ۴)، پس:

تذکره ۱ | اگر پاسخ‌دادن به سؤال‌ها الزامی نبود، هر سؤال ۵ حالت داشت: گزینه (۱)، گزینه (۲)، گزینه (۳)، گزینه (۴) و خالی؛ یعنی جای تمام ۴ها، عدد ۵ قرار می‌گرفت و جواب می‌شد 5^{10} .

نکته | در یک آزمون اگر پاسخ‌دادن به تمام سوالات اجباری باشد، تعداد کل حالات پاسخ‌دادن برابر است با: تعداد سوالات (تعداد گزینه‌ها) و اگر پاسخ‌دادن به سؤال‌ها الزامی نباشد، آن‌گاه تعداد کل حالات پاسخ‌دادن برابر است با: تعداد سوالات (۱ + تعداد گزینه‌ها)

یکی از تیپ‌های مهم سؤال‌های این قسمت، سوالات مربوط به اعداد است. در این سؤال‌ها، حواسمان باید به مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام باشد.

تست ۱ | با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۳ رقمی می‌توانیم بنویسیم؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۸۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲۵ (۴)

پاسخ ۱ | با یک کار ۳ مرحله‌ای روبه‌رو هستیم (نوشتن رقم یکان و دهگان و صدگان).

$$\frac{\text{یکان}}{\text{یکان}} \times \frac{\text{دهگان}}{\text{دهگان}} \times \frac{\text{صدگان}}{\text{صدگان}}$$

از آنجایی که قرار است عدد ۳ رقمی بنویسیم، صدگان صفر نمی‌تواند باشد، پس این خانه محدودیت دارد و باید با آن شروع کنیم. صدگان هر کدام از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد (۴ حالت):

$$\frac{4}{1} \times \frac{\text{دهگان}}{\text{دهگان}} \times \frac{\text{صدگان}}{\text{صدگان}}$$

حالا برای بقیه خانه‌ها (یکان و دهگان) محدودیتی نداریم و هر کدام از ۵ رقم ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توانند در آن‌ها قرار گیرند، پس:

$$\frac{4}{1} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{5}{\text{یکان}} = 100$$

حالا سؤال بالا را با شرط «تکرار ارقام مجاز نیست» حل می‌کنیم:

تست ۱ | با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز می‌توانیم بنویسیم؟

۳۶ (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ ۱ | مشابه تست قبل، با خانه‌ای که محدودیت دارد (یعنی صدگان) شروع می‌کنیم:

$$\frac{4}{1} \times \frac{\text{دهگان}}{\text{دهگان}} \times \frac{\text{صدگان}}{\text{صدگان}}$$

حالا داستان کمی فرق می‌کند. الان حق نداریم رقمی که در صدگان استفاده کردیم را دوباره استفاده کنیم. برای همین یکی از ارقام ۱ تا ۴ که در صدگان استفاده شده را خط می‌زنیم: ۰, ۱, ۲, ۳, ۴

$$\frac{4}{1} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{\text{صدگان}}{\text{صدگان}}$$

پس رقم برای دهگان می‌ماند:

یکی دیگر از این ارقام هم استفاده شده و خط می‌خورد: ۴, ۳, ۲, ۱, ۰

پس ۳ رقم برای یکان می‌ماند:

$$\frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 48$$

$$\frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{یکان}} = 48$$

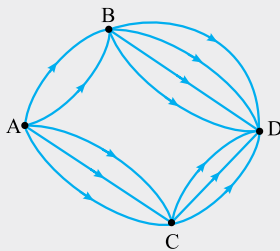
$$\begin{array}{c} 1, 2, 3, 4 \\ \uparrow \\ \frac{4}{\text{صدگان}} \end{array} \times \begin{array}{c} 1, 2, 3, 4 \\ \uparrow \\ \frac{4}{\text{دهگان}} \end{array} \times \begin{array}{c} 1, 2, 3, 4 \\ \uparrow \\ \frac{3}{\text{یکان}} \end{array} = 48$$

اگر بعد از صدگان، یکان را پر می‌کردیم و بعدش دهگان، اشکالی نداشت:

در حل تست‌های آخر فصل، کل این مراحل به شکل مقابل نوشته می‌شود:

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه بعدی رفته‌ایم، یک رقم دلخواه از خانه قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانه دوم از چپ، به دلخواه عدد ۴ را که در خانه اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۴ می‌توانید ۱ یا ۲ یا ۳ را خط بزنید، هیچ فرقی ندارد.

ترکیب اصل ضرب و اصل جمع



فرض کنید نقشه مسیر روبه‌رو را در اختیار داریم:

می‌خواهیم از شهر A به شهر D برویم. چه مسیری وجود دارد؟

جواب: باید از مسیر ABD یا مسیر ACD برویم.

جمله بالا را دقیق‌تر می‌نویسیم:

«باید از A به B و سپس از B به D برویم.» یا «باید از A به C و بعدش از C به D برویم.»

پس دو حالت را جداگانه حساب می‌کنیم و حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

$$\text{حالت اول (ABD): } \frac{2}{\text{B به A}} \times \frac{4}{\text{D به B}} = 8$$

$$\text{حالت دوم (ACD): } \frac{3}{\text{C به A}} \times \frac{3}{\text{D به C}} = 9$$

در نتیجه تعداد کل مسیرها برابر با $8 + 9 = 17$ است.

پس بعضی وقت‌ها مسئله را به چند قسمت تفکیک می‌کنیم؛ تعداد حالت‌های هر قسمت را حساب می‌کنیم و در نهایت آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. چند مثال ببینید:

نکته اگر در سؤالات شمارش، «تعداد اعداد زوج» یا «تعداد مضارب ۵» از ما خواسته شود، مسئله را به دو قسمت «رقم یکان صفر باشد.» و «رقم یکان صفر نباشد.» تفکیک می‌کنیم و تعداد حالت‌های هر قسمت را جداگانه حساب می‌کنیم، بعد آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

تست ۱ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۵، ۷ و ۹ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵، با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۳۲ (۱) ۳۶ (۲) ۴۰ (۳) ۴۲ (۴)

پاسخ ۱ عددی که مضرب ۵ است، یکانش صفر یا ۵ است. طبق نکته بالا، دو حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) یکان صفر باشد: بعد از یکان، صدگان و سپس دهگان را پر می‌کنیم. (البته اگر جای پرکردن صدگان و دهگان را عوض کنیم، اشکالی ندارد.)

(۲) یکان صفر نباشد (۵ باشد): در این جا بعد از پرکردن یکان باید سراغ خانه محدودیت‌دار یعنی صدگان برویم (چون صدگان صفر نمی‌تواند باشد) و بعد سراغ دهگان برویم:

پس تعداد کل حالات برابر است با: $20 + 16 = 36$

تست ۲ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷ چند عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۲، با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۶۰ (۱) ۶۸ (۲) ۷۲ (۳) ۸۰ (۴)

پاسخ ۲ یکان عدد بخش‌پذیر بر ۲، عددی زوج است. ارقام زوجمان این جا ۰، ۲، ۴ و ۶ هستند.

به دو حالت، تقسیم می‌کنیم:

(۱) یکان صفر باشد: اول یکان، بعد صدگان و در آخر دهگان را پر می‌کنیم (البته اگر جای پرکردن دهگان و صدگان را عوض کنیم، اشکالی ندارد).

(در صدگان استفاده شده)

$$\frac{1,2,4,6,7}{5} \times \frac{1,2,4,6,7}{4} \times \frac{0}{1} = 20$$

صدگان دهگان یکان

(۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ یا ۶ باشد): این‌جا باید اول یکان (محدودیت زوج بودن)، بعد صدگان (محدودیت صفر نبودن) و سپس دهگان (بدون محدودیت) را پر کنیم:

(در صدگان استفاده شده) (در یکان استفاده شده)

$$\frac{1,2,4,6,7}{4} \times \frac{0,1,2,4,6,7}{4} \times \frac{2,4,6}{3} = 48$$

صدگان دهگان یکان

پس تعداد کل حالات برابر است با: $20 + 48 = 68$

فاکتوریل

• $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$ •

حاصل ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با $n!$ نشان می‌دهیم و آن را « n فاکتوریل» می‌خوانیم: معمولاً $1!$ تا $6!$ را حفظ می‌کنند:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 1 \times 2 = 2 \\ 3! &= 1 \times 2 \times 3 = 6 \\ 4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \\ 5! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \\ 6! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \end{aligned}$$

نکات

۰! = 1

۱ قرارداد می‌کنیم که «صفر فاکتوریل» برابر «یک» است.

$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \dots$

۲

$14! = 14 \times 13! = 14 \times 13 \times 12! = 14 \times 13 \times 12 \times 11! = \dots$

برای نکته بالا یک مثال هم بزنیم تا بهتر جا بیفتد:

آزمون ۱ | حاصل عبارت $\frac{11! - 10!}{11! + 10!}$ کدام است؟

۱ $\frac{10}{11}$ ۲ $\frac{9}{10}$ ۳ $\frac{9}{11}$ ۴ $\frac{5}{6}$

پاسخ ۴ | جای $11!$ می‌توانیم $10! \times 11$ بنویسیم:

در صورت و مخرج از $10!$ فاکتور می‌گیریم:

آزمون ۲ | حاصل عبارت $\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{n!}$ کدام است؟

۱ $n^2 - 1$ ۲ $n^2 + 1$ ۳ $n^2 + n - 1$ ۴ $n^2 + n + 1$

پاسخ ۲ | دوتا کسر را جداگانه ساده می‌کنیم.

ترتیب اعداد از ۱ تا n را ببینید:

$1, 2, 3, \dots, n-3, n-2, n-1, n$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = (n-1) \times n = n^2 - n$$

n و $n-2$ ، دو شماره با هم فاصله دارند و $n!$ نسبت به $(n-2)!$ دو عدد $n-1$ و n را بیشتر دارد، پس:

$1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n, n+1$

این بار ترتیب اعداد از ۱ تا $n+1$ را ببینید:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$n+1$ و n ، یک شماره با هم فاصله دارند و $(n+1)!$ نسبت به $n!$ ، عدد $n+1$ را بیشتر دارد، پس:

$(n^2 - n) + (n + 1) = n^2 + 1$

پس حاصل کل عبارت برابر است با:

$$\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} + \frac{(n+1) \times n!}{n!} = n(n-1) + n + 1 = n^2 - n + n + 1 = n^2 + 1$$

به عبارت دیگر:

جایگشت

هر یک از راه‌های ممکن قرارگرفتن n شیء متمایز کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا است. برای مثال یکی از راه‌های ممکن برای کنار هم قرارگرفتن ۴ حرف A, B, C و D، به صورت DBAC است که به آن یک جایگشت از آن ۴ حرف می‌گوییم. یک مثال دیگر هم ببینید:

علی، ایمان و کوشا می‌خواهند در یک ردیف شامل ۳ صندلی بنشینند. هر یک از راه‌های قرارگرفتن این ۳ نفر کنار هم را یک جایگشت از این ۳ نفر می‌گوییم.

حالا می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های این ۳ نفر را بشماریم؛ یعنی می‌خواهیم بدانیم این ۳ نفر به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند. این کار شامل ۳ مرحله است:

$$\frac{\text{صندلی سوم}}{\text{صندلی دوم}} \times \frac{\text{صندلی اول}}{\text{صندلی اول}}$$

در مرحله اول باید یکی را در صندلی اول بنشانیم. این کار ۳ حالت دارد (علی یا ایمان یا کوشا):

$$\frac{\text{صندلی سوم}}{\text{صندلی دوم}} \times \frac{\text{صندلی اول}}{\text{صندلی اول}}$$

در مرحله دوم باید یکی از ۲ نفر باقی‌مانده را در صندلی دوم بنشانیم، پس این کار ۲ حالت دارد:

$$\frac{\text{صندلی سوم}}{\text{صندلی دوم}} \times \frac{\text{صندلی اول}}{\text{صندلی اول}}$$

در مرحله سوم باید تنها فرد باقی‌مانده را در صندلی سوم بنشانیم، پس این کار ۱ حالت دارد: $3! = 6$ یک بار این ۶ حالت را ببینید:

$$\frac{\text{صندلی سوم}}{\text{صندلی دوم}} \times \frac{\text{صندلی اول}}{\text{صندلی اول}} = 3! = 6$$

صندلی سوم	صندلی دوم	صندلی اول
کوشا	ایمان	علی
ایمان	کوشا	علی
کوشا	علی	ایمان
علی	کوشا	ایمان
ایمان	علی	کوشا
علی	ایمان	کوشا

تعداد جایگشت ۳ نفر برابر با $3!$ شد، پس به همین روال می‌توانیم نکته پایین را نتیجه بگیریم.

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز کنار هم برابر با $n!$ است.

آزمون ۱ | تعداد جایگشت‌های چند شیء متمایز برابر با 120 است. اگر یک شیء به آن‌ها اضافه شود، تعداد جایگشت‌های آن‌ها چند واحد افزایش می‌یابد؟

(۱) ۴۰۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۷۰۰

پاسخ ۱ | تعداد اشیاى اولیه را n می‌گیریم. تعداد جایگشت این n شیء، $n!$ می‌شود که باید برابر با 120 قرار دهیم: می‌دانیم $5!$ برابر با 120 است، پس $n = 5$.

حالا یک شیء به آن‌ها اضافه می‌کنیم و تعداد اشیا ۶ تا می‌شود. تعداد جایگشت این ۶ شیء برابر است با: پس تعداد جایگشت‌ها در این حالت، $600 = 120 - 720$ تا بیشتر می‌شود.

تذکره ۱

تمام سؤال‌های جایگشت را با اصل ضرب نیز می‌توانیم حل کنیم.

آزمون ۲ | به چند طریق، با ۵ نفر می‌توان یک صف تشکیل داد؟

(۱) ۲۵ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۴

پاسخ ۲ | **راه I** می‌خواهیم ۵ نفر را کنار هم قرار دهیم، یعنی تعداد جایگشت‌های ۵ نفر را می‌خواهیم که می‌شود: $5! = 120$

راه II | با یک کار ۵ مرحله‌ای روبه‌رو هستیم:

نفر پنجم نفر چهارم نفر سوم نفر دوم نفر اول

برای جایگاه نفر اول صف، ۵ انتخاب داریم (۵ نفر). برای جایگاه نفر دوم، ۴ انتخاب داریم و این روال تا جایگاه پنجم ادامه دارد که برای آن، فقط ۱ نفر می‌ماند:

$$\frac{\text{نفر پنجم}}{\text{نفر پنجم}} \times \frac{\text{نفر چهارم}}{\text{نفر چهارم}} \times \frac{\text{نفر سوم}}{\text{نفر سوم}} \times \frac{\text{نفر دوم}}{\text{نفر دوم}} \times \frac{\text{نفر اول}}{\text{نفر اول}} = 5! = 120$$

تبدیل (جایگشت‌های ۲ شیء از بین n شیء متمایز)

یک گروه ۵ نفره را در نظر بگیرید: «علی، رضا، محمد، حسین و نیما»

اگر بخواهیم با این ۵ نفر، یک صف ۵ نفره تشکیل دهیم، تعداد کل حالات برابر است با: $5! = 120$

در واقع تعداد جایگشت‌های ۵ نفر را نوشتیم (جایگشت ۵ شیء از بین ۵ شیء).

حالا اگر بخواهیم با این ۵ نفر، یک صف ۳ نفره تشکیل دهیم، تعداد کل حالات برابر است با:

در این جا ما جایگشت‌های ۳ شیء از بین ۵ شیء را حساب کردیم که به آن تبدیل می‌گوییم.

فرق جایگشت با تبدیل: اگر تمام n شیء را بخواهیم کنار هم قرار دهیم، با جایگشت طرفیم و اگر تعدادی از آن‌ها (مثلاً تا) را بخواهیم کنار هم قرار دهیم، با تبدیل (جایگشت ۲ شیء از n شیء) طرفیم.

نکته

تعداد جایگشت‌های ۲ شیء از n شیء متمایز را با $P(n, 2)$ نشان می‌دهیم و می‌توانیم آن را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

در مثال قبل که قرار بود با ۵ نفر، یک صف ۳ نفره تشکیل دهیم، می‌توانستیم از رابطه بالا استفاده کنیم:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2} = 60$$

آزمون | تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمه «gandomi» کدام است؟

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۷! ۳) ۸۴۰

(۴) $P(7, 3)$

پاسخ | **راه I** | کلمه «gandomi» از ۷ حرف ساخته شده است.

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840$$

ما تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از ۷ حرف را می‌خواهیم:

$$\frac{7}{\text{حرف اول}} \times \frac{6}{\text{حرف دوم}} \times \frac{5}{\text{حرف سوم}} \times \frac{4}{\text{حرف چهارم}} = 840$$

راه II | در کل ۷ حرف داریم و می‌خواهیم با آن‌ها یک کلمه ۴ حرفی بسازیم:

برای حرف اول ۷ انتخاب، برای حرف دوم ۶ انتخاب و برای حرف سوم و چهارم به ترتیب ۵ و ۴ انتخاب داریم:

$$\frac{7}{\text{حرف اول}} \times \frac{6}{\text{حرف دوم}} \times \frac{5}{\text{حرف سوم}} \times \frac{4}{\text{حرف چهارم}} = 840$$

بعضی وقت‌ها، سؤال‌ها مستقیماً با فرمول $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ کار دارند.

آزمون | مقدار عبارت $\frac{P(8, 3)}{P(9, 2)}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{16}{3}$ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) $\frac{14}{3}$

$$\text{صورت: } P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 6 \times 7 \times 8$$

پاسخ | صورت و مخرج را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\text{مخرج: } P(9, 2) = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 8 \times 9$$

$$\frac{6 \times 7 \times 8}{8 \times 9} = \frac{14}{3}$$

پس حاصل کل کسر برابر است با:

آزمون | در معادله $P(n, 2) + P(n+1, 1) = 50$ ، مقدار n کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ | طبق رابطه $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ، هر دو عبارت را ساده می‌کنیم:

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n \times (n-1) = n^2 - n$$

$$P(n+1, 1) = \frac{(n+1)!}{(n+1-1)!} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} = n+1$$

دو عبارت به دست آمده را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$P(n, 2) + P(n+1, 1) = 50 \Rightarrow (n^2 - n) + (n + 1) = 50 \Rightarrow n^2 + 1 = 50 \Rightarrow n^2 = 49 \Rightarrow n = \pm 7$$

$$n = 7$$

n نمی‌تواند منفی باشد، پس:

جایگشت‌های مشروط

بعضی وقت‌ها از ما تعداد جایگشت‌های چند شیء را می‌خواهند اما شروطی هم می‌گذارند. مثلاً می‌گویند فلان چیز در فلان جا باشد یا فلان چیز در فلان جا نباشد یا فلان چیزها کنار هم باشند یا ... در این جا چند تیپ معروف این سؤال‌ها را با هم بررسی می‌کنیم:

۱. فلان چیز در فلان جا باشد (یا نباشد)!

فرض کنید می‌خواهیم با حروف A, B, C و D یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم به طوری که حرف B، حرف اول باشد. حُب تکلیف حرف اول معلوم است:

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6$$

سه حرف باقی‌مانده یعنی A, C و D را در سه خانهٔ بعدی می‌چینیم:

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6$$

در این مدل سؤال‌ها، ترتیب پرکردن خانه‌ها این‌جوری است:

- ۱) خانه‌هایی که باید فلان شیء یا ... در آن‌ها باشد.
- ۲) خانه‌هایی که باید فلان شیء یا ... در آن‌ها نباشد.
- ۳) خانه‌های بدون شرط

تذکره اگر دقت کنید این همان نکته‌ای است که در اصل ضرب گفتیم؛ اول خانه‌های دارای محدودیت را پر می‌کنیم، بعد می‌رویم سراغ خانه‌های بدون محدودیت.

آزمون ۱ با ۵ نفر می‌خواهیم یک صف تشکیل دهیم. در چند حالت علی در انتهای صف است و امیر نفر دوم نیست؟

۶ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)

پاسخ ۱ ۵ نفر به صورت روبه‌رو داریم: علی، امیر، A, B, C و ۵ جای خالی برای قرارگرفتن آن‌ها در صف:

(۱) علی باید در انتهای صف باشد:

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6$$

(۲) امیر نباید نفر دوم باشد:

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6$$

(۳) برای ۳ خانهٔ باقی‌مانده، سه نفر مانده‌اند (امیر، A و B):

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 18$$

۲. فلان چیزها کنار هم باشند (بسته‌بندی)

- ۱) اشیایی که قرار است کنار هم باشند، مثل هم باشند.
 - ۲) اشیایی که قرار است کنار هم باشند، متمایز باشند.
- از هر کدام یک مثال می‌زنیم:

۱) فرض کنید می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی یکسان، ۲ کتاب عربی یکسان و ۴ کتاب فلسفهٔ یکسان را در قفسه، کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند؛ این‌جوری:

چیزهایی که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم:

ریاضی
ریاضی
ریاضی

بسته ۱

عربی
عربی

بسته ۲

فلسفه
فلسفه
فلسفه
فلسفه

بسته ۳

اول جایگشت بسته‌ها را حساب می‌کنیم: ۳!

