

به نام خدای مهربان

آموزش و

کتاب‌نگار

یازدهم

آمار و احتمال

• مصطفی دبیاری
مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: مهندس عباس اشرفی



مهروماه

Maryam Mirzakhani
May 3, 1977 - July 14, 2017
Professor of Mathematics at
Stanford University



تقدیم به همه فرزندان افتخارآفرین ایران

به مناسبت تقارن زمانی تدوین این کتاب با ضایعه درگذشت پروفیسور مریم میرزاخانی بر آن شدیم تا برای ادای احترام، مختصری از افتخارات این نابغه بزرگ را برای شما بیان کنیم:

مریم میرزاخانی اولین دختری بود که به تیم المپیاد ریاضی ایران راه یافت و همچنین اولین دختری بود که در المپیاد ریاضی ایران، مدال طلا گرفت. وی اولین کسی بود که دو سال متوالی مدال طلا کسب کرد و اولین فردی بود که در آزمون المپیاد ریاضی نمره کامل گرفت. او دوره لیسانس و فوق لیسانس ریاضی را در دانشگاه صنعتی شریف سپری کرد و بعد از آن، با دریافت بورسیه از طرف دانشگاه هاروارد به آنجا رفت و دوره دکتری خود را در آن دانشگاه پشت سر گذاشت. مریم در سال ۲۰۰۴ با اخذ مدرک دکترا از دانشگاه هاروارد به سرپرستی کورتیس مکمولن، از برندگان جایزه فیلدز فارغ التحصیل شد، در دانشگاه‌های پرینستون و استنفورد به تدریس مشغول شد. یک سال بعد، در سال ۲۰۰۵ نشریه پاپیولار ساینس آمریکا، او را به عنوان یکی از ده ذهن جوان جهان برگزید و تجلیل کرد.

او مدتی در پرینستون درس می‌داد ولی بعد به استنفورد رفت و کار تدریس و پژوهش را در آنجا پی گرفت. مریم در شهریور ۱۳۸۷ و در ۳۱ سالگی به درجه استادی این دانشگاه رسید.

مریم میرزاخانی، نخستین بانوی ریاضی‌دان تاریخ لقب گرفته که توانسته است مدال فیلدز را دریافت کند. این مدال معتبرترین جایزه دنیای ریاضیات است و به دانشمندان برگزیده زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود. متأسفانه، پروفیسور مریم میرزاخانی در تاریخ ۲۴ تیرماه ۱۳۹۶، در ۴۰ سالگی جان به جان آفرین تسلیم کرد و در میان بهت همگان، وجودش از جهان دریغ شد.

سخن نخست

بیا تا گل برافشانیم و می در ساغر اندازیم

فلک را سقف بشکافیم و طرحی نو دراندازیم

«حضرت حافظ»

دانش‌آموزان عزیز! فرزندان دلبندم!

انتشارات مهرماه وارد مرحله جدیدی از فعالیت‌های آموزشی خود شده است. هم‌زمان با تحول اساسی در سیستم آموزش کشور و ایجاد تغییرات بنیادین در کتاب‌های درسی، جمعی از بهترین اساتید و مؤلفین توانمند کشور در «مهرماه» گرد هم آمده‌اند تا برای شما کتاب‌هایی را به رشته تحریر درآورند که از خواندن آن‌ها لذت برده و دوستشان داشته باشید. کتاب‌هایی که در شکوفایی توانمندی‌های شما عزیزان دلبندم، جداً اثرگذار باشند.

اساتید و مؤلفانی که در کتاب‌های جدید مهرماه (دهم، یازدهم و سال آینده، دوازدهم) دست به قلم شدند، علاوه بر برخورداری از تمام ویژگی‌های یک مؤلف آموزشی خوب مانند سواد علمی بالا، تجربه کافی در تدریس و تألیف و ...، یک ویژگی دیگر هم دارند؛ ویژگی که شاید محور زندگی اینجانب و رکن اساسی تمام فعالیت‌های آموزشی مهرماه را تشکیل می‌دهد: عشق به فرزندانمان. ما این مهر و عشق را با هیچ مبلغ و ثروتی عوض نمی‌کنیم، حتی اگر آن مبلغ در حد عدد آووگادرو باشد!

فرزندان همچون ماه من!

برای این‌که کتاب‌های مهرماه در این دوره جدید، بیش‌ترین کارایی آموزشی را در جهت موفقیت شما داشته باشند، تدابیر فراوانی اندیشیدیم: شورای تألیف تشکیل دادیم، کارآمدترین مدیران آموزشی و مؤلفان برجسته را گرد هم آوردیم، کتاب‌ها براساس شیوه‌نامه‌هایی متکی بر چند دهه تجربه موفق نگاشته شدند، چندین لایه ویراستار (از دانشجویان فرهیخته و نابغه گرفته تا اساتید بنام کشور) به کار گرفتیم تا از غلط‌های علمی، نگارشی، تایپی و ... اثری باقی نماند.

گروه‌های تولید و هنری مهرماه نیز با هدایت مستقیم مدیر فرزانه مهرماه، جناب احمد اختیاری، سنگ تمام گذاشتند تا با «مهر» کتاب‌هایی تولید شوند همچون «ماه»! کتاب‌هایی که برازنده نام وزین «مهرماه» اند.

شاید مناسب باشد که تعدادی از مهم‌ترین انواع کتاب‌های کمک آموزشی مهرماه را برای شما معرفی کنم:

۱ کتاب‌های کار: در این کتاب در مورد هر مبحثی که در مدرسه توسط دبیر محترم تدریس می‌شود یا خودتان از کتاب درسی مطالعه می‌کنید، ابتدا آموزش مختصر و مفید و البته کاملی از آن مبحث داده شده و سپس تمرین‌هایی ارائه شده که با حل آن‌ها می‌توانید تمام قسمت‌های تدریس‌شده یا مطالعه‌شده از کتاب درسی را، به خوبی فرا گرفته تا بر کتاب درسی با تمام جزئیات آن، مسلط شوید.

۲ کتاب‌های تست: در این کتاب‌ها، برای هر مبحث معین، ابتدا درس‌نامه‌ای مفید و جذاب و سپس تست‌های مربوط به آن مبحث ارائه شده است. درس‌نامه‌ها شامل مفاهیم و مطالب اصلی و بنیادی بوده و به نکات حاشیه‌ای که دور از موضوع محوری و اصلی‌اند، پرداخته نشده است. از طرفی، ضمن ارائه پاسخ تشریحی تست‌ها، برخی از نکات ویژه تستی در قالب «راهنمای آموزشی» بسیار کاربردی و منحصربه‌فرد آورده شده است. همین‌طور، در برخی از کتاب‌های تست (مانند درس شیرین شیمی!) در کنار پاسخ تشریحی تعدادی از تست‌ها، ایستگاه‌های «شارژینگ» آمده است تا دانش‌آموزان در موضوعات مورد نظر، خیلی خوب شارژ شوند.

با حل تست‌های این کتاب‌ها و مطالعه پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن‌ها و نیز درس‌نامه‌ها، راهنماها و شارژینگ‌ها، موفقیت در آزمون‌ها و کنکور امری طبیعی و آسان خواهد بود.





۳ کتاب‌های آموزش: ویژگی اساسی این کتاب‌ها، ارائه آموزش کامل درس و مفاهیم و همین‌طور، پرسش‌هایی است که دانش‌آموزان با حل آن‌ها، در امتحانات مدرسه با قطعیت به نمره ۲۰ رسیده و از طرفی، پایه آموزشی لازم برای حمله به تست‌ها را پیدا خواهند کرد. ضمناً، در این کتاب‌ها، ضمن ارائه درس در هر مبحث، پرسش‌های جالبی از طرف سه دانش‌آموز به ترتیب قوی، متوسط و نسبتاً ضعیف پرسیده می‌شوند که پاسخ به این پرسش‌ها، مکمل خوبی برای فهم بهتر درس و رفع ابهامات احتمالی است.



۴ کتاب‌های لقمه: ابعاد این کتاب‌ها، کوچک بوده و بنابراین می‌توانند همانند تلفن همراه، همه جا همراهتان باشند. اندازه و فرم این کتاب‌ها و نیز مطالب تألیف‌شده در آن‌ها به گونه‌ای تنظیم شده‌اند که مطالعه این کتاب‌ها همه جا میسر است: در مترو و اتوبوس، توی هواپیما، توی رختخواب و حتی شاید زیر دوش حمام!



۵ کتاب‌های امتحانوفن: این کتاب برای هفته‌های آخر قبل از امتحان و شب امتحان طراحی و تألیف شده است. یکی از ویژگی‌های این کتاب، مجهز بودن آن به خلاصه درس‌های «کپسولی» منحصربه‌فرد است. خلاصه‌هایی که می‌تواند بهترین کمک برای مرور درس در شب‌های امتحان باشد. در مجموع ده سری امتحان بarmبندی شده استاندارد با رعایت تمام ضوابط آموزش و پرورش در این مجموعه ارائه شده و علاوه بر پاسخ‌های لازم برای گرفتن نمره کامل و نحوه توزیع بarmها، توضیحات تکمیلی جهت فهم کامل دانش‌آموزان نیز در کنار پاسخ‌ها آمده است.

غیر از پنج نوع کتاب مذکور انتشارات مهروماه، کتاب‌های دیگری هم برای نظام جدید آموزشی منتشر خواهد کرد که هر کدام به جای خود، مفید و دوست‌داشتنی هستند؛ از جمله سری کتاب‌های معجزه کنکور، کتاب‌های آزمون، کتاب‌های جمع‌بندی و کتاب‌های جامع کنکور. اطلاعات لازم در مورد تک‌تک این کتاب‌ها را می‌توانید از طریق سایت مهروماه به آدرس mehromah.ir به دست آورید.

با آرزوی توفیق روزافزون همه فرزندان میهنم
مدیر شورای تألیف
محمدحسین انوشه

مقدمه



تقدیم به جناب سرهنگ شاهرخی که
مثل پدر خودم دوستش دارم.

به نام او

ماکس پلانک، پس از دریافت جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۱۸، به سراسر آلمان سفر کرد. او به هر شهری که دعوت می‌شد، سخنرانی یکسانی را که در مورد مکانیک کوانتومی آماده کرده بود، ارائه می‌داد. با گذشت زمان، راننده پلانک سخنرانی او را مو به مو حفظ شده بود. یک روز به او گفت: «پروفسور پلانک، حتماً برایتان کسل‌کننده است که یک سخنرانی را چندین بار تکرار کنید. نظرتان چیست که در مونیخ من به جای شما سخنرانی کنم؟ شما هم می‌توانید در ردیف جلو بنشینید و کلاه شوفری من را به سر بگذارید. این کار برای هر دوی ما تنوع خوبی است.»