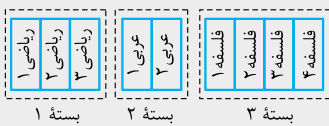
حالا به داخل هر بسته می‌رویم و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم. از آن جایی که داخل هر بسته، اشیای یکسانی داریم، پس فقط یک جایگشت دارند و جابه‌جاشدنشان حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند. (۳ تا کتاب ریاضی یکسان را ۳ تا عدد یکسان مثلاً ۴ در نظر بگیرید. با این ۳ تا فقط یک عدد ۳ رقمی می‌توانیم بنویسیم که آن هم ۴۴۴ است و جابه‌جا کردن ۴ها، عدد جدیدی به ما نمی‌دهد.)

جایگشت داخل بسته ۲ جایگشت بسته‌ها

$$3! \times 1 \times 1 \times 1 = 6$$

پس جواب نهایی برابر است با:

جایگشت داخل بسته ۳ جایگشت داخل بسته ۱



حالا همان مثال بالا را با کتاب‌های متمایز در نظر بگیریم. برای آن که متمایز بودن کتاب‌ها مشخص باشد، برایشان شماره می‌زنیم.

چیزهایی که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم: اول جایگشت بسته‌ها را حساب می‌کنیم: ۳!

بسته ۱: جایگشت ۳ کتاب ریاضی، ۳! حالت دارد.

بسته ۲: جایگشت ۲ کتاب عربی، ۲! حالت دارد.

بسته ۳: جایگشت ۴ کتاب فلسفه، ۴! حالت دارد.

حالا به داخل هر بسته می‌رویم و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

جایگشت داخل بسته ۲ جایگشت بسته‌ها

$$3! \times 2! \times 4! = 6 \times 2 \times 24 = 1728$$

پس جواب نهایی برابر است با:

جایگشت داخل بسته ۳ جایگشت داخل بسته ۱

تست ۱ در چند جایگشت از حروف کلمه **BEHZAD**، حروف **A, B, D** و **D** کنار هم قرار دارند؟

- ۱) ۳۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰

پاسخ ۲ حروف **A, B, D** را در یک بسته قرار می‌دهیم و ۳ حرف دیگر را جداگانه می‌نویسیم:



الان ۴ تا شیء داریم و تعداد جایگشت‌های آن‌ها، ۴! است.

سه حرف داخل بسته (۱) نیز می‌توانند جابه‌جا شوند. تعداد جایگشت‌های این ۳ حرف، ۳! است. پس تعداد کل حالات برابر است با:

جایگشت بسته‌ها

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

جایگشت داخل بسته ۱

حواستان به فرق تست قبل با این تست باشد!

تست ۲ در چند جایگشت از حروف کلمه **BEHZAD**، عبارت «**BAD**» وجود دارد؟

- ۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۱۴۴

پاسخ ۲ عبارت **BAD** را در یک بسته و ۳ حرف دیگر را جداگانه می‌نویسیم:



تفاوت این تست با تست قبل این است که چون می‌خواهیم عبارت «**BAD**» در کلمه‌مان باشد، پس داخل بسته **BAD** جایگشت نداریم؛ یعنی این ۳ حرف به همین شکل باید کنار هم باشند. در نتیجه فقط جایگشت ۴ بسته را باید حساب کنیم: ۴! = ۲۴

تست ۳ در چند جایگشت از حروف کلمه «**shahrab**»، حروف مشابه کنار هم قرار دارند؟

- ۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۴۸۰

پاسخ ۲ حروف مشابه را در یک بسته قرار می‌دهیم:



در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشت‌شان ۵! می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌ها یکسان است، پس جابه‌جایی حروف داخل هر بسته، حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند. در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با:

جایگشت داخل بسته ۲ جایگشت بسته‌ها

$$5! \times 1 \times 1 = 120$$

جایگشت داخل بسته ۱

۳. یکی در میان قرار گرفتن اعضای ۲ گروه

حالتی که تعداد اعضای یکی از گروه‌ها، یک عضو بیشتر از گروه دیگر است.

مثال می‌خواهیم با ۴ دکتر و ۳ مهندس، یک صف ۷ نفره بسازیم به طوری که دکترها و مهندس‌ها یکی در میان در صف باشند. چون تعداد دکترها یک نفر بیشتر است، پس شروع صف باید با دکترها باشد.

دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر

در کل ۷ تا جایگاه داریم و نحوه پرشدن آن‌ها باید این شکلی باشد:

جایگاه دکترها ربطی به جایگاه مهندس‌ها ندارد. این جمله رو می‌تونیم حذف کنیم
دکترها در جایگاه مربوط به خودشان، به ۴! حالت و مهندس‌ها در جایگاه مربوط به خودشان به ۳! حالت می‌توانند قرار گیرند:



$$\begin{array}{c} \text{دکترها} \\ \uparrow \\ 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144 \\ \downarrow \\ \text{مهندس‌ها} \end{array}$$

در نتیجه تعداد کل حالات قرارگرفتن آن‌ها برابر است با:

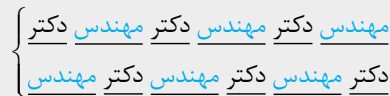
نکته اگر بخواهیم n نفر از گروه اول و $n+1$ نفر از گروه دوم را در یک صف، یکی در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات برابر با $n! \times (n+1)!$ می‌شود.

حالتی که تعداد اعضای دو گروه برابر است.

مثال می‌خواهیم ۳ دکتر و ۳ مهندس را یکی در میان، در یک صف کنار هم قرار دهیم.

چون تعداد دکترها و مهندس‌ها برابر است، پس نفر اول صف می‌تواند هم از دکترها باشد و هم از مهندس‌ها.

یعنی یکی از دو حالت روبه‌رو را داریم:



در حالت اول ۳ جایگاه برای ۳ دکتر داریم که تعداد جایگشت آن‌ها ۳! است؛ هم‌چنین ۳ جایگاه برای ۳ مهندس داریم که تعداد جایگشت آن‌ها هم ۳! می‌شود، یعنی تعداد کل حالت‌های اولی می‌شود $3! \times 3!$.

حالت دوم هم مشابه حالت اول است و همان $3! \times 3!$ می‌شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{جایگشت دکترها} \\ \uparrow \\ 3! \times 3! \times 2 \\ \downarrow \\ \text{جایگشت مهندس‌ها شروع می‌تواند} \\ \text{با دکتر یا} \\ \text{مهندس باشد} \end{array}$$

نکته اگر بخواهیم n نفر از گروه اول و n نفر از گروه دوم را در یک صف، یکی در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات برابر با $2 \times n! \times n!$ می‌شود.

جایگشت با تکرار (خارج از کتاب)

تا الان یاد گرفتیم که با حروف A, B, C, D چند جایگشت ۴ حرفی داریم (که می‌شد ۴!).

حالا می‌خواهیم ببینیم با حروف A, A, A, B, C چند جایگشت ۴ حرفی داریم.

اول فرض می‌کنیم که ۴ تا حرف متمایزند که جایگشتشان می‌شود ۴!.

الان باید جایگشت‌های اضافه‌ای که شمردیم را حذف کنیم.

ما جابه‌جایی A و A را در ۴! حساب کرده‌ایم که کار درستی نیست، چون از جابه‌جایی دو حرف یکسان، کلمه جدیدی ساخته نمی‌شود. برای همین ۴!

را باید به ۲! (جایگشت‌های ۲ تا A) تقسیم کنیم: $\frac{4!}{2!}$

جواب درست همین است: $\frac{4!}{2!}$

نکته این نکته را با یک مثال بیان می‌کنیم تا رابطه بهتر در ذهنتان بماند. فرض کنید با

حروف a, a, a, b, c, d می‌خواهیم یک کلمه ۷ حرفی بنویسیم. تعداد حالات این‌جوری

حساب می‌شود:

$$\begin{array}{c} \text{تعداد کل حروف} \\ \uparrow \\ 7! \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3! \quad 2! \\ \text{تعداد تکرار } a \quad \text{تعداد تکرار } b \end{array}$$



تست ۱ | ارقام عدد ۲۳۳۴۵۸، چند جایگشت شش تایی دارند؟

- (۱) ۵! (۲) $۵! \times ۲!$ (۳) $\frac{۶!}{۲!}$ (۴) ۶!

پاسخ ۳ | تعداد کل ارقام ۶ تا است (۲، ۳، ۳، ۴، ۵ و ۸)، پس صورت کسر ۶! است.

از رقم ۳، دوتا داریم، پس در مخرج ۲! داریم.

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۶!}{۲!}$

تست ۲ | با حروف کلمه «google» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

پاسخ ۲ | تعداد کل حروف ۶ تا است (g, g, o, l, e)، پس صورت کسر ۶! است.

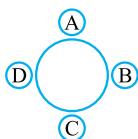
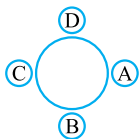
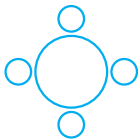
تا g و تا ۲ o داریم، پس در مخرج $۲! \times ۲!$ داریم.

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{۶!}{۲! \times ۲!} = \frac{۷۲۰}{۴} = ۱۸۰$$

جایگشت دوری (خارج از کتاب)

فرض کنید ۴ نفر را می‌خواهیم دور یک میز گرد بنشانیم:



در مسائل مربوط به میز گرد، دو حالت روبه‌رو فرقی با هم ندارند:

چون در هر کدام اگر از A در جهت ساعتگرد حرکت کنیم به ترتیب A, B, C و D را داریم.

این به این معنی است که جایگاه نفر اول مهم نیست.

پس اگر n نفر داشته باشیم، تعداد حالت قرارگرفتنشان دور یک میز گرد، $(n-1)!$ می‌شود.

تست ۱ | ۷ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۵۰۴۰

$$۶! = ۷۲۰$$

پاسخ ۲ | ۷ نفر به $(7-1)!$ ، یعنی ۶! دور یک میز گرد قرار می‌گیرند:

ترکیب (انتخاب)

در جایگشت‌ها، ترتیب اشیا یا افراد مهم است. یعنی مهم است که هر فرد یا هر شیء در کدام جایگاه قرار می‌گیرد. برای مثال جایگشت «علی، رضا و حسین» یک جایگشت ۳ تایی از بین «رضا، محمد، نیما، علی و حسین» است. در این جایگشت، جاها مهم است؛ یعنی جایگشت «علی، رضا و حسین» با جایگشت «رضا، حسین و علی» متفاوت است، اگرچه نفراتشان با هم یکی است.

اما ترکیب یا انتخاب، داستان دیگری دارد ...

ترکیب، انتخابی از اشیاست که در آن، ترتیب مهم نیست. در واقع تفاوت ترکیب با تبدیل (جایگشت r شیء از n شیء متمایز) در این است که ترتیب در ترکیب مهم نیست ولی در تبدیل مهم است. مثلاً در ترکیب، دو گروه «علی، رضا و حسین» و «رضا، حسین و علی» فرقی با هم ندارند.

تعداد راه‌های ترکیب (انتخاب) r شیء از بین n شیء متمایز که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها برایمان مهم نیست را با $C(n, r)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

چند مثال ببینید:

مثال ۱ | تعداد حالت‌های انتخاب ۳ دانش‌آموز از بین ۵ دانش‌آموز: $C(5, 3) = \frac{۵!}{(۵-۳)!۳!} = \frac{۵!}{۲!۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۲ \times ۳!} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$

۲ | تعداد حالت‌های انتخاب یک گروه ۴ نفری از بین ۱۰ نفر:

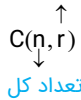
$$C(10, 4) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!۴!} = \frac{۱۰!}{۶!۴!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶! \times ۴!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۱۰$$

۳ | تعداد حالت‌های انتخاب یک تیم ۶ نفره از بین ۷ نفر:

$$C(7, 6) = \frac{۷!}{(۷-۶)!۶!} = \frac{۷!}{۱!۶!} = \frac{۷ \times ۶!}{۶!} = ۷$$

نکات

تعدادی که می‌خواهیم انتخاب کنیم



۱) وقتی می‌نویسیم $C(n, r)$ ، n تعداد کل افراد و r تعداد افرادی است که می‌خواهیم انتخابشان کنیم.

$$C(n, r) = C_r^n = \binom{n}{r}$$

۲) عبارت $C(n, r)$ را جور دیگری هم می‌نویسند:

یعنی جای $C(5, 2)$ ، می‌نویسیم $\binom{5}{2}$.

آزمون ۱ از بین ۱۲ نفر می‌خواهیم یک گروه ۳ نفری انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- ۱) ۱۳۲۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۲۲۰

پاسخ ۱ چون جایگاه ۳ نفر مهم نیست، پس با ترکیب یا انتخاب طرفیم.
تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۱۲ نفر برابر است با:
$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!} \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

آزمون ۲ به چند طریق می‌توانیم از بین ۹ نفر، یک تیم ۳ نفری انتخاب کنیم به طوری که علی حتماً در این تیم باشد ولی رضا در این تیم نباشد؟

- ۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

پاسخ ۲ قرار است تیم ما ۳ نفری باشد. علی که حتماً باید در این تیم باشد، یعنی تیم ما ۲ تا جای خالی دارد: \circ, \circ, \circ ، علی

از این ۹ نفر، علی که انتخاب شده و رضا هم نباید در تیم باشد، پس می‌ماند ۷ نفر.

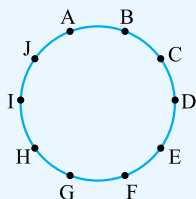
حالا از این ۷ نفر باید ۲ نفر انتخاب کنیم تا تیم تکمیل شود:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times 2!} = 21$$

نکته اگر n نقطه داشته باشیم که هیچ ۳ تایی از آن‌ها روی یک خط قرار نداشته باشند (مثلاً همه نقطه‌ها روی محیط یک دایره باشند)، تعداد پاره‌خط‌ها و تعداد مثلث‌هایی که با آن‌ها می‌توانیم بسازیم برابر است با:

$$\text{تعداد پاره‌خط‌ها} = \binom{n}{2} \quad \text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{n}{3}$$

آزمون ۳ با نقاط روی محیط دایرهٔ روبه‌رو، K پاره‌خط و M مثلث می‌توانیم بسازیم. مقدار $M + K$ کدام است؟



- ۱) ۱۳۵
۲) ۱۴۵
۳) ۱۵۵
۴) ۱۶۵

تعداد پاره‌خط‌ها: $K = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!} \times 2} = 45$

پاسخ ۳ ۱۰ نقطه روی محیط دایره داریم. طبق نکتهٔ بالا داریم:

تعداد مثلث‌ها: $M = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!} \times 3!} = \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8}}{3 \times 2} = 120$

$$M + K = 120 + 45 = 165$$

پس:

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

مثلاً در یک مجموعهٔ ۵ عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی برابر با $\binom{5}{2}$ است.

آزمون ۴ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ کدام است؟

- ۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

پاسخ ۴ مجموعهٔ A ، دارای ۷ عضو است.

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن را حساب می‌کنیم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

نکات

- ۱ انتخاب ۲ از n یعنی $\binom{n}{2}$ زیاد در مسائل استفاده می‌شود که بعد از ساده‌کردنش به رابطه زیر می‌رسیم:
- $$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{\text{عدد قبلی‌اش} \times \text{عدد بالایی}}{2}$$
- مثلاً $\binom{7}{2}$ می‌شود ۷ ضرب در ۶ تقسیم بر ۲:
- $$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = ۲۱$$
- ۲ $\binom{n}{n} = ۱$ و $\binom{n}{1} = n$
- ۳ اگر جمع دو عدد a و b برابر با n باشد، آن‌گاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ ، مثلاً $\binom{۱۰}{۳}$ با $\binom{۱۰}{۷}$ برابر است.

آزمون | تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی و تعداد زیرمجموعه‌های ۸ عضوی یک مجموعه با هم برابر است. این مجموعه چند عضو دارد؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶
- پاسخ** | فرض کنید مجموعه مورد نظر n عضو دارد. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ و ۸ عضوی آن به ترتیب $\binom{n}{4}$ و $\binom{n}{8}$ می‌شود. سؤال گفته این دو با هم برابرند: $\binom{n}{4} = \binom{n}{8}$
- طبق نکته بالا باید جمع ۴ و ۸ برابر با n باشد:
- $$n = 4 + 8 = ۱۲$$

سؤال‌هایی با انتخاب‌های چندمرحله‌ای

بعضی وقت‌ها در سؤال باید چند بار انتخاب کنیم. در هر مرحله باید $\binom{n}{r}$ بنویسیم که در آن n ، تعداد کل اشیای باقی‌مانده و r ، تعداد اشیایی است که در آن مرحله می‌خواهیم انتخاب کنیم. حالا اگر در جمله مربوط به سؤال از «و» استفاده کردیم، بین انتخاب‌ها «ضرب» و اگر از «یا» استفاده کردیم، بین انتخاب‌ها «جمع» قرار می‌دهیم. چند مثال با هم حل کنیم:

- ۱) بین انتخاب‌ها «یا» بیاید. فرض کنید می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های ۲ یا ۳ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ را پیدا کنیم. مجموعه A ، ۸ عضو دارد. تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن برابر است با:
- $$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = ۲۸$$
- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن هم برابر است با:
- $$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = ۵۶$$
- چون بین انتخاب‌ها «یا» آمده، پس تعداد حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم:
- $$۲۸ + ۵۶ = ۸۴ = (\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی}) + (\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی})$$

- ۲) بین انتخاب‌ها «و» باشد. فرض کنید می‌خواهیم از بین ۱۰ نفر، یک گروه ۳ نفره و یک گروه ۴ نفره انتخاب کنیم. کارمان ۲ مرحله دارد: اول از بین ۱۰ نفر، ۳ نفر انتخاب می‌کنیم:
- $$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = ۱۲۰$$
- حالا از ۷ نفر باقی‌مانده، ۴ نفر انتخاب می‌کنیم:
- $$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 6} = ۳۵$$

چون بین انتخاب‌ها «و» داریم، باید تعداد حالت‌های مرحله اول را ضرب در تعداد حالت‌های مرحله دوم بکنیم:

انتخاب ۴ نفر از ۷ نفر

$$\binom{10}{3} \times \binom{7}{4} = ۱۲۰ \times ۳۵ = ۴۲۰۰$$

انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر

۳ انتخاب‌هایی که هم بین آن‌ها «و» باشد و هم «یا».

فرض کنید ۴ ایرانی و ۵ آلمانی در یک سالن هستند و می‌خواهیم از بین آن‌ها یک تیم ۳ نفره انتخاب کنیم به طوری که از هر دو کشور در آن باشند. الان دوتا حالت داریم: «۲ ایرانی و ۱ آلمانی» یا «۱ ایرانی و ۲ آلمانی» به ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} \text{انتخاب ۲ ایرانی} \quad \text{انتخاب ۱ آلمانی} \\ \text{از بین ۴ ایرانی} \quad \text{از بین ۵ آلمانی} \\ \left(\binom{4}{2} \right) \times \left(\binom{5}{1} \right) + \left(\binom{5}{2} \right) \times \left(\binom{4}{1} \right) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{انتخاب ۲ آلمانی} \quad \text{انتخاب ۱ آلمانی} \\ \text{از بین ۵ آلمانی} \quad \text{از بین ۴ ایرانی} \end{array}$$

$$\left(\frac{5 \times 4}{2} \times 4 \right) + \left(5 \times \frac{4 \times 3}{2} \right) = 40 + 30 = 70$$

تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

۱ تست | از بین ۶ دانش‌آموز دوازدهمی، ۵ دانش‌آموز یازدهمی و ۴ دانش‌آموز دهمی، می‌خواهیم یک گروه ۶ نفری انتخاب کنیم به طوری که تعداد

دانش‌آموزان هر پایه در آن یکسان باشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

- ۱) ۶۰۰ (۱) ۲) ۹۰۰ (۲) ۳) ۱۲۰۰ (۳) ۴) ۱۸۰۰ (۴)

۲ پاسخ | قرار است «۲ دانش‌آموز دوازدهمی» و «۲ دانش‌آموز یازدهمی» و «۲ دانش‌آموز دهمی» انتخاب کنیم. تعداد کل حالات برابر است با:

$$\left(\binom{6}{2} \right) \times \left(\binom{5}{2} \right) \times \left(\binom{4}{2} \right) = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 15 \times 10 \times 6 = 900$$

۱ تست | می‌خواهیم از بین ۶ نقاش و ۵ خطاط، یک گروه ۴ نفره انتخاب کنیم به طوری که حداقل ۲ نقاش در آن‌ها باشد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- ۱) ۲۶۵ (۱) ۲) ۲۸۰ (۲) ۳) ۳۲۰ (۳) ۴) ۳۴۰ (۴)

۱ پاسخ | می‌خواهیم در گروه ۴ نفره، حداقل ۲ نقاش باشد، پس این حالت‌ها را داریم: «۴ نقاش» یا «۳ نقاش و ۱ خطاط» یا «۲ نقاش و ۲ خطاط»

$$\left(\binom{5}{2} \right) \times \left(\binom{6}{2} \right) + \left(\binom{5}{1} \right) \times \left(\binom{6}{3} \right) + \left(\binom{6}{4} \right) = \left(\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \right) + \left(5 \times \frac{6!}{3!2!} \right) + \frac{6!}{4!2!}$$

$$= (10 \times 15) + (5 \times 20) + 15 = 150 + 100 + 15 = 265$$

مسئله‌های مربوط به فرمول ترکیب

بعضی وقت‌ها از خود فرمول $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ به ما سؤال می‌دهند. البته ممکن است جای $C(n, r)$ از نماد $\binom{n}{r}$ استفاده کنند.

۱ تست | مقدار عددی عبارت $\frac{C(15, 11)}{C(16, 5)}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{16}$ (۱) ۲) $\frac{5}{8}$ (۲) ۳) $\frac{4}{15}$ (۳) ۴) $\frac{8}{15}$ (۴)

$$C(15, 11) = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{4! \times 11!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4!}$$

$$C(16, 5) = \frac{16!}{11!5!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 5!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5!}$$

$$\frac{\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4!}}{\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5!}} = \frac{5!}{4! \times 16} = \frac{5 \times 4!}{4! \times 16} = \frac{5}{16}$$

حالا دو کسر به دست آمده را به هم تقسیم می‌کنیم:

۱ تست | مقدار $C(n, 2) + P(2n, 1) = 27$ در تساوی کدام است؟

- ۱) ۴ (۱) ۲) ۵ (۲) ۳) ۶ (۳) ۴) ۷ (۴)

$$C(n, 2) + P(2n, 1) = 27 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + 2n = 27$$

۱ پاسخ | داشتیم $P(n, 1) = n$ و $C(n, 2) = \frac{n(n-1)}{2}$ ، پس:

$$n(n-1) + 4n = 54 \Rightarrow n^2 - n + 4n - 54 = 0 \Rightarrow n^2 + 3n - 54 = 0$$

طرفین تساوی بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$(n+9)(n-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -9 \text{ * (منفی نیست.)} \\ n = 6 \checkmark \end{cases}$$

با اتحاد جمله‌مشتک تجزیه می‌کنیم:

جمع‌بندی جایگشت، تبدیل و ترکیب در یک جدول

نماد و رابطه	مصادق	تعریف	
$n!$	تشکیل صف n نفره با n نفر	تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شیء کنار هم	جایگشت
$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	تشکیل صف r نفره با n نفر	تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن r شیء از n شیء	تبدیل
$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$	تشکیل یک گروه r نفره از بین n نفر	تعداد حالت‌های انتخاب r نفر از بین n نفر	ترکیب

پرستهای چهارگزینه‌ای



درس اول: شمارش

اصل جمع

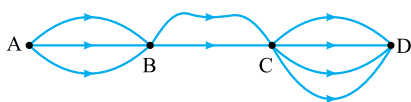
۱- از بین ۱۰ کشور اروپایی، ۶ کشور آسیایی و ۳ کشور آمریکای شمالی می‌خواهیم یک کشور را برای سفر انتخاب کنیم. چند حالت برای سفر به این کشورها خواهیم داشت؟

۱۱۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۹۰ (۳) ۲۰ (۴)

۲- به چند طریق می‌توانیم فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار آبی، قرمز، سبز، مشکی و نارنجی و ۸ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنیم؟

۱۲۰ (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۲ (۴)

اصل ضرب



۳- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟

۹ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۴) ۱۸ (۳)

۴- فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۳ عمومی ارائه‌شده و ۱ درس اختصاصی از بین ۴ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند.

(کتاب درسی)

او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱۵ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

۵- یک کارخانه تولید خودرو، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع داشبورد مختلف تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت؟

(کتاب درسی)

۱۴ (۱) ۸۴ (۲) ۲۸ (۳) ۱۲۰ (۴)

۶- یک تاس و ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد اول آمده کدام است؟

۴۰ (۱) ۴۸ (۲) ۲۴ (۳) ۸۴ (۴)

۷- می‌خواهیم شکل زیر که از ۴ مربع به هم چسبیده ساخته شده را با رنگ‌های قرمز، سبز، زرد و صورتی رنگ کنیم، به طوری که رنگ مربع‌های مجاور، مثل هم نباشد. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟



۲۴ (۱) ۴۸ (۲) ۷۲ (۳) ۱۰۸ (۴)

۸- یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره، چند بازی انجام شده است؟

(کتاب درسی)

۴۵ (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

۹- به چند طریق می‌توان به ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای پاسخ داد؟ (پاسخ به سؤالات الزامی است.)

۴^{۱۰} (۱) ۱۰^۴ (۲) ۱۰^۵ (۳) ۵^{۱۰} (۴)

۱۰- به چند طریق می‌توان به ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای پاسخ داد؟ (پاسخ به سؤالات الزامی نیست.)

۴^{۱۰} (۱) ۱۰^۴ (۲) ۱۰^۵ (۳) ۵^{۱۰} (۴)

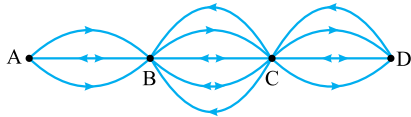
۱۱- در یک آزمون، ۹ سؤال اول چهارگزینه‌ای و ۱۰ سؤال بعدی دوگزینه‌ای هستند. اگر پاسخ‌دادن به تمام سؤالات الزامی باشد، یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به کل سؤالات پاسخ دهد؟

۲^{۲۴} (۱) ۲^{۲۶} (۲) ۲^{۲۸} (۳) ۲^{۳۰} (۴)

۱۲- تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ‌دادن به تعدادی سؤال چهارگزینه‌ای برابر (۱۲۵) است. تعداد سؤالات، کدام گزینه است؟ (پاسخ‌دادن به سؤالات الزامی نیست.)

۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴)

۱۳- بین ۴ شهر A, B, C و D مطابق شکل زیر، راه‌های ارتباطی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم؟ (حواستان به مسیرهای یک‌طرفه و دوطرفه باشد.)



- (۱) ۳۲۴
(۲) ۴۳۲
(۳) ۱۴۴
(۴) ۲۱۶

۱۴- با توجه به شکل زیر، به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم، به طوری که از هر جاده حداکثر یک بار بگذریم؟



- (۱) ۷۲
(۲) ۹۶
(۳) ۱۴۴
(۴) ۱۹۲

۱۵- علی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و تعدادی جوراب و کفش دارد. اگر علی برای استفاده از آن‌ها (یک پیراهن، یک شلوار، یک جوراب و یک کفش)، ۳۶۰ حالت متفاوت داشته باشد، مجموع تعداد جوراب‌ها و کفش‌های او کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۱
(۲) ۱۲
(۳) ۱۳
(۴) ۱۷

اصل ضرب (عدد ساختن)

۱۶- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

- (۱) ۱۶۰
(۲) ۱۸۰
(۳) ۱۹۲
(۴) ۲۱۶

۱۷- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

- (۱) ۱۲۰
(۲) ۱۲۵
(۳) ۶۰
(۴) ۹۶

۱۸- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

- (۱) ۱۶۰
(۲) ۱۸۰
(۳) ۱۹۲
(۴) ۲۱۶

۱۹- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

- (۱) ۸۰
(۲) ۹۶
(۳) ۱۰۰
(۴) ۱۲۰

(سراسری ۸۸)

۲۰- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟

- (۱) ۲۵۶
(۲) ۵۱۲
(۳) ۶۲۵
(۴) ۱۰۲۴

(خارج ۸۸)

۲۱- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

- (۱) ۴۵۰
(۲) ۵۰۴
(۳) ۶۴۸
(۴) ۷۲۰

۲۲- با ارقام مجموعه {۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۹} چند عدد چهاررقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- (۱) ۶۰
(۲) ۷۲
(۳) ۹۶
(۴) ۱۲۰

(خارج ۹۸)

۲۳- با ارقام موجود در مجموعه {۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸}، چند عدد پنج‌رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۲۰
(۲) ۱۸۰
(۳) ۲۴۰
(۴) ۳۰۰

(خارج ۹۱)

۲۴- چند عدد ۳ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟

- (۱) ۱۸
(۲) ۲۰
(۳) ۲۴
(۴) ۲۵

(کتاب درسی)

۲۵- چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

- (۱) ۹۰۰
(۲) ۱۸۰۰
(۳) ۵۰۴
(۴) ۴۴۸

۲۶- چند عدد ۴ رقمی طبیعی فرد وجود دارد که رقم هزارگان آن‌ها فرد نباشد؟

- (۱) ۱۰۰۰
(۲) ۱۵۰۰
(۳) ۲۰۰۰
(۴) ۲۵۰۰

۲۷- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که مضرب ۵ نباشد؟

- (۱) ۱۰۰
(۲) ۱۲۰
(۳) ۱۲۵
(۴) ۱۵۰

۲۸- پلاک اتومبیل سواری در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{***ب***}$ می‌باشد که هر ستاره، نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

- (۱) ۱۱۶۶۴
(۲) ۱۴۵۸۰
(۳) ۱۵۴۸۰
(۴) ۱۸۲۲۵

۲۹- چند عدد زوج چهاررقمی با ارقام متمایز داریم که تمام ارقام آن‌ها از ۳ بزرگ‌تر باشند؟

- (۱) ۱۵۰
(۲) ۱۸۰
(۳) ۲۱۰
(۴) ۲۴۰

۳۰- چند عدد ۳ رقمی بدون رقم تکراری داریم که در آن‌ها ارقام ۳ و ۶ به کار نرفته است؟

- (۱) ۲۸۸
(۲) ۲۹۴
(۳) ۳۰۰
(۴) ۳۰۶

۳۱- با ارقام ۰، ۱، ۴، ۵، ۸، چند عدد ۳ رقمی مضرب ۱۰ و بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

- (۱) ۹
(۲) ۱۲
(۳) ۲۴
(۴) ۶

۳۲- چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟

- ۱۹۶ (۱) ۲۲۴ (۲) ۲۵۶ (۳) ۳۳۶ (۴)

۳۳- با ارقام ۱, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸ چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۵۰۰۰۰ می توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

- ۳۰۰ (۱) ۴۸۰ (۲) ۳۸۰ (۳) ۲۸۰ (۴)

۳۴- با تمام ارقام فرد طبیعی یک رقمی، چند عدد ۵ رقمی مضرب ۵ و بزرگ تر از ۷۰۰۰۰ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۴۸ (۴)

۳۵- با ارقام ۰, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ تر از ۳۰۰۰ و کوچک تر از ۶۰۰۰ می توان ساخت؟ (تکرار ارقام غیرمجاز است.)

- ۱۸۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۹۰ (۳) ۸۰ (۴)

۳۶- چند عدد سه رقمی کوچک تر از ۵۰۰ داریم که رقم هایش تکراری نیست؟

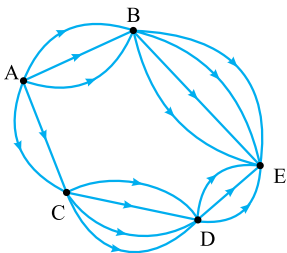
- ۲۸۸ (۱) ۲۹۴ (۲) ۳۰۰ (۳) ۳۰۶ (۴)

۳۷- چند عدد سه رقمی بین ۳۰۰ و ۹۰۰ داریم که مجموع رقم یکان و دهگان آن ها، ۸ باشد؟

- ۴۲ (۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۶۰ (۴)

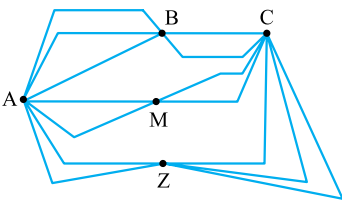
اصل جمع واصل ضرب

۳۸- با توجه به نقشه روبرو، به چند طریق می توانیم از شهر A به شهر E برویم؟



- ۳۰ (۱)
۳۶ (۲)
۴۲ (۳)
۴۸ (۴)

۳۹- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می توان از شهر M به شهر Z سفر کرد به طوری که از شهر B عبور نکنیم و به شهر M هم برنگردیم؟ (تمام مسیرها ۲ طرفه هستند.)



- ۸ (۱) ۱۲ (۲)
۱۰ (۳) ۱۴ (۴)

۴۰- علی می خواهد به مهمانی برود. او عادت دارد شلوار پارچه ای را با کت و شلوار جین را با پیراهن بپوشد. با توجه به جدول زیر، علی به چند طریق می تواند برای این مهمانی، لباس بپوشد؟

شلوار پارچه ای	کت	شلوار جین	پیراهن
تا ۴	تا ۳	تا ۶	تا ۵

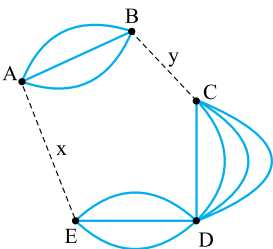
- ۳۶ (۱) ۴۰ (۲)
۴۲ (۳) ۴۵ (۴)

۴۱- نسترن می خواهد با ارقام ۱ تا ۶ و حروف A, B, C و D یک رمز ۳ کارا کتری به شکل برای موبایلش بگذارد. در چند حالت رمز فقط شامل ارقام یا فقط شامل حروف است؟

- ۲۵۰ (۱) ۲۶۰ (۲) ۲۷۰ (۳) ۲۸۰ (۴)

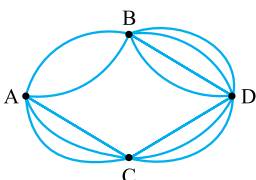
۴۲- اگر تعداد راه ها از شهر A به E با x و از شهر B به C را با y نمایش دهیم و فردی به ۲۴ حالت مختلف بتواند از A به D سفر کند، حاصل x + y کدام است؟

(کتاب درسی)



- ۴ (۱)
۵ (۲)
۶ (۳)
۷ (۴)

۴۳- در شکل زیر، به چند طریق می توانیم از A به D برویم و دوباره از D به A برگردیم، به طوری که در مسیر برگشت از جاده های مسیر رفت، عبور نکنیم؟



- ۲۰۰ (۱)
۲۰۴ (۲)
۲۰۸ (۳)
۲۱۲ (۴)

اصل جمع و اصل ضرب (عدد ساختن)

- ۴۴- با ارقام ۱ تا ۷، چند عدد سه رقمی می توان نوشت که ارقام آن یکی در میان، زوج و فرد باشند؟ (بدون تکرار ارقام)
- ۵۶ (۱) ۶۰ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴)
- ۴۵- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز داریم که تمام ارقام آن زوج یا تمام آن ها فرد باشند؟
- ۸۴ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۰ (۴)
- ۴۶- در چند عدد ۴ رقمی، رقم یکان و هزارگان هر دو فرد یا هر دو زوج هستند؟ (بدون تکرار ارقام)
- ۲۰۰۶ (۱) ۲۰۱۶ (۲) ۲۰۲۶ (۳) ۲۰۳۶ (۴)
- ۴۷- با ارقام صفر تا ۵، چند عدد زوج سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
- ۴۶ (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳) ۵۲ (۴)
- ۴۸- با ارقام ۰، ۱، ۳، ۵، ۶، ۸، چند عدد زوج ۴ رقمی با ارقام متمایز می توان ساخت؟
- ۲۱۰ (۱) ۲۲۰ (۲) ۱۵۶ (۳) ۱۶۵ (۴)
- ۴۹- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد مضرب ۵ سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
- ۵۴ (۱) ۵۵ (۲) ۵۸ (۳) ۶۰ (۴)
- ۵۰- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم ها، می توان نوشت؟
- ۷۲ (۱) ۹۶ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۰ (۴)
- ۵۱- چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز داریم که شامل ۵ و ۹ نیستند؟
- ۹۱۰ (۱) ۹۲۰ (۲) ۹۳۰ (۳) ۹۴۰ (۴)
- ۵۲- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که دقیقاً یک رقم آن زوج باشد؟
- ۲۴۰ (۱) ۲۶۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۳۰۰ (۴)
- ۵۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، چند عدد ۳ رقمی بزرگ تر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟
- ۶۰ (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴)
- ۵۴- با ارقام {۰، ۲، ۴، ۵، ۶، ۸}، چند عدد ۴ رقمی کوچک تر از ۵۵۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
- ۱۵۶ (۱) ۱۵۴ (۲) ۱۵۲ (۳) ۱۵۰ (۴)
- ۵۵- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد زوج سه رقمی بزرگ تر از ۳۰۰ با ارقام متمایز می توانیم بنویسیم؟
- ۶۶ (۱) ۶۸ (۲) ۷۰ (۳) ۷۲ (۴)
- ۵۶- با ارقام مجموعه {۰، ۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۸}، چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و کوچک تر از ۶۰۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
- ۱۲۰ (۱) ۱۳۰ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۵۰ (۴)
- ۵۷- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۴، چند عدد ۵ رقمی می توانیم بنویسیم، به طوری که ارقام یکسان کنار هم باشند؟
- ۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴)
- ۵۸- چند عدد ۴ رقمی بدون ارقام تکراری داریم که دقیقاً ۳ رقم آن فرد باشد؟
- ۱۱۱۰ (۱) ۱۱۲۰ (۲) ۱۱۳۰ (۳) ۱۱۴۰ (۴)
- ۵۹- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷ و ۹، چند عدد زوج بدون تکرار ارقام، بین ۲۶۰۰ تا ۸۰۰۰ می توان نوشت؟
- ۱۷۶ (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۸۶ (۳) ۱۹۲ (۴)

متمم

- ۶۰- با ارقام صفر تا ۶، یک عدد سه رقمی می نویسیم. در چند حالت در این عدد، رقم تکراری وجود دارد؟
- ۱۱۰ (۱) ۱۱۲ (۲) ۱۱۴ (۳) ۱۱۶ (۴)
- ۶۱- با حروف A, B, C, D, E, F، یک کلمه چهار حرفی می نویسیم. در چند حالت حرف A در این کلمه وجود دارد؟
- ۱۸۰ (۱) ۲۰۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۰۰ (۴)
- ۶۲- در چند عدد سه رقمی، رقم ۸، حداقل یک بار به کار رفته است؟
- ۲۲۲ (۱) ۲۳۲ (۲) ۲۴۲ (۳) ۲۵۲ (۴)

فاکتوریل

- ۶۳- حاصل عبارت $0! + 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!$ کدام است؟
- ۶۰۰ (۱) ۶۰۱ (۲) ۴۸۰ (۳) ۴۸۱ (۴)

۶۴- حاصل عبارت $\frac{10!}{8!} - \frac{13!}{12!}$ کدام است؟

- ۷۴ (۱) ۷۵ (۲) ۷۶ (۳) ۷۷ (۴)

۶۵- حاصل عبارت $\frac{26! + 25!}{26! - 25!}$ کدام است؟

- ۱/۰۲ (۱) ۱/۰۴ (۲) ۱/۰۶ (۳) ۱/۰۸ (۴)

۶۶- اگر $a = \underbrace{5! + 5! + \dots + 5!}_{66}$ و $b = \frac{10!}{9!}$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۴۲ (۳) ۵۶ (۴)

۶۷- چه تعداد از روابط زیر درست هستند؟ (n عدد طبیعی و بزرگتر از ۲ است.)

الف) $3 \times 4! = 12!$ (الف) ب) $10! - 3! = 7!$ (ب) پ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n^2 + n$ (پ)

ت) $(1!)^2 = (0!)^2$ (ت) ث) $\sqrt{9!} = 3!$ (ث) ج) $n! = n(n-1)(n-2)!$ (ج)

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۶۸- اختلاف جواب‌های معادله $(x^2 + x - 2)! = 24$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۶۹- معادله $(x^2 - 4)! = 1$ چند ریشه دارد؟

- صفر (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۰- حاصل عبارت $\frac{(n+1)!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!}$ کدام است؟

- ۲n (۱) ۲n-۱ (۲) ۲n+۱ (۳) ۲n+۲ (۴)

۷۱- اگر $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 8$ باشد، حاصل $\frac{n!}{4!}$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۳۰ (۳) ۴۲ (۴)

۷۲- اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، حاصل $(n+2)!$ کدام است؟

- ۱۲۰ (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۷۲۰ (۴)

۷۳- اگر $n! = 7! \times 6!$ باشد، حاصل $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

جایگشت

۷۴- تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز کدام است؟

- ۲۵ (۱) ۳۲ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۷۵- تعداد جایگشت‌های $n-1$ شیء متمایز برابر ۲۴ است. تعداد جایگشت $n+1$ شیء متمایز کدام است؟

- ۱۲۰ (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۷۲۰ (۴)

۷۶- ۴ پزشک و ۲ روان‌شناس قرار است در یک مراسم سخنرانی کنند. این کار به چند طریق انجام‌پذیر است؟

- ۴!۲! (۱) ۶! (۲) ۸! (۳) ۴!+۲! (۴)

۷۷- ۱۲ دانش‌آموز به چند حالت می‌توانند در یک صف در حیاط مدرسه قرار گیرند؟

- ۱۲×۱۱! (۱) ۱۱! (۲) ۱۱×۱۰! (۳) ۱۰! (۴)

۷۸- اگر تعداد جایگشت‌های $n+2$ نفر، ۲۱۰ برابر تعداد جایگشت‌های $n-1$ نفر باشد، حاصل $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}$ کدام است؟

- ۵۶ (۱) ۷۲ (۲) ۹۰ (۳) ۱۱۰ (۴)

تبدیل (جایگشت ۲ شیء از n شیء)

۷۹- تعداد جایگشت‌های ۳ شیء از ۵ شیء کدام است؟

- ۵^۳ (۱) ۳^۵ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰ (۴)

۸۰- به چند طریق می‌توانیم با ۷ نفر، یک صف ۳ نفره تشکیل دهیم؟

- $P(7, 3)$ (۱) $P(7, 4)$ (۲) $4! \times P(7, 3)$ (۳) $3! \times P(7, 4)$ (۴)



۸۱- ۳ مسافر به چند طریق می‌توانند در ۵ ایستگاه از اتوبوس پیاده شوند؟

- (۱) $P(5, 3)$ (۲) 3^5 (۳) 5^3 (۴) $\frac{5!}{3!}$

(کتاب درسی)

۸۲- از ۱۲ دانش‌آموز نمونه، به چند روش می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه کار متمایز در مدرسه انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۳۲۰ (۲) ۶۶۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۲۲۰

۸۳- حاصل $\frac{12!}{8!}$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $P(8, 4)$ (۲) $P(12, 8)$ (۳) $P(11, 7)$ (۴) $P(12, 4)$

۸۴- حاصل $\frac{P(10, 2)}{P(5, 1)}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۸۵- اگر $P(n+1, n) = 6$ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۶- اگر $P(n, 2) = 56$ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۸۷- اگر $P(n+2, 3) = 12n(n+2)$ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

جایگشت مشروط

(کتاب درسی)

۸۸- با حروف کلمه «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «ت» شروع و به «ح» ختم شوند؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۶

(کتاب درسی)

۸۹- با حروف کلمه «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که حرف اول آن «م» نباشد؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۹۶ (۳) ۱۰۸ (۴) ۱۲۰

۹۰- با حروف کلمه «ASSIST» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت به طوری که همگی آن‌ها با «S» شروع و به «S» ختم شوند؟ (به جز حرف S بقیه حروف، حق تکرار شدن را ندارند.)