پلانک از پیشنهاد او استقبال کرد. بعدازظهر آن روز، راننده سخنرانی طولانی او در مورد مکانیک کوانتومی را در حضور مخاطبانی سرشناس ارائه داد. در پایان سخنرانی، یک پروفسور فیزیک از جای خود بلند شد و سؤالی را از او پرسید. راننده پلانک با خونسردی گفت: «هیچ وقت فکر نمی‌کردم یک نفر از اهالی شهر پیشرفته‌ای مثل مونیخ، سؤالی به این سادگی مطرح کند! حتی راننده من هم پاسخ این سؤال را می‌داند. او پاسخ شما را خواهد داد.»

به نظر شما آیا دانش پلانک و راننده‌اش در یک اندازه بود، با اینکه هر دو یک سخنرانی را ارائه کردند؟ مسلماً نه! بسیاری از کارشناسان با توجه به این داستان، افراد در یادگیری دانش به دو دسته تقسیم می‌شوند:

نوع اول، دانش را به صورت واقعی یاد می‌گیرند. این نوع دانش را در افرادی می‌بینیم که برای فهمیدن یک موضوع، زمان و انرژی زیادی صرف کرده و عمیقاً بر آن مسلط شده‌اند. نوع دوم دانش را شوفری (!) یاد می‌گیرند. حاملان این دانش معمولاً به صورت طوطی‌وار مثل این‌که چیزی را از روی دست‌نوشته‌ای می‌خوانند، کلمات را پشت سرهم ردیف می‌کنند، بی‌آنکه کمترین نظری در مورد آن‌ها داشته باشند.


شما جزء کدامیک از این دو دسته هستید؟

من مطمئنم حالا که این کتاب توی دستای توئه، پس جزء افرادی هستی که دانش نوع اول رو دنبال می‌کنی. بنابراین لازمه که چیزهایی از این کتاب قبل از شروع بدونی.

از ویژگی‌های این کتاب براتون می‌گم:

- ۱ هر فصل از کتاب درسی رو براتون به چند درس مثل کتاب درسیت تقسیم کردیم تا متناسب با جلسه‌های تدریس معلم محترمت بشه.
 - ۲ اول هر فصل یه درخت دانش خیلی کامل از بخش‌های اون قرار دادیم تا توی یه نگاه بفهمی چی به چیه و چقدر از مطالب رو هنوز نخوندی!
 - ۳ اول هر بخش یه درس‌نامه مختصر و مفید گذاشتیم تا وقتی معلمت درس میده بتونی سریع از روی اون، مطلب رو دوره کنی.
 - ۴ سعی کردیم هیچ مطلبی از کتاب درسی جا نیفتاده، حتی فعالیت‌ها و «تمرین در کلاس»‌ها.
 - ۵ هر سؤالی که توی امتحان‌های نهایی بوده و به کتاب جدید هم ربط داشته، تبدیل به تمرین شده و توی کتاب اومده.
 - ۶ تمرین‌ها رو به ترتیب از ساده به دشوار آوردیم تا روند یادگیری راحت‌تر و سریع‌تر بشه.
 - ۷ دوتا امتحان، یکی برای ترم اول و یکی برای ترم دوم توی کتاب گذاشتیم که شب امتحان خیلی بهت کمک می‌کنه.
 - ۸ انواع و اقسام تیپ‌بندی‌های سؤال مثل جای خالی‌ها و درست - غلط، مسئله، تمرین و ... آوردیم تا یه مجموعه کامل برات آماده باشه.
 - ۹ حواسمون به حجم کتاب بوده که تعادل حفظ بشه و نه خسته‌کننده باشه، نه فرایند یادگیری ناقص بمونه.
 - ۱۰ برای سؤال‌هایی که اهمیت قابل توجهی دارن، علامت  در کنار شماره سؤال قرار داده شده تا بدونی که این سؤال‌ها در انتهای کتاب، پاسخ تشریحی دارن و جواب آخر بیشتر تمرین‌های محاسباتی در انتهای کتاب آورده شده است.
- دیگه چی می‌خوای؟! این کتاب همه چی تمومه! 😊 این گوی و این میدان!

• نکته‌هایی برای استفاده بهتر از کتاب:

بعد از این‌که توی مدرسه، مبحث مورد نظر توسط دبیر درس داده شد، درسنامه کتاب برای اون مبحث رو با دقت بخون تا آماده حل تمرینات شی. وقتی تمرین‌ها رو حل می‌کنی، دقت کن که برای پرسش‌های دشوارتر، نماد  در کنار شماره سؤال قرار داده شده و پاسخ تشریحی اون‌ها در انتهای کتاب اومده. در ضمن، جواب آخر همه تمرین‌های محاسباتی هم انتهای کتاب آوردیم.

با نزدیک شدن به شب امتحان، برای امتحان ارائه شده در انتهای کتاب، پاسخ بنویس. برای آمادگی بیشتر برای امتحان، می‌تونی در فاصله یکی دو روز مونده به امتحان، به کتاب «امتحانوفن» مهر و ماه مراجعه کنی.

اما قدردانی:

در پایان لازم می‌دونم از همه کسانی که در تهیه و تولید این کتاب به من کمک کردند تشکر کنم، افرادی که اگه حتی یک نفر از اون‌ها نبود، شاید این کتاب به این مرحله نمی‌رسید.