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۹۶

(سراسری ۹۷)

۹۱- با حروف کلمه DANESH چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۲۶۰ (۴) ۲۷۰

۹۲- می‌خواهیم ۵ کتاب زبان و ۴ کتاب ریاضی را در یک قفسه کنار هم قرار دهیم، به طوری که هیچ دو کتاب هم‌موضوعی، کنار هم نباشند. به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

- (۱) $9!$ (۲) $\frac{9!}{4!5!}$ (۳) $(4!)(5!)$ (۴) $2(4!)(5!)$

۹۳- تعداد جایگشت‌های ۶ حرفی کلمه «suarez» که در آن‌ها حروف صدادار و بی‌صدا یکی در میان قرار بگیرند، کدام است؟ (تکرار حروف غیرمجاز است.)

- (۱) ۴۲ (۲) ۷۲ (۳) ۶۴ (۴) ۸۲

۹۴- حروف کلمه «ASSIST» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد که حروف «S» یک در میان باشند؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۹۵- عدد ۳۸۵۲۹۴ چند جایگشت دارد به طوری که ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟

- (۱) ۹۶ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۴۴

۹۶- در چند جایگشت از ارقام عدد ۱۲۳۴۶۵۸، مضارب ۳ کنار هم و مضارب ۴ نیز کنار هم هستند؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۶۰

۹۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «DAMDARAN» به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

۹۸- در چند جایگشت از حروف کلمه «mississippi» حروف مشابه کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴) ۶۰

۹۹- با حروف کلمه «دلبرانه» چند کلمه ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همه آن‌ها عبارت «دلبر» به همین شکل مطرح شود؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۱۰۰- به چند طریق می‌توان ۳ خودکار آبی یکسان و ۵ خودکار قرمز یکسان را در یک جامدادی قرار داد، به طوری که خودکارهای هم‌رنگ کنار هم باشند؟

- (۱) ۲ (۲) $5!3!$ (۳) $(3!)(5!)(2!)$ (۴) $8!$

۱۰۱- ۳ کتاب زبان، ۲ کتاب فلسفه و ۳ کتاب منطق متفاوت را می‌خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم. در چند حالت کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم هستند؟

(۱) ۲۱۶ (۲) ۳۲۴ (۳) ۴۳۲ (۴) ۶۴۸

۱۰۲- ۳ دانش‌آموز به همراه پدرهایشان می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. در چند حالت هر پدر کنار فرزندش قرار دارد؟

(۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴) ۶۴

۱۰۳- در چند جایگشت از حروف کلمه «zeidan»، دو حرف a و z کنار هم هستند؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۷۲۰

۱۰۴- در چند جایگشت از حروف کلمه «zeidan»، سه حرف a، z و d، کنار هم هستند؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۶۰ (۴) ۱۹۲

۱۰۵- در چند جایگشت از حروف کلمه «zeidan»، کلمه «zad» دیده می‌شود؟

(۱) ۲۴ (۲) ۷۲ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۴۴

۱۰۶- در چند جایگشت از حروف کلمه «zeidan»، دو حرف a و z کنار هم نیستند؟

(۱) ۴۲۰ (۲) ۴۴۰ (۳) ۴۶۰ (۴) ۴۸۰

۱۰۷- در چند جایگشت از حروف کلمه «zeidan»، دو حرف a و z کنار هم هستند ولی دو حرف n و e کنار هم نیستند؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۳۶ (۴) ۱۴۴

۱۰۸- چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۷ می‌توان ساخت به طوری که ارقام ۵ و ۶ در آن‌ها به کار رفته و در کنار هم باشند؟

(۱) ۳۶ (۲) ۱۲ (۳) ۷۲ (۴) ۲۴

(سراسری ۹۹)

۱۰۹- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آن‌ها، مجاز به رانندگی باشند؟

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۷۵ (۴) ۸۴

۱۱۰- یک ماشین ۸ صندلی برای نشستن دارد. ۶ نفر که ۲ تای آن‌ها رانندگی بلدند، به چند طریق می‌توانند داخل این ماشین بنشینند؟

(۱) ۲۱۶۰ (۲) ۲۵۲۰ (۳) ۴۳۲۰ (۴) ۵۰۴۰

۱۱۱- تعداد جایگشت‌های کلمه «MAHSUS» که در آن‌ها بین دو حرف s، دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد، کدام است؟

(۱) ۴۸ (۲) ۹۶ (۳) ۱۱۸ (۴) ۲۴۰

۱۱۲- در چند جایگشت از حروف کلمه «zeidan»، بین دو حرف a و z، دقیقاً دو حرف قرار می‌گیرد؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۶

جایگشت با تکرار (خارج کتاب)

۱۱۳- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «ASAL» کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۱۴- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «ABADAN» کدام است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۷۲۰

۱۱۵- با حروف کلمه «EARNEST» چند جایگشت ۷ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که در تمام آن‌ها حرف «N» در وسط کلمه باشد؟

(۱) ۱۸۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰

۱۱۶- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «BAMDAD» کدام است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۴۰

(سراسری ۹۴)

۱۱۷- با حروف کلمه «RANGIN» چند کلمه ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

(۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۸۴ (۴) ۱۲۰

جایگشت دوری (خارج کتاب)

۱۱۸- به چند طریق می‌توانیم ۶ نفر را دور یک میز گرد بنشانیم؟

(۱) $۳^۶$ (۲) $\frac{۶!}{۲}$ (۳) $۵!$ (۴) $۶!$

(خارج ۹۹)

۱۱۹- دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند، به طوری که ۲ فرد مورد نظر از آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟

(۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴) ۱۲۰

۱۲۰- ۵ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد ۵ نفره قرار بگیرند، به طوری که علی و آرش، کنار هم نباشند؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

ترکیب

۱۲۱- به چند طریق می‌توان از بین ۶ شیء، ۲ شیء انتخاب کرد؟

۱۵ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۱۲۲- به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر، یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد؟

۱۲۰ (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۷۲۰ (۴)

۱۲۳- با ۵ نفر به حالت می‌توان یک صف ۳ نفره و به حالت می‌توان یک تیم ۳ نفره تشکیل داد.

۶۰، ۶۰ (۱) ۱۰، ۶۰ (۲) ۶۰، ۱۰ (۳) ۱۰، ۱۰ (۴)

۱۲۴- در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد، به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟ (مهره‌های هم‌رنگ، متفاوت هستند.)

۱۰۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۰ (۴) *(کتاب درسی)*

۱۲۵- می‌خواهیم ۸ نفر را به دو گروه ۳ و ۵ نفری تقسیم کنیم. این کار به چند حالت ممکن است؟

۵۶ (۱) ۶۳ (۲) ۷۲ (۳) ۹۶ (۴) *(کتاب درسی)*

۱۲۶- روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه متمایز وجود دارد. چه تعداد وتر با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

۴۰ (۱) ۴۵ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) *(کتاب درسی)*

۱۲۷- روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه متمایز وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

۶۰ (۱) ۹۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

۱۲۸- به چند طریق می‌توانیم از بین ۹ نفر یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم به طوری که علی حتماً در این تیم باشد ولی بهزاد در آن نباشد؟

۸۴ (۱) ۳۵ (۲) ۷۰ (۳) ۴۸ (۴)

۱۲۹- به چند طریق می‌توان از بین ۸ سؤال یک امتحان به ۵ سؤال پاسخ داد، به شرط آن که پاسخ به ۲ سؤال اول، اجباری باشد؟

۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۴۲ (۳) ۸۰ (۴)

۱۳۰- از بین ۸ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانیم یک گروه ۲ یا ۳ نفری تشکیل دهیم؟

۵۶ (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴)

۱۳۱- از بین ۸ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانیم یک گروه ۲ نفری و یک گروه ۳ نفری تشکیل دهیم؟ (به فرق این سؤال با سؤال قبلی، توجه کنید!)

۴۲۰ (۱) ۴۸۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۵۶۰ (۴)

۱۳۲- گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته‌گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱۲۶ (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۵۴ (۳) ۱۶۸ (۴) *(تجربی ۹۸)*

۱۳۳- می‌خواهیم ۷ نفر را در اتاق‌های ۲، ۳ و ۲ نفره تقسیم کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱۲۰ (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۰ (۴) *(سراسری ۹۳)*

۱۳۴- به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

۵۴ (۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۹۰ (۴) *(کتاب درسی)*

۱۳۵- به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد به طوری که حداکثر ۳ زن انتخاب شوند؟

۲۰ (۱) ۳۰ (۲) ۵۰ (۳) ۷۴ (۴)

۱۳۶- به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ پزشک و ۴ مهندس، یک گروه ۵ نفره تشکیل دهیم به طوری که تعداد پزشک‌های گروه، بیشتر از تعداد مهندس‌ها باشد و حتماً مهندس در گروه باشد؟

۷۰ (۱) ۸۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

۱۳۷- می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز پایه‌ی نهم و ۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم، یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه بخواهیم کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه‌ی دوازدهم باشد؟

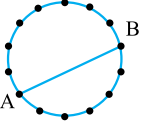
۴۸ (۱) ۵۶ (۲) ۱۱۲ (۳) ۳۳۰ (۴)

۱۳۸- می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز پایه‌ی نهم و ۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه بخواهیم کاپیتان تیم، فردی از پایه‌ی دوازدهم باشد؟ (به فرق این سؤال با سؤال قبلی، توجه کنید!)

۳۰۰ (۱) ۳۱۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۲۸۰ (۴)

۱۳۹- می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز پایه‌ی نهم و ۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه بخواهیم حداقل ۳ نفر از اعضای تیم از پایه‌ی دوازدهم باشند؟

۷۴ (۱) ۸۴ (۲) ۹۴ (۳) ۱۰۴ (۴)

- ۱۴۰- در کمد لباس علی، ۲ پیراهن آبی، ۴ پیراهن قرمز و ۵ پیراهن سبز وجود دارد. او برای مسافرت می‌خواهد ۴ پیراهن با خود ببرد به طوری که از هر رنگ، حداقل ۱ پیراهن داشته باشد. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟
- (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۷۰ (۴) ۱۸۰
- ۱۴۱- می‌خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان یک گروه سرود ۵ نفره تشکیل دهیم. به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آن که حداقل ۳ نفر از آن‌ها نوجوان باشند؟
- (۱) ۱۰۸ (۲) ۱۲۰ (۳) ۵۶۰ (۴) ۶۰۶
- ۱۴۲- در کیسه‌ای ۴ مهره آبی، ۶ مهره قرمز و ۳ مهره سبز وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این کیسه خارج کنیم به طوری که دقیقاً ۲ مهره آن هم‌رنگ باشند؟
- (۱) ۱۵۹ (۲) ۱۶۹ (۳) ۱۷۹ (۴) ۱۸۹
- ۱۴۳- از یک تیم ۹ نفره می‌خواهیم یک گروه ۵ نفره انتخاب کنیم. به طوری که بهزاد و سینا با هم در این گروه نباشند. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟
- (۱) ۸۱ (۲) ۸۶ (۳) ۹۱ (۴) ۹۶
- ۱۴۴- می‌خواهیم از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۱، دو عدد انتخاب کنیم که مجموعشان عددی زوج باشد. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟
- (۱) ۲۱ (۲) ۲۳ (۳) ۲۵ (۴) ۲۷
- ۱۴۵- از هر یک از مدارس A, B, C, D, E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دوه‌دو غیرهم‌مدرسه‌ای باشند را انتخاب کرد؟
- (۱) ۱۶۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۴۸۰
- ۱۴۶- با توجه به شکل زیر، ۱۴ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. وتر AB هم رسم شده است. به چند طریق می‌توان یک چهارضلعی در یک طرف وتر و یک مثلث در طرف دیگر وتر ساخت؟ (چهارضلعی‌ها و مثلث‌ها شامل نقاط A و B نیستند.)
- 
- (۱) ۲۱۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۵۲۵
- ۱۴۷- تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی کلمه «MANSUR» که دو حرف M و N حتماً در آن‌ها وجود داشته باشد، کدام است؟
- (۱) ۴۸۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۱۱۲

ترکیب (تعداد زیر مجموعه)

- ۱۴۸- تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ کدام است؟
- (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۵
- ۱۴۹- تعداد زیرمجموعه‌های ۲ یا ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ کدام است؟
- (۱) ۵۲ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۵۸
- ۱۵۰- تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ که فاقد عدد ۴ باشد، کدام است؟
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸
- ۱۵۱- تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ که شامل ۶ و ۷ و فاقد عدد ۵ باشد، کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲
- ۱۵۲- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 16\}$ ، چند زیرمجموعه دوعضوی شامل اعداد اول دارد؟
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۳۰
- ۱۵۳- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ ، چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد که همه اعضای آن زوج یا همه اعضای آن فرد باشند؟
- (۱) ۹۱ (۲) ۹۲ (۳) ۹۳ (۴) ۹۴
- ۱۵۴- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ، چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد که حداقل یک عضو آن، عددی زوج است؟
- (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۹۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۱۰
- ۱۵۵- در چند زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، حداقل ۳ عدد اول وجود دارد؟
- (۱) ۶۴ (۲) ۶۶ (۳) ۶۸ (۴) ۷۰

معادلات مربوط به $C(n, r)$

- ۱۵۶- مقدار کدام عبارت زیر با $n!$ برابر است؟
- (۱) $C(n, 0)$ (۲) $C(n, 1)$ (۳) $P(n, n-1)$ (۴) $P(n, 0)$



۱۵۷- مقدار $C(8, 3)$ با کدام گزینه برابر است؟

$\frac{P(8, 3)}{5!}$ (۴)	$5! \times P(8, 3)$ (۳)	$\frac{P(8, 3)}{3!}$ (۲)	$3! \times P(8, 3)$ (۱)
--------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------

۱۵۸- اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$ باشد، حاصل $C(n, 6)$ کدام است؟

۱۰۸ (۴)	۹۶ (۳)	۸۴ (۲)	۷۲ (۱)
---------	--------	--------	--------

۱۵۹- اگر $2C(n, 5) = 3P(n-1, 4)$ باشد، n کدام است؟

۱۹۰ (۴)	۱۸۰ (۳)	۱۷۰ (۲)	۱۶۰ (۱)
---------	---------	---------	---------

۱۶۰- روی محیط یک دایره، n نقطه وجود دارد. اگر با این نقاط، ۵۵ وتر بتوانیم بسازیم، n کدام است؟

۱۲ (۴)	۱۱ (۳)	۱۰ (۲)	۹ (۱)
--------	--------	--------	-------

۱۶۱- یک مجموعه n عضوی، ۴۵ زیرمجموعه $(n-2)$ عضوی دارد. n کدام است؟

۱۱ (۴)	۱۰ (۳)	۹ (۲)	۸ (۱)
--------	--------	-------	-------

۱۶۲- اگر $\binom{22}{14} = \binom{22}{k}$ باشد، k کدام می‌تواند باشد؟

۱۰ (۴)	۹ (۳)	۸ (۲)	۷ (۱)
--------	-------	-------	-------

۱۶۳- اگر $\binom{18}{k+4} = \binom{18}{k}$ باشد، مقدار $C(k, 2)$ کدام است؟

۲۱ (۴)	۱۵ (۳)	۱۰ (۲)	۶ (۱)
--------	--------	--------	-------

۱۶۴- اگر $26C(n+3, 2) = P(n+4, 3)$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱۰ (۴)	۹ (۳)	۸ (۲)	۷ (۱)
--------	-------	-------	-------



۱. گزینه ۳ باید به «یکی از ۱۰ کشور اروپایی» یا «یکی از ۶ کشور آسیایی»

↓
جمع

یا «یکی از ۳ کشور آمریکای شمالی»، مسافرت کنیم.

↓
جمع

پس طبق اصل جمع، داریم: $10 + 6 + 3 = 19$ = تعداد انتخاب‌ها

↓ ↓ ↓
آمریکا آسیا اروپا

۲. گزینه ۲ در صورت مسئله از «یا» استفاده شده و تأکید شده که فقط

یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس می‌تواند انتخاب شود، لذا از اصل جمع

استفاده می‌کنیم: $5 + 8 + 3 = 16$ = تعداد انتخاب‌ها

↓ ↓ ↓
روان‌نویس مداد خودکار

۳. گزینه ۴ کارمان ۳ مرحله دارد:

«از A به B» و «از B به C» و «از C به D»

↓ ↓
ضرب ضرب

پس طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\frac{3}{B \text{ به } A} \times \frac{2}{C \text{ به } B} \times \frac{4}{D \text{ به } C} = 24$$

۴. گزینه ۴ این دانشجو می‌خواهد هم درس عمومی بردارد و هم اختصاصی

(به طور هم‌زمان)، پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{3}{\text{عمومی}} \times \frac{4}{\text{اختصاصی}} = 12$$

۵. گزینه ۲ مشتری باید از بین «۷ رنگ مختلف» و «۳ حجم موتور مختلف»

و «۲ گیربکس مختلف» و «۲ داشبورد مختلف»، یکی از هر کدام را انتخاب کند؛ لذا

باید از اصل ضرب استفاده کنیم (به حرف «و» بین عبارتها دقت کنید).

$$\frac{7}{\text{داشبورد}} \times \frac{3}{\text{گیربکس}} \times \frac{2}{\text{حجم موتور}} \times \frac{2}{\text{رنگ}} = 84$$

۶. گزینه ۳ برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد، «رو» یا «پشت».

از طرفی در تاس، اعداد اول عبارتند از ۲، ۳، ۵ که تعداد آنها ۳ تا است. لذا

طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با:

$$\frac{2}{\text{تاس}} \times \frac{2}{\text{سکه ۲}} \times \frac{2}{\text{سکه ۳}} \times \frac{3}{\text{سکه ۴}} = 24$$

۷. گزینه ۴ برای مربع‌ها، اسم می‌گذاریم: $4809b$

با مربع A شروع می‌کنیم که ۴ حالت دارد (قرمز، سبز، زرد، صورتی).

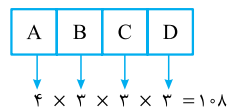


بعد سراغ مربع B می‌رویم که نباید هم‌رنگ A باشد، یعنی ۳ حالت دارد.

مربع C هم ۳ حالت دارد، چون فقط نباید هم‌رنگ B باشد.

مربع D هم مثل C.

پس طبق اصل ضرب، داریم:



۸. گزینه ۲ در هر بازی فوتبال، یک تیم میزبان و یک تیم مهمان است.

$$\frac{1}{\text{مهمان}} \times \frac{9}{\text{مهمان}} = 90$$

۹. گزینه ۱ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۱۰ سؤال داریم و هر سؤال ۴ حالت پاسخگویی دارد، پس تعداد کل حالات

پاسخگویی برابر است با:

$$\frac{4}{\text{سؤال ۱}} \times \frac{4}{\text{سؤال ۲}} \times \dots \times \frac{4}{\text{سؤال ۱۰}} = \underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ تا}} = 4^{10}$$

۱۰. گزینه ۴ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۱۰ سؤال داریم و هر سؤال، ۵ حالت پاسخگویی (۴ حالت برای گزینه‌ها و ۱ حالت

برای پاسخ‌ندادن) دارد، پس تعداد کل حالات پاسخگویی برابر است با:

$$\frac{5}{\text{سؤال ۱}} \times \frac{5}{\text{سؤال ۲}} \times \dots \times \frac{5}{\text{سؤال ۱۰}} = \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ تا}} = 5^{10}$$

۱۱. گزینه ۳ پاسخ‌دادن به سؤالات اجباری است، پس به هر سؤال

۴ گزینه‌ای به ۴ حالت و به هر سؤال ۲ گزینه‌ای به ۲ حالت می‌توان پاسخ داد:

$$\frac{4}{\text{سؤال ۱}} \times \frac{4}{\text{سؤال ۲}} \times \dots \times \frac{4}{\text{سؤال ۹}} \times \frac{2}{\text{سؤال ۱۰}} = 4^9 \times 2^1 = 4^9 \times 2^1$$

سؤالات ۲ تا ۹ گزینه‌ای (تا ۹) سؤالات ۴ تا ۹ گزینه‌ای (تا ۹)

$$= (2^2)^9 \times 2^1 = 2^{18} \times 2^1 = 2^{19}$$

۱۲. گزینه ۲ تعداد سؤالات را X فرض می‌کنیم:

تعداد سؤالات (۱+ تعداد گزینه‌ها) = تعداد حالت‌های پاسخگویی

$$5^{18} = 5^x \Rightarrow 5^{18} = 5^x \Rightarrow x = 18$$

۱۳. گزینه ۴ کارمان ۶ مرحله دارد (۳ تا برای رفت و ۳ تا برگشت). تعداد

راه‌های مراحل را باید در هم ضرب کنیم:

$$\frac{3}{B \text{ به } A} \times \frac{3}{C \text{ به } B} \times \frac{3}{D \text{ به } C} \times \frac{2}{C \text{ به } D} \times \frac{4}{B \text{ به } C} \times \frac{1}{A \text{ به } B} = 216$$

۱۴. گزینه ۳ اول تعداد مسیرهای رفت را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{3}{B \text{ به } A} \times \frac{4}{C \text{ به } B} \times \frac{2}{D \text{ به } C} = 24$$

برای مسیرهای برگشت، از تمام حالت‌های بالا باید یکی کم کنیم تا از مسیر

$$\frac{1}{C \text{ به } D} \times \frac{3}{B \text{ به } C} \times \frac{2}{A \text{ به } B} = 6$$

تکراری عبور نکنیم:

$$\frac{24}{\text{برگشت رفت}} \times \frac{6}{\text{برگشت رفت}} = 144$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

۱۵. گزینه ۲ تعداد جواب‌ها را X و تعداد کفش‌ها را Y می‌گیریم.

با استفاده از اصل ضرب، تعداد کل حالات تیپ‌زدن‌های اعلی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{4}{\text{کفش}} \times \frac{3}{\text{جوراب}} \times \frac{X}{\text{شلوار}} \times \frac{Y}{\text{پیراهن}} = 12XY$$

$$12XY = 360 \xrightarrow{\div 12} XY = 30$$

با توجه به گزینه‌ها، X + Y نمی‌تواند ۱۲ باشد.

تمام حالاتی که حاصل ضرب دو عدد طبیعی X و Y، برابر با ۳۰ می‌شود را می‌نویسیم:

$$1) X = 1, Y = 30 \Rightarrow X + Y = 31$$

$$2) X = 2, Y = 15 \Rightarrow X + Y = 17$$

$$3) X = 3, Y = 10 \Rightarrow X + Y = 13$$

$$4) X = 5, Y = 6 \Rightarrow X + Y = 11$$

با توجه به گزینه‌ها، X + Y نمی‌تواند ۱۲ باشد.

تذکره ۱) دقت کنید به غیر از ۴ حالت بالا، ۴ حالت دیگر هم داشتیم

که جای X و Y در آنها عوض می‌شد ولی تغییری در X + Y به وجود نمی‌آمد.

۱۶. گزینه ۴ هر ۶ رقم در هر ۳ خانه قابل استفاده‌اند:

$$\frac{6}{\text{یکان}} \times \frac{6}{\text{دهگان}} \times \frac{6}{\text{صدگان}} = 216$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هیچ فرقی ندارد!

۱۷. گزینه ۱ در صدگان ۶ رقم می‌تواند قرار بگیرد.

در دهگان فقط رقمی که در صدگان استفاده شده نمی‌تواند بیاید (۵ حالت).

در یکان دورقمی که در صدگان و دهگان استفاده شده‌اند، نمی‌توانند بیایند (۴ حالت).

$$\frac{6}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} = 120$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها:

$$\text{صدگان} \leftarrow \text{دهگان} \leftarrow \text{یکان}$$

البته برعکس هم می‌شود! (از وسطی هم می‌تونیم شروع کنیم.)



۱.۸ گزینه ۲ فقط باید حواسمان باشد که در صدگان، صفر نمی‌تواند قرار گیرد.

$$\begin{matrix} 1,2,3,4,5 & 0,1,2,3,4,5 & 0,1,2,3,4,5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 6 & 6 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \end{matrix} = 180$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هیچ فرقی ندارد!

۱.۹ گزینه ۳ حواسمان باشد چون صفر داریم با صدگان شروع می‌کنیم.

$$\begin{matrix} 1,2,3,4,5 & 0,1,2,3,4,5 & 0,1,2,3,4,5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 5 & 4 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \end{matrix} = 1000$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۲.۰ گزینه ۴ باید از ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ برای پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم.

ضمناً تکرار ارقام مجاز است چون محدودیتی ذکر نشده است:

$$\begin{matrix} 2,4,6,8 & 2,4,6,8 & 2,4,6,8 & 2,4,6,8 & 2,4,6,8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{دهزارگان} & \text{ده‌هزارگان} \end{matrix} = 4^5 = 1024$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هیچ فرقی ندارد!

۲.۱ گزینه ۳ می‌توانیم از تمام ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ استفاده کنیم، فقط صفر در اولین خانه سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد.

$$\begin{matrix} 1,2,\dots,9 & 0,1,2,\dots,9 & 0,1,2,\dots,9 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 9 & 9 & 8 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \end{matrix} = 648$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۲.۲ گزینه ۳ چون محدودیت زوج بودن داریم، از رقم یکان شروع می‌کنیم.

برای یکان ۴ حالت داریم (۲، ۴، ۶، ۸).

بعد می‌رویم سراغ هزارگان که فقط رقم یکان نباید در آن بیاید (می‌شود ۴ حالت). به همین ترتیب برای صدگان و دهگان به ترتیب ۳ و ۲ حالت داریم.

$$\begin{matrix} 2,4,6,8 & 2,4,6,8,9 & 2,4,6,8,9 & 2,4,6,8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{هزارگان} \end{matrix} = 96$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۲.۳ گزینه ۳ اول یکان را پر می‌کنیم. چون می‌خواهیم عددها فرد باشد،

یکان باید ۱ یا ۷ باشد. بعد از رقم سمت چپ شروع به پرکردن می‌کنیم و جلو می‌آییم:

$$\begin{matrix} 1,7 & 1,7 & 1,7 & 1,7 & 1,7 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{هزارگان} & \text{ده‌هزارگان} \end{matrix} = 240$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← ده‌هزارگان ← هزارگان ← صدگان

← دهگان

۲.۴ گزینه ۴ باید با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اعداد سه رقمی بخش پذیر بر ۵ بسازیم.

فرض بر این است که تکرار ارقام مجاز است (در متن سؤال، محدودیتی ذکر نشده)، پس خواهیم نوشت:

$$\begin{matrix} 1,3,5,7,9 & 1,3,5,7,9 & \text{فقط } 5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 5 & 1 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \end{matrix} = 25$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲.۵ گزینه ۲ ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را در نظر می‌گیریم، تکرار ارقام مجاز است، پس مسئله فقط با یک حالت حل می‌شود:

$$\begin{matrix} 1,2,\dots,9 & 0,1,2,\dots,9 & 0,1,2,\dots,9 & 5 \text{ یا } 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 9 & 10 & 10 & 2 \\ \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{هزارگان} \end{matrix} = 1800$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲.۶ گزینه ۳ اولاً یکان عدد باید از بین ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ انتخاب شود تا

عدد، فرد محسوب شود. ثانیاً در رقم هزارگان، باید از ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم.

برای دهگان و صدگان محدودیتی ذکر نشده، پس می‌توانند از بین ارقام صفر تا ۹

انتخاب شوند (توجه کنید که تکرار ارقام مجاز است؛ چون در متن سؤال، چیزی در

این مورد گفته نشده است).

$$\begin{matrix} 2,4,6,8 & 9 \text{ تا } 0 & 9 \text{ تا } 0 & 1,3,5,7,9 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 10 & 10 & 5 \\ \text{یکان} & \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{هزارگان} \end{matrix} = 2000$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲.۷ گزینه ۳ باید در رقم یکان صفر یا ۵ نباشد، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶

می‌تواند در یکان باشد.

بعد سراغ صدگان می‌رویم. صدگان به غیر از صفر و رقمی که در یکان استفاده

شده، بقیه ۵ رقم را می‌تواند بگیرد.

در آخر هم دهگان می‌ماند که ۵ حالت دارد (فقط ۲ تایی که در یکان و صدگان

نوشتیم، نباید باشد).

$$\begin{matrix} 2,4,6,8 & 0,1,2,3,4,5,6 & 0,1,2,3,4,5,6 & 1,2,3,4,6 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} & \text{صدگان} \end{matrix} = 125$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← صدگان ← دهگان

۲.۸ گزینه ۲ به جای ستاره‌ها، خانه رسم می‌کنیم. اولین رقم سمت

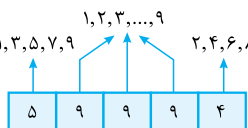
چپ باید فرد باشد (۱، ۳، ۵، ۷، ۹)، ولی اولین رقم سمت راست باید زوج باشد

(۲، ۴، ۶، ۸)؛ بقیه خانه‌ها محدودیتی ندارند، پس می‌توانند هر یک از ارقام ۱

تا ۹ را اختیار کنند (طبق صورت سؤال

در بین ارقام پلاک، صفر نداریم). ضمناً

تکرار ارقام مجاز است، بنابراین:



$$\Rightarrow 5 \times 9 \times 9 \times 4 = 14580$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲.۹ گزینه ۲ باید با رقم ۶، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ عدد را بسازیم.

چون عدد زوج است، پس یکان ۳ حالت دارد (۴، ۶ و ۸).

برای سه خانه دیگر به ترتیب ۵، ۴ و ۳ حالت می‌ماند.

$$\begin{matrix} 2,4,6,8 & 2,4,6,8,9 & 2,4,6,8,9 & 2,4,6,8,9 & 4,6,8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ \text{یکان} & \text{دهگان} & \text{صدگان} & \text{هزارگان} & \text{هزارگان} \end{matrix} = 180$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۳.۰ گزینه ۲ در کل با این ۸ رقم باید عددها را بسازیم:

$$0,1,2,3,4,5,7,8,9$$

با صدگان شروع می‌کنیم که صفر نمی‌تواند باشد. پس صدگان ۷ حالت دارد.

رقمی که در صدگان استفاده کردیم، نباید در دهگان بیاید. ضمناً صفر هم به بازی

برمی‌گردد، پس دهگان هم ۷ حالت دارد.

تا این‌جا ۲ رقم در صدگان و دهگان استفاده شده‌اند، پس ۶ حالت برای یکان می‌ماند.

به جز صدگان و دهگان به جز صدگان به جز صفر

$$\begin{matrix} 7 & 7 & 6 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 7 & 7 & 6 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \end{matrix} = 294$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۳.۱ گزینه ۱ عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که یکان آن صفر باشد. از

طرفی عدد مورد نظر باید از ۴۰۰ بزرگ‌تر باشد، پس صدگان آن باید ۴ به بالا

باشد، لذا خواهیم نوشت:

$$\begin{matrix} 4,5,8 & 1,4,5,8 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 3 & 1 \\ \text{صدگان} & \text{دهگان} & \text{یکان} \end{matrix} = 9$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← صدگان ← دهگان



۳۸. گزینه ۲ دو جور مسیر داریم:

(۱) مسیر ABE: $\frac{3}{B \text{ به } A} \times \frac{4}{E \text{ به } B} = 12$

(۲) مسیر ACDE: $\frac{2}{C \text{ به } A} \times \frac{4}{D \text{ به } C} \times \frac{3}{E \text{ به } D} = 24$

تعداد کل مسیرها برابر است با: $12 + 24 = 36$

۳۹. گزینه ۳ می‌خواهیم از شهر M شروع به حرکت کرده و بدون عبور از

شهر B به شهر Z برویم، پس دو مسیر کلی خواهیم داشت:

(۱) مسیر MAZ: $\frac{2}{A \text{ به } M} \times \frac{2}{Z \text{ به } A} = 4$

(۲) مسیر MCZ: $\frac{2}{C \text{ به } M} \times \frac{3}{Z \text{ به } C} = 6$

پس تعداد کل مسیرها برابر است با: $4 + 6 = 10$

۴۰. گزینه ۳ علی دو جور می‌تواند لباس بپوشد:

(۱) شلوار پارچه‌ای با کت: $\frac{4}{\text{کت}} \times \frac{3}{\text{شلوار پارچه‌ای}} = 12$

(۲) شلوار جین با پیراهن: $\frac{6}{\text{پیراهن}} \times \frac{5}{\text{شلوار جین}} = 30$

تعداد کل حالات برابر است با: $12 + 30 = 42$

۴۱. گزینه ۴ نسترن به دو حالت می‌تواند برای موبایلش رمز بگذارد:

(۱) از حروف A, B, C, D استفاده کند: $\frac{4}{A, B, C, D} \times \frac{4}{\text{حروف}} \times \frac{4}{\text{حروف}} = 64$

(۲) از ارقام ۱ تا ۶ استفاده کند: $\frac{6}{1, 2, \dots, 6} \times \frac{6}{\text{ارقام}} \times \frac{6}{\text{ارقام}} = 216$

پس تعداد کل حالات رمزگذاری برابر است با: $64 + 216 = 280$

۴۲. گزینه ۲ به دو روش می‌توانیم از A به D برویم:

(۱) مسیر ABCD: $\frac{3}{B \text{ به } A} \times \frac{4}{C \text{ به } B} \times \frac{4}{D \text{ به } C} = 12y$

(۲) مسیر AED: $\frac{x}{E \text{ به } A} \times \frac{3}{D \text{ به } E} = 3x$

مجموع دو حالت بالا، باید برابر با ۲۴ باشد:

$$12y + 3x = 24 \xrightarrow{\div 3} 4y + x = 8$$

با توجه به این که X و Y اعداد طبیعی هستند، Y فقط می‌تواند ۱ باشد:

$$4y + x = 8 \xrightarrow{y=1} 4 + x = 8 \Rightarrow x = 4$$

پس: $x + y = 4 + 1 = 5$

۴۳. گزینه ۲ ۴ حالت می‌تواند رخ دهد! برای همین هم این سؤال، جزء

سؤالات سخت است!

(۱) رفت و برگشت را از جاده‌های بالایی برویم:

$$\frac{2}{B \text{ به } A} \times \frac{4}{D \text{ به } B} \times \frac{3}{B \text{ به } D} \times \frac{1}{A \text{ به } B} = 24$$

(۲) رفت از مسیر بالا و برگشت از مسیر پایین باشد:

$$\frac{2}{B \text{ به } A} \times \frac{4}{D \text{ به } B} \times \frac{3}{C \text{ به } D} \times \frac{3}{A \text{ به } C} = 72$$

(۳) رفت و برگشت را از جاده‌های پایینی برویم:

$$\frac{3}{C \text{ به } A} \times \frac{3}{D \text{ به } C} \times \frac{2}{C \text{ به } D} \times \frac{2}{A \text{ به } C} = 36$$

۳۲. گزینه ۳ ابتدا باید خانه دهگان را پر کنیم، چون شرط اصلی سؤال در

مورد آن است؛ سپس خانه سمت چپ و در نهایت خانه سمت راست را پر می‌کنیم:

$$\frac{9 \text{ تا } 1}{\text{به جز صدگان}} \times \frac{9 \text{ تا } 0}{\text{دهگان}} \times \frac{8}{\text{یکان}} = 256$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: دهگان ← صدگان ← یکان

۳۳. گزینه ۲ با توجه به شرایط مسئله، پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست

انجام می‌دهیم:

$$\frac{5, 6, 7, 8}{\text{یکان}} \times \frac{1, 3, 5, 6, 7, 8}{\text{دهگان}} \times \frac{1, 3, 5, 6, 7, 8}{\text{صدگان}} \times \frac{1, 3, 5, 6, 7, 8}{\text{دهزارگان}} \times \frac{2}{\text{ده هزارگان}} = 480$$

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه بعدی رفته‌ایم، یک رقم دلخواه از خانه قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانه دوم از چپ، به دلخواه عدد ۸ را که در خانه اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۸ می‌توانید ۵ یا ۶ یا ۷ را خط بزیند، هیچ فرقی ندارد.

ترتیب پرکردن خانه‌ها: ده‌هزارگان ← بقیه با هر ترتیبی درست!

۳۴. گزینه ۱ ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی عبارت‌اند از ۱, ۳, ۵, ۷, ۹.

در یکان فقط از ۵ می‌توانیم استفاده کنیم تا عددمان مضرب ۵ باشد؛ ضمناً اولین خانه سمت چپ فقط می‌تواند ۷ یا ۹ باشد (چون عددمان باید بزرگ‌تر از ۷۰۰۰۰ باشد)، پس خواهیم داشت:

$$\frac{7, 9}{\text{یکان}} \times \frac{1, 3, 5, 7, 9}{\text{دهگان}} \times \frac{1, 3, 5, 7, 9}{\text{صدگان}} \times \frac{1, 3, 5, 7, 9}{\text{ده هزارگان}} \times \frac{1}{\text{ده هزارگان}} = 12$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← ده‌هزارگان ← هزارگان ← صدگان

۳۵. گزینه ۱ برای آن که عدد مطلوب بین ۳۰۰۰ و ۶۰۰۰ باشد، رقم

هزارگان آن (اولین خانه سمت چپ) فقط می‌تواند ۳ یا ۴ یا ۵ باشد؛ لذا به شکل

$$\frac{3, 4, 5}{\text{یکان}} \times \frac{0, 2, 4, 5, 6, 7}{\text{دهگان}} \times \frac{0, 2, 4, 5, 6, 7}{\text{صدگان}} \times \frac{0, 2, 4, 5, 6, 7}{\text{ده هزارگان}} = 180$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هزارگان ← بقیه با هر ترتیبی درست!

۳۶. گزینه ۱ از صدگان شروع می‌کنیم که ۴ حالت دارد (۱, ۲, ۳, ۴).

برای دهگان ۹ حالت داریم (صفر تا ۹ به جز رقمی که در صدگان آمده).

برای یکان هم ۸ حالت می‌ماند (صفر تا ۹ به جز دو رقمی که تا این جا استفاده شدند).

$$\frac{9 \text{ تا } 0}{\text{به جز صدگان}} \times \frac{9 \text{ تا } 0}{\text{به جز صدگان و دهگان}} \times \frac{8}{\text{یکان}} = 288$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

دهگان	یکان
۸	۰
۷	۱
۶	۲
۵	۳
۴	۴
۳	۵
۲	۶
۱	۷
۰	۸

۳۷. گزینه ۳ رقم صدگان این عدد، ۶ حالت

دارد: ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸

حالا تمام حالت‌هایی که مجموع رقم یکان و دهگان، ۸ می‌شود را می‌نویسیم که ۹ حالت می‌شود.