- از جناب آقای احمد اختیاری مدیریت محترم انتشارات مهروماه به خاطر حمایت‌های بی‌دریغشان سپاس‌گزارم.
- از جناب آقای محمدحسین انوشه، مدیر محترم شورای تالیف انتشارات که با راهنمای‌های خود، کمک فراوانی به من کردند.
- از جناب آقای عباس اشرفی که با حضور و پیشنهادهای سازنده نقش کلیدی و مهمی در تالیف این کتاب داشتند.
- از سرکار خانم زهرا خوشنود، مسئول تالیف کتاب‌های اختصاصی که همه زحمات من به دوش ایشان بود.
- از خانم سمیه جباری، مدیر تولید انتشارات که برای تهیه و تولید این کتاب زحمت بسیار کشیدند.
- سرکار خانم رویا طبسی که صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند و این کار را به نحو احسن انجام دادند و آقایان امیر ماهر و محسن کامران‌پور که با دقت و صبر و حوصله مثال‌زدنی، حروفچینی کتاب را بر عهده داشتند. همچنین از جناب آقای گودرزی، مدیر فروش، خانم قنبری مدیر روابط عمومی و جناب آقای امیر انوشه مدیر سایت تشکر می‌کنم.
- هیچ تالیفی بدون نگاه دقیق ویراستار کامل نمی‌شود. تشکر می‌کنم از ویراستار علمی کتاب، سرکار خانم ندا صالح‌پور، دانشجوی دکترای آمار که با دقت و ریزبینی خط به خط کتاب را بررسی کردند و همین‌طور خانم نگار احمدی که زحمت ویراستاری چند بخش را برعهده داشتند.