پس طبق اصل ضرب، برای صدگان ۶ حالت و برای یکان و دهگان (با هم) ۹ حالت داریم:

$$\frac{3, 4, 5, 6, 7, 8}{\text{از جدول}} \times \frac{9}{\text{یکان و دهگان}} = 54$$



۴) رفت از مسیر پایین و برگشت از مسیر بالا باشد:

$$\frac{3}{C \text{ به } A} \times \frac{3}{D \text{ به } C} \times \frac{4}{B \text{ به } D} \times \frac{2}{A \text{ به } B} = 72$$

$$24 + 72 + 36 + 72 = 204$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

۴۴. گزینه ۲ دو حالت داریم:

۱) یکان و صدگان فرد و دهگان زوج باشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,3,5,7 & 2,4,6 & 1,3,5,7 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{3}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{یکان}} = 36 \end{array}$$

۲) یکان و صدگان زوج و دهگان فرد باشد:

$$\begin{array}{ccc} 2,4,6 & 1,3,5,7 & 2,4,6 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{2}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 24 \end{array}$$

$$36 + 24 = 60$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): یکان ← صدگان ← دهگان

۴۵. گزینه ۳ دو حالت داریم:

۱) تمام ارقام فرد باشند: برای صدگان ۵ حالت (۱، ۳، ۵، ۷، ۹) داریم. یکی از آن‌ها را در صدگان استفاده می‌کنیم، پس برای دهگان، ۴ حالت و به همین صورت برای یکان ۳ حالت می‌ماند:

$$\begin{array}{ccc} 1,3,5,7,9 & 1,3,5,7,9 & 1,3,5,7,9 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 60 \end{array}$$

۲) تمام ارقام زوج باشند: برای صدگان ۴ حالت (۲، ۴، ۶، ۸) داریم. برای دهگان، پنج حالت (۰، ۲، ۴، ۶، ۸) داریم ولی چون یکی از آن‌ها در صدگان استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای یکان هم ۳ حالت می‌ماند:

$$\begin{array}{ccc} 2,4,6,8 & 0,2,4,6,8 & 0,2,4,6,8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 48 \end{array}$$

$$60 + 48 = 108$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): صدگان ← دهگان ← یکان

۴۶. گزینه ۲ دو حالت داریم:

۱) رقم یکان و هزارگان هر دو فرد باشند:

$$\begin{array}{ccc} 1,3,5,7,9 & 1,3,5,7,9 & 1,3,5,7,9 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{5}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{یکان}} = 1120 \end{array}$$

۲) رقم یکان و هزارگان هر دو زوج باشند:

$$\begin{array}{ccc} 2,4,6,8 & 0,2,4,6,8 & 0,2,4,6,8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{4}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{یکان}} = 896 \end{array}$$

$$1120 + 896 = 2016$$

تعداد کل این اعداد، برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): هزارگان ← یکان ← صدگان

دهگان

۴۷. گزینه ۴ چون در یکان صفر می‌تواند قرار گیرد و تکرار مجاز نیست، باید دو حالت در نظر بگیریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3,4,5 & 1,2,3,4,6 & \text{صفر} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 20 \end{array}$$

۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ باشد):

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3,4,5 & 0,1,3,4,6 & 2,4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{یکان}} = 32 \end{array}$$

$$20 + 32 = 52$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): یکان ← صدگان ← دهگان

۴۸. گزینه ۳ چون تکرار ارقام مجاز نیست و صفر هم جزء ارقام داده شده است، لذا باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم، یکی وقتی یکان صفر باشد و دیگری وقتی یکان صفر نباشد (۶ یا ۸ باشد)؛ لذا داریم:

$$\begin{array}{ccc} 1,3,5,6,8 & 1,3,5,6,8 & 1,3,5,6,8 & \text{صفر} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{5}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 60 \end{array}$$

۲) یکان صفر نباشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,3,5,6,8 & 0,1,3,5,6 & 0,1,3,6 & 8 \text{ یا } 6 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{4}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{یکان}} = 96 \end{array}$$

تعداد کل اعداد برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان

دهگان

۴۹. گزینه ۲ عددی که مضرب ۵ است، باید یکانش صفر یا ۵ باشد. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{ccc} 6 \text{ تا } 1 & 6 \text{ تا } 6 \text{ جز } 0 & 1 \text{ تا } 6 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{6}{\text{صدگان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 30 \end{array}$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3,4,6 & 0,1,2,3,4,6 & 5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 25 \end{array}$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): یکان ← صدگان ← دهگان

۵۰. گزینه ۳ عددی که مضرب ۵ است، باید یکانش صفر یا ۵ باشد. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3,4,5 & 1,2,3,4,6 & 1,2,3,4 & \text{صفر} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{5}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 60 \end{array}$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3,4 & 0,1,2,3,4 & 0,1,2,4 & 5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{4}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 48 \end{array}$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

ترتیب پرکردن خانهها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان

دهگان

۵۱. گزینه ۳ با ارقام {۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸} باید عدد ۴ رقمی زوج بنویسیم. چون صفر در یکان می‌تواند باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{ccc} 1,2,3,4,6,7,8 & 1,2,3,4,6,7,8 & \text{صفر} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{7}{\text{هزارگان}} \times \frac{6}{\text{صدگان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 210 \end{array}$$



۵۵. گزینه ۳ رقم صدگان این عدد، ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ است. در دو حالت

تعداد این اعداد را می‌شماریم:

(۱) صدگان ۴ یا ۶ باشد:

$$\frac{4,6}{2} \times \frac{0,1,2,3,4,5}{5} \times \frac{0,2,4,6}{3} = 30$$

صدگان دهگان یکان

(۲) صدگان ۳ یا ۵ باشد:

$$\frac{3,5}{2} \times \frac{0,1,2,3,4,6}{5} \times \frac{0,2,4,6}{4} = 40$$

صدگان دهگان یکان

تعداد کل این اعداد برابر است با: $30 + 40 = 70$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ← یکان ← دهگان

۵۶. گزینه ۳ رقم یکان صفر یا ۵ است، پس دو حالت داریم. بعد از پرکردن یکان، در هر دو حالت باید سراغ هزارگان برویم (چون محدودیت کوچک‌تر از ۶۰۰۰ بودن را داریم).

(۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{1,2,3,5}{4} \times \frac{4,6,7,8}{5} \times \frac{1,3,5,7,8}{4} \times \frac{0}{1} = 80$$

صدگان دهگان یکان

(۲) یکان ۵ باشد:

$$\frac{1,2,3}{3} \times \frac{4,6,7,8}{5} \times \frac{1,3,5,7,8}{4} \times \frac{5}{1} = 60$$

صدگان دهگان یکان

تعداد کل حالات برابر است با: $80 + 60 = 140$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۵۷. گزینه ۲ تمام حالاتی که دورقم یکسان (یعنی ۲ تا رقم ۴) کنار هم هستند را می‌نویسیم:

(۱) رقم ده‌هزارگان و هزارگان، ۴ باشند:

$$\frac{4}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{1,2,3}{3} \times \frac{1,2,4}{2} \times \frac{1,4}{1} = 6$$

ده‌هزارگان هزارگان صدگان دهگان یکان

(۲) رقم هزارگان و صدگان، ۴ باشند:

$$\frac{1,2,3}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{1,2,4}{2} \times \frac{1,4}{1} = 6$$

ده‌هزارگان هزارگان صدگان دهگان یکان

(۳) رقم صدگان و دهگان، ۴ باشند:

$$\frac{1,2,3}{3} \times \frac{1,2,4}{2} \times \frac{4}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{1,4}{1} = 6$$

ده‌هزارگان هزارگان صدگان دهگان یکان

(۴) رقم دهگان و یکان، ۴ باشند:

$$\frac{1,2,3}{3} \times \frac{1,2,4}{2} \times \frac{1,4}{2} \times \frac{4}{1} \times \frac{1,4}{1} = 6$$

ده‌هزارگان هزارگان صدگان دهگان یکان

پس تعداد کل حالات برابر است با: $6 + 6 + 6 + 6 = 24$

۵۸. گزینه ۴ اگر رقم یک عدد ۴ رقمی فرد باشد، باید آن زوج باشد.

۴ حالت داریم:

(۱) فقط یکان زوج باشد:

$$\frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{5}{5} = 300$$

صدگان دهگان یکان

(۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد):

$$\frac{0,1,2,3,4,6,8}{6} \times \frac{2,4,6,8}{4} \times \frac{0,1,2,3,4,6}{6} \times \frac{2,4,6,8}{4} = 720$$

هزارگان صدگان دهگان یکان

پس تعداد کل اعداد برابر است با: $210 + 720 = 930$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۵۲. گزینه ۳ در ۳ حالت بررسی می‌کنیم:

(۱) فقط یکان زوج باشد (دهگان و صدگان فرد):

$$\frac{1,3,5,7,9}{5} \times \frac{1,3,5,7,9}{5} \times \frac{0,2,4,6,8}{4} = 100$$

صدگان دهگان یکان

(۲) فقط دهگان زوج باشد (یکان و صدگان فرد):

$$\frac{1,3,5,7,9}{5} \times \frac{0,2,4,6,8}{4} \times \frac{1,3,5,7,9}{4} = 100$$

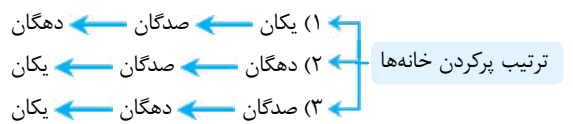
صدگان دهگان یکان

(۳) فقط صدگان زوج باشد (یکان و دهگان فرد):

$$\frac{2,4,6,8}{4} \times \frac{1,3,5,7,9}{5} \times \frac{1,3,5,7,9}{4} = 80$$

صدگان دهگان یکان

مجموع سه حالت بالا برابر است با: $100 + 100 + 80 = 280$



۵۳. گزینه ۳ باید دو حالت جداگانه برای حل این سؤال در نظر بگیریم.

یکی وقتی که اولین خانه سمت چپ ۳ باشد و دیگری وقتی اولین خانه سمت چپ ۴ یا ۵ باشد.

(۱) صدگان ۳ باشد:

$$\frac{3}{1} \times \frac{4,5}{2} \times \frac{0,1,2,4,6,8}{4} = 8$$

صدگان دهگان یکان

(۲) صدگان ۴ یا ۵ باشد:

$$\frac{5,4}{2} \times \frac{0,1,2,3,6,8}{5} \times \frac{0,1,2,3,6,8}{4} = 40$$

صدگان دهگان یکان

پس تعداد کل حالات برابر است با: $8 + 40 = 48$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ← دهگان ← یکان

۵۴. گزینه ۱ دو حالت داریم:

(۱) هزارگان ۵ باشد:

$$\frac{5}{1} \times \frac{0,2,4}{2} \times \frac{0,2,4,6,8}{4} \times \frac{0,2,6,8}{3} = 36$$

هزارگان صدگان دهگان یکان

(۲) هزارگان ۲ یا ۴ باشد:

$$\frac{2,4}{2} \times \frac{0,2,4,5,6,8}{5} \times \frac{0,2,5,6,8}{4} \times \frac{0,2,5,6,8}{3} = 120$$

هزارگان صدگان دهگان یکان

پس تعداد کل این اعداد، برابر است با: $36 + 120 = 156$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): هزارگان ← صدگان ← دهگان ← یکان

(۲) فقط دهگان زوج باشد:

$$\overset{0,2,4,6,8}{\uparrow} \frac{5}{\text{هزارگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 300$$

(۳) فقط صدگان زوج باشد:

$$\overset{0,2,4,6,8}{\uparrow} \frac{5}{\text{هزارگان}} \times \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 300$$

(۴) فقط هزارگان زوج باشد:

$$\overset{2,4,6,8}{\uparrow} \frac{4}{\text{هزارگان}} \times \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 240$$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $300 + 300 + 300 + 240 = 1140$

۵۹. گزینه ۲ با توجه به این که عدد مورد نظرمان باید بین ۲۶۰۰ و ۸۰۰۰ باشد، پس هزارگان آن می تواند ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ باشد.

در ۴ حالت، این اعداد را می شماریم:

$$\overset{2}{\uparrow} \overset{6}{\uparrow} \overset{\text{صفر}}{\uparrow} \frac{1}{\text{یکان}} \times \frac{1}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{1}{\text{هزارگان}} = 4$$

هزارگان ۲ و صدگان ۶ باشد

$$\overset{2}{\uparrow} \overset{9 \text{ یا } 7}{\uparrow} \overset{6 \text{ یا } 0}{\uparrow} \frac{1}{\text{یکان}} \times \frac{2}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{2}{\text{هزارگان}} = 16$$

هزارگان ۲ و صدگان ۷ یا ۹ باشد

$$\overset{6}{\uparrow} \overset{2 \text{ یا } 0}{\uparrow} \frac{1}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{2}{\text{هزارگان}} = 40$$

هزارگان ۶ باشد

$$\overset{7 \text{ یا } 3}{\uparrow} \overset{6 \text{ یا } 0}{\uparrow} \frac{2}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{هزارگان}} = 120$$

هزارگان ۳ یا ۷ باشد

تعداد کل حالات برابر است با: $4 + 16 + 40 + 120 = 180$

۶۰. گزینه ۳

تعداد کل اعداد ۳ رقمی که می توانیم با ارقام صفر تا ۶ بنویسیم، برابر است با:

$$\overset{6 \text{ تا } 1}{\uparrow} \overset{6 \text{ تا } 0}{\uparrow} \overset{6 \text{ تا } 0}{\uparrow} \frac{6}{\text{صدگان}} \times \frac{7}{\text{دهگان}} \times \frac{7}{\text{یکان}} = 294$$

تعداد کل اعداد ۳ رقمی با ارقام صفر تا ۶، بدون ارقام تکراری، برابر است با:

$$\overset{6 \text{ تا } 1}{\uparrow} \overset{6 \text{ تا } 0 \text{ به جز صدگان}}{\uparrow} \overset{6 \text{ تا } 0}{\uparrow} \frac{6}{\text{صدگان}} \times \frac{6}{\text{دهگان}} \times \frac{5}{\text{یکان}} = 180$$

پس طبق اصل متمم، داریم:

$$1140 - 180 = 294 = \text{بدون رقم تکراری} - \text{کل} = \text{با رقم تکراری}$$

۶۱. گزینه ۳ تعداد کل کلمات ۴ حرفی با ۶ حرف داده شده، برابر است با:

$$\frac{6}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{هزارگان}} = 360$$

تعداد کلماتی که حرف A ندارند، برابر است با:

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{صدگان}} \times \frac{2}{\text{هزارگان}} = 120$$

پس طبق اصل متمم، داریم:

$$360 - 120 = 240 = \text{با حرف A} - \text{بدون حرف A} - \text{کل}$$

۶۲. گزینه ۴ اعداد سه رقمی را می توانیم به دو دسته تقسیم کنیم:

«اعدادی که شامل رقم ۸ هستند» و «اعدادی که شامل رقم ۸ نیستند».

ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی را حساب می کنیم:

$$\frac{9}{\text{یکان}} \times \frac{10}{\text{دهگان}} \times \frac{10}{\text{صدگان}} = 900$$

حالا تعداد اعداد سه رقمی که شامل رقم ۸ نیستند را حساب می کنیم:

$$\frac{8}{\text{یکان}} \times \frac{9}{\text{دهگان}} \times \frac{9}{\text{صدگان}} = 648$$

(تعداد اعداد سه رقمی) - (تعداد کل اعداد سه رقمی) = تعداد اعداد سه رقمی که رقم ۸ ندارند

$$= 900 - 648 = 252$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$0! = 1$$

$$6! - 5! + 0! = 720 - 120 + 1 = 601$$

پس:

۶۳. گزینه ۲ هر کدام از کسرهای ساده می کنیم:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$$

$$\frac{13!}{12!} = \frac{13 \times 12!}{12!} = 13$$

$$\frac{10!}{8!} - \frac{13!}{12!} = 90 - 13 = 77$$

پس:

۶۴. گزینه ۴ جای ۲۶! می نویسیم $25! \times 26$ و بعد در صورت و مخرج از ۲۵!، فاکتور می گیریم:

$$\frac{26! + 25!}{26! - 25!} = \frac{26(25!) + 25!}{26(25!) - 25!} = \frac{25!(26+1)}{25!(26-1)} = \frac{27}{25}$$

$$\frac{108}{100} = 1.08 \rightarrow \text{صورت و مخرج ضرب در ۴}$$

۶۵. گزینه ۴ حاصل a و b را پیدا می کنیم:

$$a = \underbrace{5! + 5! + \dots + 5!}_6 = 6 \times 5! = 6!$$

$$b = \frac{10!}{90} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{90} = 8!$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$$

پس:

۶۶. گزینه ۲ در چهار عمل اصلی، نمی توانیم حاصل را بدون بازکردن فاکتوریل، به دست آوریم. پس روابط (الف) و (ب) قطعاً نادرست هستند. هم چنین

دقت کنید که نمی توانیم از یک عددی که نماد فاکتوریل دارد و زیر رادیکال است، بدون محاسبه جذر بگیریم؛ یعنی رابطه $\sqrt{9!} = 3!$ نادرست است (بدون توجه به فاکتوریل، فقط از ۹ جذر گرفته شده). یعنی ابتدا باید حاصل ۹! را حساب کرد، سپس از آن جذر گرفت. روابط (پ)، (ت) و (ج) همگی درست هستند.

درستی قسمت (ج) نیز که بدیهی است، فقط (پ) و (ت) را اثبات می کنیم:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n \quad (\text{پ})$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases} \Rightarrow (0!)^2 = (1!)^2 \quad (\text{ت درست است.})$$

از طرفی 24 برابر با $4!$ است: $n-1=4 \Rightarrow n=5$
 ما الان جایگشت $n+1$ شیء را می‌خواهیم که می‌شود:

$$(n+1)! = (5+1)! = 6! = 720$$

۷۶. گزینه ۲ در کل ۶ نفر داریم.

تعداد حالت‌های سخنرانی n نفر، $n!$ است. پس تعداد حالات سخنرانی ۶ نفر، $6!$ است.

۷۷. گزینه ۱ می‌دانیم n شیء یا n نفر به $n!$ حالت مختلف می‌توانند در

صف کنار هم قرار بگیرند. لذا نفر به $12!$ حالت می‌توانند در یک صف قرار بگیرند. از طرفی $12!$ برابر است با $11! \times 12$.

۷۸. گزینه ۳ باید $(n+2)!$ ، 21×0 برابر $(n-1)!$ باشد:

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 21 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 21$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)n = 21$$

حاصل ضرب ۳ عدد متوالی (یعنی n ، $n+1$ و $n+2$) برابر با 21 است.

باید 21 را به صورت حاصل ضرب ۳ عدد متوالی بنویسیم: $5 \times 6 \times 7 = 21$
 پس $n = 5$ است.

در نتیجه: $\frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$

۷۹. گزینه ۳ راه ۱ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.
 $\frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 6$ تا جا و ۵ تا شیء داریم:

راه ۲ از فرمول $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ کمک بگیریم:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

۸۰. گزینه ۱ جایگشت‌های r شیء از n شیء (تشکیل صف r تایی با n نفر)، برابر با $P(n, r)$ است.

پس در این‌جا، تعداد صف‌های ۳ نفره با ۷ نفر، برابر است با: $P(7, 3)$

تذکره ۱ البته از اصل ضرب هم می‌توانستیم تعداد حالات را حساب کنیم:

$$\frac{7}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} = 21$$

ولی جواب با رابطه P در گزینه‌ها آمده بود!

۸۱. گزینه ۳ راه ۱ هرکدام از مسافرها می‌توانند در ۵ ایستگاه از

اتوبوس پیاده شوند، پس: $\frac{5}{3} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{1} = 5^3$
 مسافری ۳ مسافر ۲ مسافر ۱

تذکره ۲ شاید تعجب کنید که چرا این تست وسط سؤالی تبدیل آمده!

خواستیم یک شوک به شما وارد کنیم تا حواستان بیشتر به مفاهیم باشد!

۸۲. گزینه ۱ راه ۱ از اصل ضرب کمک می‌گیریم:

$$\frac{12}{11} \times \frac{11}{10} \times \frac{10}{9} = 1320$$

راه ۲

$$P(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

۸۳. گزینه ۴ با استفاده از رابطه $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ، باید

$$n - r = 8 \text{ و } n = 12$$

$$n - r = 8 \xrightarrow{n=12} 12 - r = 8 \Rightarrow r = 4$$

پس $P(12, 4)$ برابر با $\frac{12!}{8!}$ می‌شود.

۶۸. گزینه ۳ می‌دانیم $4!$ می‌شود 24 .

پس $x^2 + x - 2 = 4$ باید 4 باشد:

$$x^2 + x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها برابر است با:

۶۹. گزینه ۴ حاصل ۲ عبارت فاکتوریلی، ۱ می‌شود: $1! = 1$ و $0! = 1$

پس $x^2 - 4 = 0$ باید صفر یا ۱ باشد:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

پس معادله، ۴ جواب حقیقی دارد.

۷۰. گزینه ۳ دو کسر را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\frac{(n+1)!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!} = (n+1) + n = 2n+1$$

۷۱. گزینه ۳ اول معادله داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 8 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = 8 \Rightarrow n+2 = 8 \Rightarrow n = 6$$

$$\frac{n!}{4!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$$

۷۲. گزینه ۳ اول معادله داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)(n)(n-1)!} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{6} \Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = -3 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

به ازای $n = -3$ ، $(n+2)!$ می‌شود $(-1)!$ که تعریف نمی‌شود.

به ازای $n = 2$ ، $(n+2)!$ می‌شود: $(2+2)! = 4! = 24$

۷۳. گزینه ۲ به ۷ دست نمی‌زنیم و ۶ را باز می‌کنیم:

$$7! \times 6! = 7! \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

$$7! \times 8 \times 3 \times 5 \times 6 = 8! \times 3 \times 5 \times 6$$

$$8! \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$$

$$8! \times 9 \times 10$$

عبارت بالا همان $10!$ است، پس:

$$\frac{(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{9!}{8!} = \frac{9 \times 8!}{8!} = 9$$

۷۴. گزینه ۴ تعداد جایگشت‌های n شیء، برابر با $n!$ است.

در این‌جا ۵ شیء داریم، پس:

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

۷۵. گزینه ۴ تعداد جایگشت‌های $n-1$ شیء، برابر با $(n-1)!$ است.

پس باید $(n-1)!$ با 24 برابر باشد:

۹۰. گزینه ۲) ۶ خانه رسم می‌کنیم، خانه اول و آخر فقط به یک حالت پُر می‌شوند (با حرف S). از بقیه حروف (A, I, S, T) برای پُر کردن خانه‌های باقی‌مانده استفاده می‌کنیم:

$$\frac{S}{\uparrow} \quad \frac{A, S, I, T}{\uparrow} \quad \frac{A, S, I, T}{\uparrow} \quad \frac{A, S, I}{\uparrow} \quad \frac{A, S, I}{\uparrow} \quad \frac{A, S, I}{\uparrow} \quad \frac{S}{\uparrow}$$

$$\frac{1}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم تا پنجم}} \times \frac{3}{\text{حرف سوم}} \times \frac{2}{\text{حرف چهارم}} \times \frac{1}{\text{حرف پنجم}} \times \frac{1}{\text{حرف آخر}} = 24$$

ترتیب پُر کردن خانه‌ها: حرف اول و آخر ← حرف دوم تا پنجم

۹۱. گزینه ۱) راه I) حرف S در ۴ جایگاه می‌تواند قرار بگیرد:

۱) حرف اول، S باشد. برای ۳ خانه باقی‌مانده از حرف {D, A, N, E, H} استفاده می‌کنیم:

$$\frac{S}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow}$$

$$\frac{1}{\text{حرف اول}} \times \frac{5}{\text{حرف دوم}} \times \frac{4}{\text{حرف سوم}} \times \frac{3}{\text{حرف چهارم}} = 60$$

۲) حرف دوم، S باشد:

$$\frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{S}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow}$$

$$\frac{5}{\text{حرف اول}} \times \frac{1}{\text{حرف دوم}} \times \frac{4}{\text{حرف سوم}} \times \frac{3}{\text{حرف چهارم}} = 60$$

۳) حرف سوم، S باشد:

$$\frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{S}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow}$$

$$\frac{5}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم}} \times \frac{1}{\text{حرف سوم}} \times \frac{3}{\text{حرف چهارم}} = 60$$

۴) حرف چهارم، S باشد:

$$\frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{D, A, N, E, H}{\uparrow} \quad \frac{S}{\uparrow}$$

$$\frac{5}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم}} \times \frac{3}{\text{حرف سوم}} \times \frac{1}{\text{حرف چهارم}} = 60$$

تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $60 + 60 + 60 + 60 = 240$

راه II) از اصل متمم استفاده کنیم.

تمام رمزهای ۴ حرفی با ۶ حرف {D, A, N, E, S, H} را می‌نویسیم:

$$\frac{6}{\text{حرف اول}} \times \frac{5}{\text{حرف دوم}} \times \frac{4}{\text{حرف سوم}} \times \frac{3}{\text{حرف چهارم}} = 360$$

تمام رمزهای ۴ حرفی که S ندارند را می‌نویسیم:

$$\frac{5}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم}} \times \frac{3}{\text{حرف سوم}} \times \frac{2}{\text{حرف چهارم}} = 120$$

پس: (رمزهایی که S ندارند) - (کل رمزها) = رمزهایی که S دارند
 $360 - 120 = 240$

۹۲. گزینه ۳) راه I) چون تعداد کتاب‌های زبان، یکی بیشتر از تعداد کتاب‌های ریاضی است، پس شروع صف باید با کتاب زبان باشد.

در کل ۹ تا جایگاه داریم و نحوه پُر شدن به صورت زیر است:

زبان ریاضی زبان ریاضی زبان ریاضی زبان ریاضی زبان

کتاب‌های زبان در جای خودشان، به ۵! حالت و کتاب‌های ریاضی در جای خودشان به ۴! حالت می‌توانند قرار بگیرند:

$$\frac{5}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{4}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{4}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{3}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{3}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{2}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{2}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{1}{\text{زبان ریاضی}} \times \frac{1}{\text{زبان ریاضی}}$$

پس تعداد کل حالات قرارگرفتن کتاب‌ها برابر است با: $5! \times 4!$
 ریاضی زبان

راه II) با توجه به نکته گفته‌شده در درس‌نامه داریم: کتاب‌های زبان، یکی بیشتر از کتاب‌های ریاضی است، پس تعداد حالت‌ها برابر است با $5! \times 4!$.

۹۳. گزینه ۲) راه I) حروف صدادار {u, a, e} و حروف بی‌صدا {s, r, z} هستند.

چون تعداد هر دو دسته یکسان است، پس چینش آن‌ها، ۲ حالت دارد:

۸۴. گزینه ۴) با استفاده از فرمول $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ، صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

• صورت: $P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$

• مخرج: $P(5, 1) = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$

پس: $\frac{P(10, 2)}{P(5, 1)} = \frac{90}{5} = 18$

۸۵. گزینه ۲) اول عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$P(n+1, n) = \frac{(n+1)!}{(n+1-n)!} = \frac{(n+1)!}{1!} = (n+1)!$$

حالا $(n+1)!$ را برابر با ۶ قرار می‌دهیم:

جای ۶ می‌توانیم از ۳! استفاده کنیم:

$$(n+1)! = 6 \Rightarrow n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

۸۶. گزینه ۳) اول عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

عبارت به دست آمده را با ۵۶ برابر قرار می‌دهیم:

اگر ۵۶ را به صورت ضرب دو عدد متوالی بنویسیم، نیازی به حل معادله نیست:

$$n(n-1) = 56 \times 7$$

پس $n = 8$

۸۷. گزینه ۳) سمت چپ تساوی یعنی $P(n+2, 3)$ را معنی می‌کنیم:

$(n+2)$ تا شیء و ۳ جا داریم. تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{n+2}{\text{جای سوم}} \times \frac{n+1}{\text{جای دوم}} \times \frac{n}{\text{جای اول}}$$

پس: $P(n+2, 3) = (n+2)(n+1)(n)$

معادله داده‌شده، ساده‌تر می‌شود:

$$P(n+2, 3) = 12n(n+2) \Rightarrow (n+2)(n+1)(n) = 12n(n+2) \Rightarrow n+1 = 12$$

$$\Rightarrow n = 11$$

۸۸. گزینه ۴) چون کلمه «تمساح» فارسی است بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم.

دقت کنید خانه اول و آخر، فقط ۱ حالت دارند و ۳ حرف برای ۳ خانه دیگر می‌ماند:

$$\frac{م, س, الف}{\uparrow} \quad \frac{م, س, الف}{\uparrow} \quad \frac{م, س, الف}{\uparrow} \quad \frac{م, س, الف}{\uparrow} \quad \frac{ح}{\uparrow}$$

$$\frac{1}{\text{حرف اول}} \times \frac{1}{\text{حرف دوم}} \times \frac{2}{\text{حرف سوم}} \times \frac{3}{\text{حرف چهارم}} \times \frac{1}{\text{حرف آخر}} = 6$$

ترتیب پُر کردن خانه‌ها: حرف اول ← حرف آخر ← حرف دوم، سوم و چهارم.
 ۸۹. گزینه ۲) با خانه اول شروع می‌کنیم که محدودیت دارد.

خانه اول باید «م» نباشد، پس ۴ حالت دارد (ت، س، الف، ح).

یکی از ۴ حرف بالا (مثلاً ت) استفاده شده و برای خانه‌های دیگر حرف «م» به ۳ حرف باقی‌مانده اضافه می‌شود.

$$\frac{ت, س, الف, ح}{\uparrow} \quad \frac{ک, س, الف, ح, م}{\uparrow} \quad \frac{م, ک, الف, ح, م}{\uparrow} \quad \frac{م, ک, الف, ح, م}{\uparrow} \quad \frac{م, ح}{\uparrow}$$

$$\frac{4}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم}} \times \frac{3}{\text{حرف سوم}} \times \frac{3}{\text{حرف چهارم}} \times \frac{2}{\text{حرف پنجم}} = 96$$

ترتیب پُر کردن خانه‌ها: حرف اول ← حرف دوم، سوم و چهارم و پنجم



در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۴! می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌ها یکسان است، پس داخلشان جایگشتی ندارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $4! \times 1 \times 1 \times 1 = 24$

بسته ۱ بسته ۲ بسته ۳ بسته ۴ بسته

حروف «دلبر» را در یک بسته قرار می‌دهیم:



بسته ۴ بسته ۳ بسته ۲ بسته ۱ بسته

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۴! می‌شود.

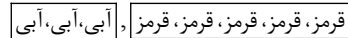
داخل بسته ۱ جایگشتی نداریم، چون حروف حق جابه‌جایی ندارند (باید کلمه «دلبر» باشد نه مثلاً «ربدل»).

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$4! \times 1 = 24 \times 1 = 24$

جایگشت بسته‌ها

خودکارهای هم‌رنگ را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:



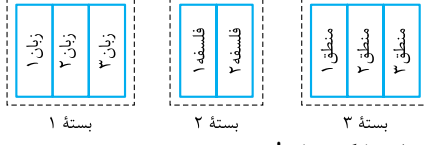
در کل ۲ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۲! می‌شود.

چون داخل بسته‌ها، اشیای یکسانی داریم، پس جایگشتی نداریم.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $2! \times 1 \times 1 = 2$

قرمزها آبی‌ها بسته‌ها

کتاب‌های هم‌موضوع را در یک بسته قرار می‌دهیم:



در کل ۳ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۳! می‌شود.

جایگشت کتاب‌های داخل بسته ۱، ۳! حالت دارد. هم‌چنین جایگشت کتاب‌های

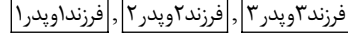
داخل بسته ۲ و ۳ به ترتیب ۲! و ۳! حالت دارند.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$3! \times 3! \times 2! \times 3! = 6 \times 6 \times 2 \times 6 = 432$

فلسفه‌ها بسته‌ها

هر فرزند را به همراه پدرش در یک بسته قرار می‌دهیم:



این ۳ بسته را به ۳! حالت می‌توانیم کنار هم قرار دهیم.

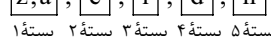
داخل هر بسته، جای پدر و فرزند می‌تواند عوض شود، پس داخل هر بسته، ۲!

حالت داریم.

در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با: $3! \times (2!)^3 = 6 \times 8 = 48$

داخل بسته‌ها بسته‌ها

دو حرف a و z را در یک بسته قرار می‌دهیم:



بسته ۵ بسته ۴ بسته ۳ بسته ۲ بسته ۱ بسته

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۵! می‌شود.

جایگشت حروف داخل بسته ۱، ۲! است.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$

جایگشت داخل بسته ۱

(۱) با صدادار شروع شود:

$\frac{3}{u,a,e} \times \frac{3}{s,r,z} \times \frac{2}{x,a,e} \times \frac{2}{x,r,z} \times \frac{1}{x,e} \times \frac{1}{x,z} = 36$

(۲) با بی‌صدا شروع شود:

$\frac{3}{بی\ صدا} \times \frac{3}{بی\ صدا} \times \frac{2}{بی\ صدا} \times \frac{2}{بی\ صدا} \times \frac{1}{بی\ صدا} \times \frac{1}{بی\ صدا} = 36$

پس تعداد کل جایگشت‌ها، برابر است با: $36 + 36 = 72$

ترتیب پرکردن (در هر دو حالت): خانه ۱، ۳ و ۵ ← خانه ۲، ۴ و ۶

راه II

تعداد حروف صدادار و بی‌صدا با هم برابر است و می‌خواهیم یکی درمیان باشند. پس داریم: $2 \times n! \times n! = 2 \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = 72$

۹۴. گزینه ۴ برای آن که تا ۳ S، یکی درمیان قرار گیرند، ۲ حالت داریم:

(۱) Sها در جایگاه اول، سوم و پنجم باشند و ۳ حرف I، A، T در جایگاه‌های زوج:

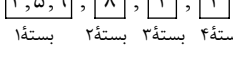
$\frac{1}{S} \times \frac{3}{A,I,T} \times \frac{1}{S} \times \frac{2}{A,I,T} \times \frac{1}{S} \times \frac{1}{A,I,T} = 6$

(۲) برعکس حالت بالا:

$\frac{3}{A,I,T} \times \frac{1}{S} \times \frac{2}{A,I,T} \times \frac{1}{S} \times \frac{1}{A,I,T} \times \frac{1}{S} = 6$

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $6 + 6 = 12$

۹۵. گزینه ۴ اعداد فرد را در یک بسته قرار می‌دهیم:



در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۴! می‌شود.

جایگشت اعداد داخل بسته ۱، ۳! حالت دارد.

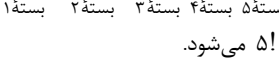
پس تعداد کل حالات برابر است با:

$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

جایگشت داخل بسته ۱

۹۶. گزینه ۳ مضارب ۳ را در یک بسته و مضارب ۴ را هم در یک بسته

قرار می‌دهیم:



در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۵! می‌شود.

جایگشت اعداد داخل بسته ۱، ۲! حالت و جایگشت اعداد داخل بسته ۲ نیز،

۲! حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $5! \times 2! \times 2! = 120 \times 2 \times 2 = 480$

بسته ۲ بسته ۱ بسته

حروف یکسان را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:



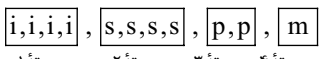
در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۵! می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌های ۱ و ۲ یکسان است، پس داخلشان جایگشتی ندارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$5! \times 1 \times 1 = 120$

حروف یکسان را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:



بسته ۴ بسته ۳ بسته ۲ بسته ۱ بسته

۱۰۴. گزینه ۲ | حرف a, z و d را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\boxed{a, z, d}, \boxed{e}, \boxed{i}, \boxed{n}$$

بسته ۴ بسته ۳ بسته ۲ بسته ۱ بسته

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۴! می‌شود.

جایگشت حروف داخل بسته ۳!، ۱، ۳! حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

جایگشت بسته‌ها ↑
جایگشت داخل بسته‌ها ↓

۱۰۵. گزینه ۱ | کلمه zad را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\boxed{zad}, \boxed{e}, \boxed{i}, \boxed{n}$$

بسته ۴ بسته ۳ بسته ۲ بسته ۱ بسته

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان ۴! می‌شود.

داخل بسته ۱، جایگشتی نداریم، چون حروف، حق جابه‌جایی ندارند (باید کلمه zad باشد نه مثلاً zda).

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$4! \times 1 = 24 \times 1 = 24$$

جایگشت بسته‌ها ↑
جایگشت داخل بسته‌ها ↓

۱۰۶. گزینه ۴ | از اصل متمم کمک می‌گیریم.

تعداد کل جایگشت‌های کلمه zeidan برابر با ۶! است.

تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف a و z کنار هم هستند را در ۳ تست قبل‌تر حساب کردیم که ۲۴۰ تا می‌شد.

پس: (a و z کنار هم باشند) - (کل حالات) = a و z کنار هم نباشند

$$= 6! - 240 = 720 - 240 = 480$$

۱۰۷. گزینه ۴ |

تعداد جایگشت‌هایی که a و z کنار هم هستند را حساب می‌کنیم:

$$\boxed{a, z}, \boxed{e}, \boxed{i}, \boxed{d}, \boxed{n}$$

$$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

جایگشت ۵ بسته ↑
جایگشت داخل بسته‌های a و z ↓

حالا در این ۲۴۰ حالت، یا e و n کنار هم هستند یا کنار هم نیستند.

تعداد حالاتی که e و n کنار هم هستند (a و z هم باید کنار هم باشند) را

حساب می‌کنیم:

$$\boxed{a, z}, \boxed{e, n}, \boxed{i}, \boxed{d} \Rightarrow 4! \times 2! \times 2! = 24 \times 2 \times 2 = 96$$

بسته ۴ بسته e و n ↑
بسته ۲ a و z ↓

حالا از ۲۴۰ حالت، ۹۶ حالتی که e و n کنار هم هستند را کنار می‌گذاریم:

$$(a \text{ و } z \text{ کنار هم و } e \text{ و } n \text{ کنار هم}) - (a \text{ و } z \text{ کنار هم و } e \text{ و } n \text{ کنار هم نباشند}) = 240 - 96 = 144$$

۱۰۸. گزینه ۳ | تمام حالاتی که در یک عدد ۴ رقمی، دو رقم ۵ و ۶ کنار هم

هستند را می‌نویسیم:

$$1) \quad \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{5} \underline{\quad} \underline{\quad} \quad \quad \quad 2) \quad \underline{\quad} \underline{6} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$$

$$3) \quad \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{5} \underline{6} \underline{\quad} \underline{\quad} \quad \quad \quad 4) \quad \underline{\quad} \underline{6} \underline{5} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$$

$$5) \quad \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{5} \underline{6} \underline{\quad} \underline{\quad} \quad \quad \quad 6) \quad \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{6} \underline{5} \underline{\quad} \underline{\quad}$$

در تمام ۶ حالت بالا، دو خانه خالی را باید با ۴ رقم {۱، ۲، ۳، ۷} پر کنیم، که اولی ۴ حالت و دومی ۳ حالت دارد، پس هر کدام ۱۲ حالت دارند و در کل $72 = 6 \times 12$ حالت داریم.

۱۰۹. گزینه ۲ | ۵ جایگاه برای نشستن داریم:

$$\frac{3}{\text{صندلی راننده}} \times \frac{4}{\text{صندلی ۱}} \times \frac{3}{\text{صندلی ۲}} \times \frac{2}{\text{صندلی ۳}} \times \frac{1}{\text{صندلی ۴}}$$

در صندلی راننده، ۳ نفر می‌توانند قرار بگیرند:

$$\frac{3}{\text{صندلی راننده}} \times \frac{4}{\text{صندلی ۱}} \times \frac{3}{\text{صندلی ۲}} \times \frac{2}{\text{صندلی ۳}} \times \frac{1}{\text{صندلی ۴}}$$

پس الان ۴ نفر داریم. این ۴ نفر را در ۴ صندلی دیگر قرار دهیم.

$$\frac{3}{\text{صندلی راننده}} \times \frac{4}{\text{صندلی ۱}} \times \frac{3}{\text{صندلی ۲}} \times \frac{2}{\text{صندلی ۳}} \times \frac{1}{\text{صندلی ۴}}$$

$$= 3 \times 24 = 72$$

۱۱۰. گزینه ۴ | برای صندلی راننده، ۲ انتخاب داریم.

الان ۵ نفر و ۷ صندلی داریم.

به هر کدام از این ۵ نفر یک صندلی اختصاص می‌دهیم:

$$\frac{7}{\text{نفر پنجم}} \times \frac{6}{\text{نفر چهارم}} \times \frac{5}{\text{نفر سوم}} \times \frac{4}{\text{نفر دوم}} \times \frac{3}{\text{نفر اول}} = 2520$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$2 \times 2520 = 5040$$

نشستن ۵ نفر روی ۷ صندلی دیگر

۱۱۱. گزینه ۲ | ابتدا باید جایگاه دو حرف S را در کلمات مختلفی که ساخته

می‌شود، مشخص کنیم:

$$\begin{array}{c} M, A, H, U \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ M, A, H, U \end{array}$$

$$1) \quad \boxed{S} \boxed{4} \boxed{S} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$2) \quad \boxed{4} \boxed{S} \boxed{3} \boxed{S} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$3) \quad \boxed{4} \boxed{3} \boxed{S} \boxed{2} \boxed{S} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$4) \quad \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{S} \boxed{1} \boxed{S} \Rightarrow 4!$$

پس Sها چهار حالت مختلف خواهند داشت و جواب نهایی برابر می‌شود با:

$$4 \times 4! = 96$$

۱۱۲. گزینه ۲ | تمام حالت‌هایی که بین a و z، دو حرف می‌تواند قرار بگیرد

را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} e, i, d, \emptyset \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ e, i, d, n \end{array}$$

$$1) \quad \boxed{a} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{z} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$2) \quad \boxed{4} \boxed{a} \boxed{3} \boxed{z} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$3) \quad \boxed{4} \boxed{3} \boxed{a} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{z} \Rightarrow 4!$$

$$4) \quad \boxed{z} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{a} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$5) \quad \boxed{4} \boxed{z} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{a} \boxed{1} \Rightarrow 4!$$

$$6) \quad \boxed{4} \boxed{3} \boxed{z} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{a} \Rightarrow 4!$$

$$6 \times 4! = 6 \times 24 = 144$$

تعداد کل حالاتها برابر است با:

پس در این جا با جای گذاری $n=6$ و $r=2$ داریم:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!2!} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \times 1 = 3$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

پس در این جا با جای گذاری $n=10$ و $r=3$ داریم:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

برای صف باید از اصل ضرب یا تبدیل استفاده کنیم:

$$\frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} = 6$$

نفر سوم - نفر دوم - نفر اول

برای تیم باید از ترکیب استفاده کنیم. باید ۳ نفر از بین ۵ نفر انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

در کل $6+4=10$ یعنی ۱۰ تا مهره داریم.

می‌خواهیم ۳ مهره از ۱۰ مهره را انتخاب کنیم:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!3!} = \frac{720}{6} = 120$$

برای این کار کافی است یک گروه ۳ (یا ۵) نفره از این ۸ نفر

انتخاب کنیم. گروه دیگر هم با این کار، خودبه‌خود انتخاب شده است!

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

دقت کنید هر وقت شما یک گروه ۳ نفری می‌سازید، ۵ نفر باقی می‌مانند که خود

به خود یک گروه ۵ نفری تشکیل می‌دهند.

برای ساخت وتر، نیاز به انتخاب ۲ نقطه از بین ۱۰ نقطه

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

داریم:

برای ساخت مثلث، نیاز به انتخاب ۳ نقطه از بین ۱۰ نقطه

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

داریم:

تیم ۴ نفره به صورت زیر است:

$$\{ \text{علی}, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc \}$$

از ۹ نفری که داشتیم، علی انتخاب شده و بهزاد هم نباید انتخاب شود، پس

می‌ماند ۷ نفر؛ یعنی از این ۷ نفر باید ۳ نفر انتخاب کنیم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

سؤال اول که راه فرار ندارند و باید پاسخ دهیم.

پس از ۶ تا سؤال بعدی باید به ۳ تا پاسخ دهیم.