لحظه‌هاتون پر از احتمال‌های مهر و ماهی

مصطفی دیداری

فهرست

۹



جبر و معادله

تابع



۵۱

۹۳



مثلثات

۱۱۷



توابع نمایی و لگاریتمی

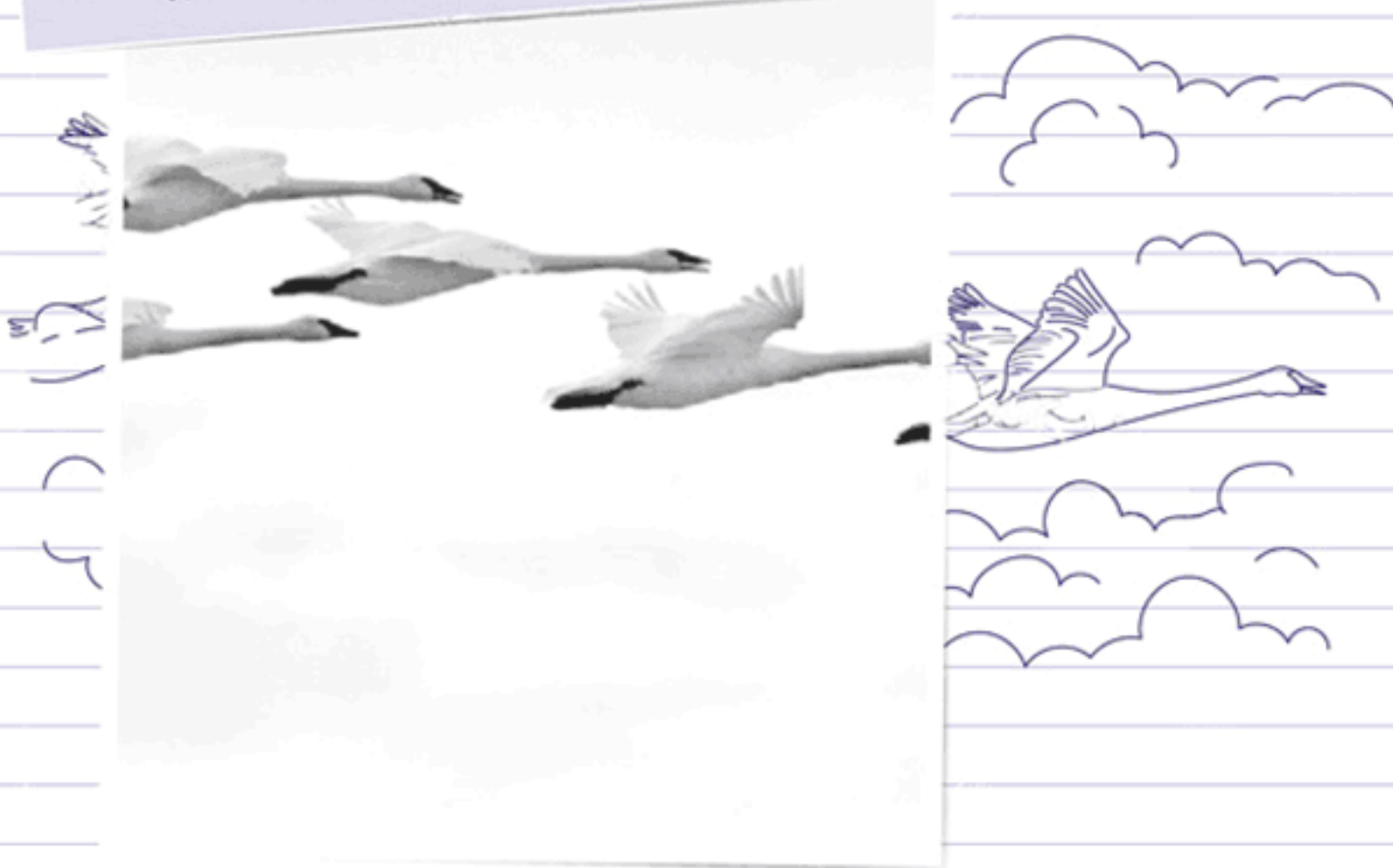
آزمون نیمسال اول ۱۳۴

آزمون نیمسال دوم ۱۳۶



فصل یکم

آشنایی با مبانی ریاضیات



درس ۱
آشنایی با منطق ریاضی

سورها ← عمومی ← وجودی ← نقیض سورها
ترکیب گزاره‌ها ← فصلی و عطفی ← نقیض ← شرطی و دو شرطی ← جدول
ارزش گزاره‌ها ← هم‌ارزی‌های منطقی
گزاره‌نما ← دامنه ← مجموعه جواب
گزاره

درس ۲
مجموعه - زیرمجموعه

تساوی دو مجموعه
اثبات با عضوگیری
زیرمجموعه ← تعریف با نمادهای ریاضی ← تعداد

درس ۳
قوانین اعمال بین مجموعه‌ها
(جبر مجموعه‌ها)

ضرب دکارتی ← نمودار ضرب دکارتی ← ویژگی‌های ضرب دکارتی
افراز
جبر مجموعه‌ها ← جابه‌جایی و توزیع‌پذیری ← دمورگان ← تفاضل به
اشتراک ← قضیه‌ها

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$



<table border="1"> <tr><th>p</th><th>$\sim p$</th></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td></tr> </table>	p	$\sim p$	د	ن	ن	د	<p>$\sim p$: اگر p درست باشد $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد $\sim p$ درست است.</p>									
p	$\sim p$															
د	ن															
ن	د															
<table border="1"> <tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \vee q$</th></tr> <tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> </table>	p	q	$p \vee q$	د	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن	ن	ن	<p>$p \vee q$: گزاره وقتی درست است که حداقل یکی از p یا q درست باشد. اگر p و q هر دو نادرست باشند، $p \vee q$ نادرست است.</p>
p	q	$p \vee q$														
د	د	د														
د	ن	د														
ن	د	د														
ن	ن	ن														
<table border="1"> <tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \wedge q$</th></tr> <tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> </table>	p	q	$p \wedge q$	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن	<p>$p \wedge q$: گزاره فقط وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند. در بقیه حالتها $p \wedge q$ دارای ارزش نادرست است.</p>
p	q	$p \wedge q$														
د	د	د														
د	ن	ن														
ن	د	ن														
ن	ن	ن														
<table border="1"> <tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Rightarrow q$</th></tr> <tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr> </table>	p	q	$p \Rightarrow q$	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	د	ن	ن	د	<p>$p \Rightarrow q$: گزاره در همه حالتها درست است بجز حالتی که p درست و q نادرست باشد. (اگر p نادرست باشد همواره گزاره درست است. در این حالت می‌گوییم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به اتفای مقدم درست است)</p>
p	q	$p \Rightarrow q$														
د	د	د														
د	ن	ن														
ن	د	د														
ن	ن	د														
<table border="1"> <tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Leftrightarrow q$</th></tr> <tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr> </table>	p	q	$p \Leftrightarrow q$	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	د	<p>$p \Leftrightarrow q$: گزاره به صورت $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌شود. پس این گزاره فقط وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.</p>
p	q	$p \Leftrightarrow q$														
د	د	د														
د	ن	ن														
ن	د	ن														
ن	ن	د														

مثال: جدول ارزش گزاره‌های $\sim p \vee q$ ، $\sim p \wedge \sim q$ و $p \Rightarrow q$ را رسم کنید.

پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$
د	د	ن	د
د	ن	ن	د
ن	د	د	د
ن	ن	د	ن

فقط در حالتی که $\sim p$ درست و q نادرست باشد، نادرست می‌شود. در بقیه حالتها درست می‌شود.

۱	۲	۳	۴
p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

در هر ردیف اگر هر دو ستون ۱ و ۳ درست باشد درست می‌شود. خلاف ستون ۲

۱	۲	۳	۴
p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	ن	د	د

در هر ردیف اگر حداقل یکی از ۲ و ۳ درست باشد، درست می‌شود. خلاف ستون ۱





7 با تعیین مقدار مناسب برای متغیرهای هر گزاره‌نما، کاری کنید تا ارزش گزاره حاصل، به صورت داده شده باشد.

ارزش گزاره	مقدار متغیرها	گزاره
درست	$n = \dots$	$(n+1)^2 \leq 2^n$ ۱
درست	$x = \dots$	$x(x-2) = 0$ ۲
درست	$x = \dots$, $y = \dots$	$(x+1)^2 + (2y-1)^2 = 0$ ۳
نادرست	$n = \dots$	۴ عدد $2^n - 1$ اول است.
درست	$A = \dots$	۵ در پرتاب تاس، احتمال آن که A رخ بدهد $P(A) = \frac{1}{3}$ است.
نادرست	$n = \dots$	$(-2)^n \in \mathbb{N}$ ۶
نادرست	$x = \dots$, $y = \dots$	۷ ضرب عدد گویای x در عدد گنگ y ، گنگ است.
نادرست	$x = \dots$, $y = \dots$	۸ جمع دو عدد گنگ x و y برابر عدد گنگ است.
درست	$x = \dots$, $y = \dots$	$6x - y = 12$ ۹
درست	$x = \dots$	۱۰ عدد فرد x را می‌توان به صورت مجموع ۳ عدد اول نوشت.

8 هر گزاره‌نما در ستون سمت راست را به مجموعه جواب آن در سمت چپ، وصل کنید.

مجموعه جواب	گزاره‌نما		
$\{1, 2, 3\}$	•	•	$(D = \mathbb{R}) x = 2$
\emptyset	•	•	$(D = \mathbb{N}) \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R} - \{2, -2\}$	•	•	$(D = \mathbb{N}) n! < 2^n$
$\{2, -2\}$	•	•	$(D = \mathbb{N}) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
$(-\infty, 0]$	•	•	$P(A) = \frac{1}{6}$ (دامنه A زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای پرتاب تاس)
$\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}\}$	•	•	$(D = (1, +\infty)) 3x^2 - x - 2 = 0$
$\{1, 4, 9, 16, \dots\}$	•	•	عدد x مضرب ۳ است $(D = \mathbb{Z})$
$\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$	•	•	$(D = \mathbb{R}) x + x = 0$
$\{3k k \in \mathbb{Z}\}$	•	•	$(D = \mathbb{R}) \frac{1}{x^2 - 4} \in \mathbb{R}$
$\{1, 2, 3, \dots, 6\}$	•	•	$p(A) = 1$ (دامنه A زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای پرتاب تاس)

9 دامنه هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است. مجموعه جواب هر یک را بنویسید. (اعداد زوج E ، اعداد

فرد $O =$ و اعداد اول $P =$)

الف $x(x+1) \in E$

مجموعه جواب:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$



ایمار و احتمال

19) جدول ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف $\sim p \wedge q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
.....
.....
.....
.....

ب $\sim q \wedge q$

q	$\sim q$	$\sim q \wedge q$
.....
.....
.....
.....

20) ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف $(2 \geq 2) \vee (1+1=2)$

ب $(\emptyset \subseteq A) \wedge (3^0=1)$

پ $\sim (\frac{2}{5} \neq 0.4) \vee (\frac{1}{2} \in \mathbb{R})$

ت $\sim (f \in O) \wedge (a \in \{a, b\})$

21) جای خالی را تکمیل کنید.

الف $\sim(\sim p) \equiv$

ب $\sim(p \vee q) \equiv$ \wedge

پ $\sim(p \wedge q) \equiv$ \vee

ت $\sim(\text{.....} \wedge q) \equiv p \vee$

22) با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

الف $(q \wedge p) \vee (q \vee p) \equiv q \vee p$

ب $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

p	q	$q \wedge p$	$q \vee p$	$(q \wedge p) \vee (q \vee p)$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

23) با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید: (T گزاره درست و F گزاره نادرست)

الف $p \wedge T \equiv p$

ب $\sim p \wedge p \equiv F$

پ $p \vee T \equiv T$

ت $\sim p \vee p \equiv T$

p	T	$p \wedge T$
.....
.....
.....
.....

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
.....
.....
.....
.....

p	T	$p \vee T$
.....
.....
.....
.....

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
.....
.....
.....
.....

24) با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

الف $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
.....
.....
.....
.....





$$A \cap B$$



8 برنامه نود در سال‌های گذشته، به دو صورت بین شرکت‌کنندگان قرعه‌کشی (نمونه‌گیری) انجام داده است. نوع هر کدام را مشخص کنید.

الف تعداد شرکت‌کنندگان به طبقه‌هایی با تعداد برابر تقسیم می‌شوند. مهمان برنامه از طبقه اول عددی را به تصادف انتخاب می‌کند. با جمع این عدد با عدد ثابت، نفرات بعدی مشخص می‌شوند.



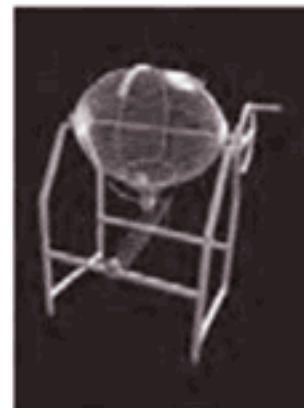
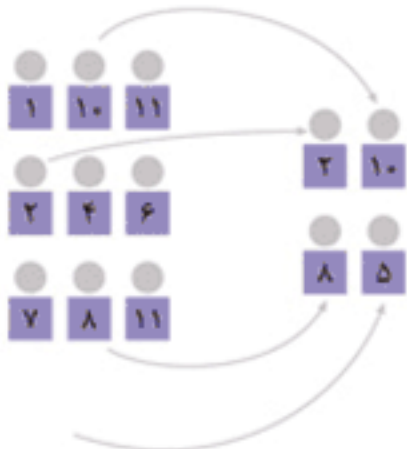
نوع نمونه‌گیری:

ب تعداد شرکت‌کنندگان به طبقه‌هایی با تعداد برابر تقسیم می‌شوند. مهمان برنامه از هر طبقه، یک نفر را به تصادف انتخاب می‌کند.



نوع نمونه‌گیری:

9 به نظر شما هر شکل کدام روش نمونه‌گیری را نشان می‌دهد؟ چرا؟



.....
.....
.....



.....
.....
.....