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!3!} = 20$$

از این ۶ سؤال، ۳ تا را انتخاب می‌کنیم:

به جملهٔ روبه‌رو دقت کنید: «گروه ۲ نفری یا گروه ۳ نفری»

↓
جمع

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

تعداد گروه‌های ۲ نفری برابر است با:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

تعداد گروه‌های ۳ نفری برابر است با:

$$28 + 56 = 84$$

مجموع این دو حالت برابر است با:

در کل، ۴ حرف داریم، پس در صورت ۴ می‌آید.

۲ تا حرف A تکرار می‌شود، پس در مخرج ۲ داریم.

$$\frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

در کل، ۶ حرف داریم، پس در صورت ۶ می‌آید.

$$\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

جایگاه حرف N مشخص شده، پس می‌توانیم حرف N را

حذف کنیم و با بقیهٔ حروف، کلمات ۶ حرفی بسازیم ولی حرف «E» ۲ بار تکرار

$$\text{شده، پس داریم: } \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

در کل، ۶ حرف داریم، پس در صورت ۶ می‌آید.

۲ تا حرف A و ۲ تا حرف D تکرار می‌شود، پس در مخرج $2! \times 2!$ داریم.

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

$$A \downarrow B \quad D \downarrow E \quad \Rightarrow 6$$

دو حالت خواهیم داشت:

(۱) کلماتی که سه حرف آن‌ها متمایزند که تعدادشان برابر است با:

$$R, A, N, G, I$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 5 & 4 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow 60$$

(۲) کلماتی که شامل ۲ حرف N هستند، در این صورت ۱ حرف دیگر از بین ۴

حرف A, R, G, I و انتخاب می‌شود.

حالت‌های مختلفشان را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left[\begin{array}{ccc} N & N & 4 \end{array} \right] \\ 2) \left[\begin{array}{ccc} N & 4 & N \end{array} \right] \\ 3) \left[\begin{array}{ccc} 4 & N & N \end{array} \right] \end{array} \right\} \text{حالت } 12$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$60 + 12 = 72$$

تعداد جایگشت‌های n شخص دور یک میز دایره‌ای برابر با

$$(n-1)!$$

پس تعداد جایگشت‌های دوری $n=6$ نفر، برابر است با: $5! = (6-1)!$

تعداد جایگشت‌های n شخص دور یک میز دایره‌ای برابر با

(n-1)! است. در واقع در دور میز گرد نشستن، مکان نشستن نفر اول مهم نیست.

دو نفری که قرار است کنار هم قرار بگیرند (مثلاً A و B) را در یک بسته قرار

می‌دهیم:

پس انگار ۵ شیء داریم که می‌خواهیم آن‌ها را دور یک میز گرد بنشانیم.

این کار به $(5-1)!$ حالت، یعنی $24=4!$ حالت انجام می‌شود. چون خود

A و B می‌توانند جابه‌جا شوند، ۲ حالت هم داخل بسته داریم، پس در کل

$$48 = 24 \times 2$$

حالت داریم.

از اصل متمم کمک می‌گیریم.

در کل ۵ نفر، به ۴! حالت می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند.

علی و آرش را در یک بسته قرار می‌دهیم:

الان ۴ نفر داریم که جایگشت دور میز گردشان ۳! می‌شود. از طرفی چون علی

و آرش می‌توانند جابه‌جا شوند، داخل بسته هم، ۲! حالت داریم.

$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

یعنی تعداد کل این حالات برابر است با:

$$24 - 12 = 12$$

پس تعداد حالاتی که علی و آرش کنار هم نیستند، برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از بین n شیء، برابر است با:

۱۳۱. گزینه ۴ | به جمله روبه‌رو دقت کنید: «گروه ۲ نفری و گروه ۳ نفری»

↓
ضرب

اول از ۸ نفر، ۲ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

۲ نفر از ۸ نفر را کنار می‌گذاریم. حالا از ۶ نفر باقی‌مانده، ۳ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} = 28 \times 20 = 560$$

۱۳۲. گزینه ۳ | به جمله روبه‌رو دقت کنید: «دسته‌گل ۴ تایی یا دسته‌گل ۵ تایی یا دسته‌گل ۶ تایی»

↓
جمع

تعداد دسته‌گل‌های ۴ تایی برابر است با:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$$

تعداد دسته‌گل‌های ۵ تایی برابر است با:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

تعداد دسته‌گل‌های ۶ تایی برابر است با:

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

مجموع این سه حالت برابر است با:

$$70 + 56 + 28 = 154$$

۱۳۳. گزینه ۴ | به جمله روبه‌رو دقت کنید: «اتاق ۳ نفره و اتاق ۲ نفره و اتاق ۲ نفره»

↓ ↓
ضرب ضرب

ابتدا ۳ نفر از ۷ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

حالا از ۴ نفر باقی‌مانده، ۲ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

و در آخر از ۲ نفر باقی‌مانده، ۲ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{2}{2} = 1$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 35 \times 6 \times 1 = 210$$

۱۳۴. گزینه ۴ | به جمله روبه‌رو دقت کنید: «۲ اسباب‌بازی و ۲ اسباب‌بازی و ۲ اسباب‌بازی»

↓ ↓
ضرب ضرب

ابتدا ۲ اسباب‌بازی از ۶ اسباب‌بازی انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

حالا از ۴ اسباب‌بازی باقی‌مانده، ۲ تا انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

و در آخر از ۲ اسباب‌بازی باقی‌مانده، ۲ تا انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{2}{2} = 1$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

۱۳۵. گزینه ۴ | پس از این که این ۶ نفر را انتخاب کنیم، جابه‌جایی آن‌ها با هم، گروه جدیدی ایجاد نمی‌کند. پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. حداکثر ۳ زن، یعنی ۳ زن یا ۲ زن یا ۱ زن یا هیچ زن. ولی اگر هیچ زنی انتخاب نشود، باید هر ۶ نفر مرد باشند که غیرممکن است (چون کلاً ۵ مرد وجود دارد).

۵ مرد و ۱ زن ۴ مرد و ۲ زن ۳ مرد و ۳ زن

تعداد حالت‌ها

$$= \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{1} \binom{5}{3} = \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{1} \binom{5}{3}$$

$$= \left(\frac{4!}{3!1!} \times \frac{5!}{1!4!} \right) + \left(\frac{4 \times 3}{2} \times \frac{5!}{2!3!} \right) + (4 \times 1)$$

$$= (4 \times 10) + (6 \times 5) + (4 \times 1) = 74$$

۱۳۶. گزینه ۲ | با توجه به شرایط سؤال باید «۳ پزشک و ۲ مهندس» یا «۴ پزشک و ۱ مهندس» انتخاب کنیم:

↓ ↓
جمع ضرب

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} + \binom{5}{4} \times \binom{4}{1} = \left(\frac{5!}{3!2!} \times \frac{4 \times 3}{2} \right) + \frac{5!}{4!1!} \times 4$$

$$= \left(\frac{5 \times 4}{2} \times 6 \right) + (5 \times 4) = 60 + 20 = 80$$

۱۳۷. گزینه ۲ | چون کاپیتان فرد مشخصی از پایه دوازدهم است، پس ۱ حالت دارد.

حالا باید از ۸ نفره باقی‌مانده (۴ یازدهمی و ۴ دوازدهمی)، ۵ نفر انتخاب کنیم تا تیم ۶ نفره‌مان تکمیل شود:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

$$\downarrow \times 56 = 56$$

۵ نفر کاپیتان
دیگر تیم

پس تعداد کل حالات برابر است با:

۱۳۸. گزینه ۴ | کاپیتان باید یک نفر از بین ۵ نفر دوازدهمی باشد:

$$\binom{5}{1} = 5$$

حالا باید از ۸ نفر باقی‌مانده (۴ یازدهمی و ۴ دوازدهمی)، ۵ نفر انتخاب کنیم تا تیم ۶ نفره‌مان تکمیل شود:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

$$\downarrow \times 56 = 280$$

۵ نفر کاپیتان
دیگر تیم

پس تعداد کل حالات برابر است با:

۱۳۹. گزینه ۱ | ۳ حالت ممکن است رخ دهد:

(۱) ۳ تا دوازدهمی و ۳ تا یازدهمی داشته باشیم:

$$\binom{5}{3} \binom{4}{3} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{4!}{1!3!} = 10 \times 4 = 40$$

(۲) ۴ تا دوازدهمی و ۲ تا یازدهمی داشته باشیم:

$$\binom{5}{4} \binom{4}{2} = \frac{5!}{1!4!} \times \frac{4 \times 3}{2} = 5 \times 6 = 30$$

(۳) ۵ تا دوازدهمی و ۱ یازدهمی داشته باشیم:

$$\binom{5}{5} \binom{4}{1} = 1 \times 4 = 4$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$40 + 30 + 4 = 74$$

۱۴۰. گزینه ۲ | علی به ۳ حالت می‌تواند این کار را انجام دهد:

(۱) ۲ پیراهن آبی، ۱ قرمز و ۱ سبز:

$$\binom{2}{2} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 1 \times 4 \times 5 = 20$$

(۲) ۱ پیراهن آبی، ۲ قرمز و ۱ سبز:

$$\binom{2}{1} \binom{4}{2} \binom{5}{1} = 2 \times \frac{4 \times 3}{2} \times 5 = 2 \times 6 \times 5 = 60$$

(۳) ۱ پیراهن آبی، ۱ قرمز و ۲ سبز:

$$\binom{2}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{2} = 2 \times 4 \times \frac{5 \times 4}{2} = 2 \times 4 \times 10 = 80$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$20 + 60 + 80 = 160$$

۱۴۱. گزینه ۴ | برای آن که حداقل ۳ نوجوان در گروه سرود ۵ نفره باشند، سه حالت داریم:



و باز هم همین کار را برای مدرسه انتخابی دوم انجام می‌دهیم: $\binom{4}{1} = 4$

و همین کار را برای مدرسه سوم انجام می‌دهیم: $\binom{4}{1} = 4$

طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با: مدرسه انتخاب ۳ مدرسه دوم از بین ۵ مدرسه

$$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$$

مدرسه انتخاب ۱ دانش‌آموز سوم از مدرسه اول

۱۴۶. گزینه ۴ دو حالت داریم:

(۱) با ۷ نقطه بالا یک مثلث و با ۵ نقطه پایین یک چهارضلعی بسازیم:

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{4} = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{5!}{1!4!} = 35 \times 5 = 175$$

(۲) با ۷ نقطه بالا یک چهارضلعی و با ۵ نقطه پایین یک مثلث بسازیم:

$$\binom{7}{4} \times \binom{5}{3} = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 35 \times 10 = 350$$

تعداد کل حالات بالا برابر است با: $175 + 350 = 525$

۱۴۷. گزینه ۱ دو حرف M و N به همراه ۳ حرف دیگر، کلمات ۵ حرفی

تشکیل می‌دهند که تعداد آن‌ها برابر ۵! است. از طرفی ۳ حرفی که در مورد

آن‌ها صحبت شد باید از بین ۴ حرف (A, S, U و R) انتخاب شوند که این

کار به $\binom{4}{3}$ حالت مختلف انجام می‌گیرد. در نهایت طبق اصل ضرب به جواب

خواهیم رسید: $5! \times \binom{4}{3} = 120 \times 4 = 480$

۱۴۸. گزینه ۴ از بین ۷ عضو، باید ۴ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

۱۴۹. گزینه ۳ تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی برابر

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی برابر است با:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

مجموع دو حالت بالا برابر است با: $21 + 35 = 56$

۱۵۰. گزینه ۳ عدد ۴ را کنار می‌گذاریم. می‌ماند ۶ عدد دیگر:

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

باید از بین این ۶ عدد، ۴ عدد انتخاب کنیم: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

۱۵۱. گزینه ۱ زیرمجموعه ۴ عضوی که شامل دو عدد ۶ و ۷ باشد به صورت

$$\{6, 7, \emptyset, \emptyset\}$$

مقابل است:

عدد ۵ نباید در این زیرمجموعه باشد.

در نتیجه ۲ جای خالی را باید از بین ۴ رقم $\{1, 2, 3, 4\}$ انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۱۵۲. گزینه ۲ اعداد اول مجموعه A عبارتند از: ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳

چون قرار است زیرمجموعه شامل ۲ عدد اول باشد، پس باید از بین ۶ عدد بالا،

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

۲ عدد را انتخاب کنیم که می‌شود:

۱۵۳. گزینه ۱ در مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 15\}$ ، ۸ عدد فرد و ۷ عدد

زوج وجود دارد.

(۱) تا نوجوان و ۲ تا کودک یا جوان باشند:

$$\binom{5}{3} \times \binom{11}{2} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{11 \times 10}{2} = 10 \times 55 = 550$$

(۲) تا نوجوان و ۱ کودک یا جوان باشند:

$$\binom{5}{4} \times \binom{11}{1} = \frac{5!}{1!4!} \times 11 = 5 \times 11 = 55$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

(۳) تا نوجوان باشند:

$$550 + 55 + 1 = 606$$

مجموع تعداد حالات برابر است با:

۱۴۲. گزینه ۴ برای آن که دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند، سه حالت داریم:

(۱) ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز یا سبز باشد: مجموع قرمزها و سبزها

$$\binom{4}{2} \times \binom{9}{1} = \frac{4 \times 3}{2} \times 9 = 6 \times 9 = 54$$

(۲) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا سبز باشد: مجموع آبی‌ها و سبزها

$$\binom{6}{2} \times \binom{7}{1} = \frac{6 \times 5}{2} \times 7 = 15 \times 7 = 105$$

(۳) ۲ مهره سبز و ۱ مهره آبی یا قرمز باشد: مجموع آبی‌ها و قرمزها

$$\binom{3}{2} \times \binom{10}{1} = \frac{3 \times 2}{2} \times 10 = 3 \times 10 = 30$$

مجموع سه حالت بالا برابر است با: $54 + 105 + 30 = 189$

۱۴۳. گزینه ۳ راه I برای آن که بهزاد و سینا با هم در این گروه نباشند،

۳ حالت داریم: همه به جز بهزاد و سینا

(۱) بهزاد باشد و سینا نباشد:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

انتخاب ۴ نفر باقی‌مانده برای گروه

$$\binom{7}{4} = 35$$

(۲) سینا باشد و بهزاد نباشد:

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

(۳) بهزاد و سینا نباشند:

$$35 + 35 + 21 = 91$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

راه II از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم:

$$\left(\text{تعداد حالاتی که بهزاد و سینا هر دو در گروه هستند} \right) - \left(\text{تعداد کل حالات} \right) = \left(\text{تعداد حالاتی که بهزاد و سینا با هم در گروه نیستند} \right)$$

$$= \binom{9}{5} - \binom{7}{3} = \frac{9!}{4!5!} - \frac{7!}{4!3!} = 126 - 35 = 91$$

۱۴۴. گزینه ۳ مجموع دو عدد طبیعی، زمانی زوج است که «هر دو فرد

باشند» یا «هر دو زوج باشند».

در بین اعداد ۱ تا ۱۱، ۶ عدد فرد و ۵ عدد زوج داریم.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

یک بار هر دو عدد باید فرد باشند:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

یک بار هم هر دو باید زوج باشند:

پس در کل $15 + 10 = 25$ طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

۱۴۵. گزینه ۳ ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

حالا از مدرسه انتخابی اول، ۱ نفر از ۴ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{4}{1} = 4$$



دو حالت داریم:

(۱) برای نوشتن زیرمجموعه ۳ عضوی که همه اعضای آن فرد باشند، باید ۳ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

(۲) برای نوشتن زیرمجموعه ۳ عضوی که همه اعضای آن زوج باشند، باید ۳ عضو از ۷ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

پس تعداد کل زیرمجموعه‌ها با این شرط برابر است با:

$$56 + 35 = 91$$

۱۵۴. گزینه ۳ از اصل متمم کمک می‌گیریم:

متمم «حداقل یک عضو آن، زوج است» می‌شود «هر سه عضو آن فرد است». تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی برابر است با:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

تعداد زیرمجموعه‌هایی که هر ۳ عضو آن فرد است، برابر است با:

تعداد اعداد فرد از ۱ تا ۱۲

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

پس تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل ۱ عضو آن زوج است برابر است با:

$$220 - 20 = 200$$

۱۵۵. گزینه ۲ مجموعه A را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

$$B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

اعداد اول اعداد غیراول

زیرمجموعه مورد نظر باید حداقل ۳ تا از اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ را داشته باشد، پس دو حالت داریم:

حالت اول: ۳ تا از مجموعه B و ۲ تا از مجموعه C انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{3} \binom{6}{2} = 4 \times \frac{6 \times 5}{2} = 4 \times 15 = 60$$

حالت دوم: ۴ تا از مجموعه B و یکی از مجموعه C انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{4} \binom{6}{1} = 1 \times 6 = 6$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$60 + 6 = 66$$

۱۵۶. گزینه ۳ تک تک گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

۱) $C(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)! \times 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

۲) $C(n, 1) = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

۳) $P(n, n-1) = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = \frac{n!}{1!} = n!$

۴) $P(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

۱۵۷. گزینه ۲ از دو رابطه روبه‌رو باید استفاده کنیم:

$$\begin{cases} (1) P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \\ (2) C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!} \end{cases}$$

مقدار $P(8, 3)$ و $C(8, 3)$ برابر است با:

$$P(8, 3) = \frac{8!}{5!}$$

پس باید $P(8, 3)$ را بر ۳! تقسیم کنیم تا با $C(8, 3)$ برابر شود:

$$\frac{P(8, 3)}{3!} = C(8, 3)$$

۱۵۸. گزینه ۲ عبارت داده‌شده را با استفاده از فرمول‌های ترکیب و تبدیل

باز می‌کنیم:

$$P(n, 2) - C(n, 2) = 36 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 36$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 36$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{1} - \frac{n(n-1)}{2} = 36$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب دو طرف در ۲}} 2n(n-1) - n(n-1) = 72$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 2n - n^2 + n = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشتک}} (n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \text{ (قق)} \\ n=-8 \text{ (غقق)} \end{cases}$$

پس مقدار عبارت $C(n, 6)$ برابر است با:

$$C(n, 6) = C(9, 6) = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 84$$

۱۵۹. گزینه ۳ می‌دانیم که فرمول‌های تبدیل و ترکیب به صورت زیر

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ و } C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!} \text{ هستند:}$$

حالا به کمک دو فرمول بالا، عبارت‌های داده‌شده در متن معادله را باز می‌کنیم:

$$2C(n, 5) = 3P(n-1, 4)$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{n!}{(n-5)!} = 3 \times \frac{(n-1)!}{(n-1-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2(n)(n-1)!}{(n-5)!} = \frac{3(n-1)!}{(n-5)!} \Rightarrow \frac{2n}{5!} = 3$$

$$\Rightarrow 2n = 3 \times 5! \Rightarrow 2n = 3 \times 120 \Rightarrow n = \frac{3 \times 120}{2} = 180$$

۱۶۰. گزینه ۳ اگر n نقطه روی محیط یک دایره داشته باشیم با آن‌ها

می‌توانیم $\binom{n}{2}$ تا وتر بسازیم.

پس در این جا $\binom{n}{2}$ برابر با ۵۵ شده است:

$$\binom{n}{2} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n^2 - n = 110$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 110 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه یا اتحاد جمله‌مشتک}} (n-11)(n+10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=11 \checkmark \\ n=-10 \times \end{cases}$$

۱۶۱. گزینه ۳ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه n

عضوی برابر با $\binom{n}{2}$ است.

از طرفی تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های n-۲ عضوی برابر است، پس در این جا باید تعداد زیرمجموعه‌های n-۲ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی برابر باشد.

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی، ۴۵ شده:

$$\binom{n}{2} = 45 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n^2 - n = 90$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه یا اتحاد جمله‌مشتک}} (n-10)(n+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=10 \checkmark \\ n=-9 \times \end{cases}$$



۱۶۲. گزینه ۲

نکته اگر $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ باشد، آن گاه $a = b$ یا $a + b = n$.

یعنی از تساوی $\binom{22}{14} = \binom{22}{k}$ ، نتیجه می‌گیریم یا $k = 14$ است یا مجموع k و 14 باید 22 باشد:
 $k + 14 = 22 \Rightarrow k = 8$

۱۶۳. گزینه ۴

نکته $C(n, 2) = \frac{n(n-1)}{2}$

از تساوی $\binom{18}{k+4} = \binom{18}{k}$ ، نتیجه می‌گیریم مجموع k و $k+4$ برابر 18 است:
 $k + (k+4) = 18 \Rightarrow k = 7$

پس مقدار $C(k, 2)$ برابر است با: $C(7, 2) = \frac{7 \times 6}{2} = 21$

۱۶۴. گزینه ۳ با استفاده از دو فرمول روبه‌رو، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} (1) C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ (2) P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \end{cases}$$

$$26C(n+3, 2) = P(n+4, 3)$$

$$\Rightarrow 26 \times \frac{(n+3)!}{(n+3-2)!2!} = \frac{(n+4)!}{(n+4-3)!}$$

$$\Rightarrow 26 \times \frac{(n+3)!}{2(n+1)!} = \frac{(n+4) \times (n+3)!}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{26}{2} = n+4$$

$$\Rightarrow 13 = n+4 \Rightarrow n = 9$$