پاسخ: میانگین واقعی این جامعه برابر $\mu = 16$ است. می‌خواهیم با انتخاب نمونه‌های دوتایی میانگین را برآورد کنیم. مثلاً اگر نمونه $\{18, 16\}$ به صورت تصادفی انتخاب شده باشد، میانگین نمونه یا \bar{X} برابر $17 = \bar{X}$ خواهد بود. به عبارت دیگر با این نمونه، میانگین برابر 17 برآورد می‌شود. اگر بخواهیم همه نمونه‌های دوتایی را بررسی کنیم، به $\binom{5}{2} = 10$ روش می‌توانیم دو عدد را انتخاب کنیم. احتمال انتخاب هر کدام از این نمونه‌ها $0/1$ خواهد بود.

نمونه دوتایی	$\{16, 12\}$	$\{16, 20\}$	$\{20, 14\}, \{16, 18\}$	$\{16, 14\}, \{12, 18\}$	$\{18, 14\}, \{12, 20\}$	$\{12, 14\}$	$\{20, 18\}$
\bar{X}	14	18	17	15	16	13	19
احتمال	0/1	0/1	0/2	0/2	0/2	0/1	0/1



می‌توانیم نمودار نمونه‌های ۲ تایی را نیز رسم کنیم. محور X ها میانگین نمونه و محور عمودی را احتمال هر کدام در نظر می‌گیریم:



نکته:

۱ اگر اندازه نمونه بیشتر شود، امکان نزدیک شدن برآورد به پارامتر جامعه بیشتر می‌شود. به عبارت دیگر با زیاد شدن اندازه نمونه، انحراف معیار برآوردها کمتر می‌شود. هرچه انحراف معیار برآورد کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

۲ فرض کنیم جامعه‌ای نامتناهی (تعداد خیلی زیاد) باشد. اگر انحراف معیار جامعه را با σ ، انحراف معیار برآوردهای میانگین را با $\sigma_{\bar{X}}$ و اندازه نمونه را با n نمایش دهیم، داریم:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

این رابطه نشان می‌دهد که با افزایش n ، انحراف معیار برآورد میانگین‌ها کاهش یافته و خطای کمتری برای برآورد میانگین جامعه داریم.

برآورد بازه‌ای

بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان (ضریب اطمینان) را برآورد بازه‌ای گویند. به عبارت دیگر برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان، بازه‌ای عددی است که با اطمینان α درصد مشخص می‌کند که پارامتر جامعه در آن بازه قرار دارد.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه

فرض کنید اندازه نمونه برابر n ، میانگین جامعه برابر μ ، میانگین نمونه برابر \bar{X} و انحراف معیار جامعه برابر σ باشد. با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم میانگین جامعه در بازه $\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ قرار دارد. این رابطه را می‌توانیم به صورت $|\mu - \bar{X}| < \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ هم بنویسیم.

نکته: طول بازه اطمینان میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ برابر $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

مثال: از جامعه‌ای با انحراف معیار ۴، نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی انتخاب می‌کنیم. اگر میانگین این نمونه $15/1$ باشد، یک برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ به دست آورید.

پاسخ: $\sigma = 4, n = 100, \bar{X} = 15/1 \Rightarrow \bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 15/1 - 0/8 < \mu < 15/1 + 0/8$

پس با اطمینان ۹۵٪ میانگین جامعه در بازه $(14/3, 15/9)$ قرار دارد. طول بازه اطمینان برابر $1/6 = 2(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ است.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

آزمون نیمسال اول



درس: آمار و احتمال رشته: ریاضی فیزیک مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه تاریخ امتحان: دی ماه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جای خالی را کامل کنید. الف) درست یا نادرست بودن یک گزاره را می‌گوییم. ب) اگر $A = \{\emptyset, \{1\}, \{1, \emptyset\}\}$ باشد، A $\{\{1\}\}$. پ) شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های معلوم در علم مورد بررسی قرار می‌گیرد. ت) اگر برای دو پیشامد A, B داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$ آن‌گاه A, B را می‌گوییم.	۱
۲	جدول ارزش گزاره $q \Rightarrow p \vee \sim q$ را تشکیل دهید.	۱
۳	نقیض گزاره زیر را بنویسید. «عدد ۷ مربع کامل است و عدد ۶ اول نیست»	۰/۵
۴	a عددی صحیح است. عکس نقیض گزاره «اگر a^2 زوج باشد آن‌گاه a هم زوج است» را نوشته و سپس آن را ثابت کنید.	۱
۵	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) $(2 \times 2 = 5) \vee (1 + 1 = 2)$ ب) $(2 \times 2 = 5) \wedge (1 + 1 = 2)$ پ) $1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 \times 2 = 5$ ت) $\sim(2 \times 2) = 5 \Rightarrow 1 + 1 = 2$	۱
۶	ارزش و نقیض گزاره سوری مقابل را بنویسید. $\forall x \in \mathbb{R}; x < 0 \vee x^2 \geq 0$	۱
۷	با حذف ۳ عضو از عضوهای یک مجموعه تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸ تا کم می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟	۱
۸	فرض کنید $A \subseteq B$ به روش عضوگیری ثابت کنید $B' \subseteq A'$.	۱
۹	ثابت کنید \emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.	۰/۵
۱۰	همه افرازهای مجموعه $\{a, b, c, d\}$ به دو زیرمجموعه را بنویسید.	۱
۱۱	با استفاده از جبر مجموعه‌ها احکام زیر را ثابت کنید. الف) $(B \subseteq A) \wedge (B \subseteq A') \Rightarrow B = \emptyset$ ب) $(A \cap B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	۲
۱۲	اگر $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 1\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \leq 3\}$ باشد، عضوهای مجموعه $A \times B - A^2$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.	۱
۱۳	اگر $A = (-1, 2]$ و $B = \{-1, 1\}$ باشد، نمودار $A \times B$ را رسم و آن را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.	۱/۵



$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

آزمون نیمسال اول



درس: آمار و احتمال رشته: ریاضی فیزیک مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه تاریخ امتحان: دی ماه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جای خالی را کامل کنید. الف) درست یا نادرست بودن یک گزاره را می‌گوییم. ب) اگر $A = \{1, \{1\}, \phi\}$ باشد، A $\{\{1\}\}$. پ) شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های معلوم در علم مورد بررسی قرار می‌گیرد. ت) اگر برای دو پیشامد A, B داشته باشیم $A \cap B \neq \phi$ آن‌گاه A, B را می‌گوییم.	۱
۲	جدول ارزش گزاره $q \Rightarrow p \vee \sim q$ را تشکیل دهید.	۱
۳	نقیض گزاره زیر را بنویسید. «عدد ۷ مربع کامل است و عدد ۶ اول نیست»	۰/۵
۴	a عددی صحیح است. عکس نقیض گزاره «اگر a^2 زوج باشد آن‌گاه a هم زوج است» را نوشته و سپس آن را ثابت کنید.	۱
۵	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) $(2 \times 2 = 5) \vee (1 + 1 = 2)$ ب) $(2 \times 2 = 5) \wedge (1 + 1 = 2)$ پ) $1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 \times 2 = 5$ ت) $\sim (2 \times 2) = 5 \Rightarrow 1 + 1 = 2$	۱
۶	ارزش و نقیض گزاره سوری مقابل را بنویسید. $\forall x \in \mathbb{R}; x < 0 \vee x^2 \geq 0$	۱
۷	با حذف ۳ عضو از عضوهای یک مجموعه تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸ تا کم می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟	۱
۸	فرض کنید $A \subseteq B$ به روش عضوگیری ثابت کنید $B' \subseteq A'$.	۱
۹	ثابت کنید \emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.	۰/۵
۱۰	همه افرازهای مجموعه $\{a, b, c, d\}$ به دو زیرمجموعه را بنویسید.	۱
۱۱	با استفاده از جبر مجموعه‌ها احکام زیر را ثابت کنید. الف) $(B \subseteq A) \wedge (B \subseteq A') \Rightarrow B = \emptyset$ ب) $(A \cap B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	۲
۱۲	اگر $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 1\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 \leq 3\}$ باشد، عضوهای مجموعه $A \times B - A^2$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید.	۱
۱۳	اگر $A = (-1, 2]$ و $B = \{-1, 1\}$ باشد، نمودار $A \times B$ را رسم و آن را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.	۱/۵



$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$



جواب آخر تمرینات محاسباتی



در این بخش برای اینکه از پاسخی که به آن رسیده‌اید اطمینان پیدا کنید و اگر به جواب صحیح نرسیده‌اید بیشتر تلاش کنید تا به این پاسخ دست یابید، جواب آخر تمرین‌هایی که راه‌حل محاسباتی دارند آورده‌ایم.

۰/۳

$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{5}$

۰/۶

۰/۶

۰/۲۸

الف ۰/۰۵

ب ۰/۱۵

پ ۰/۳۳

ت ۰/۶۲

$\frac{19}{60}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{9}{20}$

الف $\frac{1}{14}$

ب $\frac{13}{14}$

پ $\frac{1}{14}$

۰/۲۸

الف ۰/۴۶۷

ب ۰/۲۶۷

پ ۰/۵۳۳

الف ۰/۲۸۴

ب ۰/۱۱۶

پ ۰/۲۶

ت ۰/۲۶

$P(b) = \frac{1}{4}$

$P(a) = \frac{1}{2}$

$p(b) = \frac{1}{6}$

$p(a') = \frac{2}{3}$

$p(a) = \frac{1}{6}$

$P(b) = \frac{1}{12}$

$P(i) = \frac{12}{25}$

$a = \frac{1}{2}$

$P(r) = \frac{1}{4}$

19

20

21

22

23

24

31

32

33

34

35

36

7

38

42

43

44

45

46

47

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

الف $n = 5$ ب ۳۱ پ ۳۱ 62

$n = 2$ 63

۶ عضو 64

۱۰ عضو 65

$k = 8$ 66

$n(B) = 5, n(A) = 9$ 67

۴ 69

۸ 70

الف ۵۱۲ ب ۶۳ پ ۱۵ 71

ت ۳۲ ث ۴۴۸ ج ۸ مجموعه 8

۶۴ مجموعه ج 72

الف ۱۲۶ ب ۵۶ پ ۷۰ 72

ت ۳۵ ث ۲۵۶ 73

۲۵۶ 85

$x = \frac{3}{2}$ 85

الف $x = -2, y = \pm\sqrt{2}$ ب $x = 4, y = 1$ 114

پ $x = 5, y = 3$ ت $x = \frac{5}{3}, y = 1$ 122

$x = 4, y = 7$ 132

الف ۴ عضو ب ۸ عضو 132

پ ۲۴ عضو ت ۱۲ عضو 132

فصل دوم: احتمال

۰/۶ 16

الف $\frac{13}{15}$ ب $\frac{1}{5}$ 17

$P(A) = \frac{8}{15}$ $P(B) = \frac{7}{15}$ 18



پاسخ تشریحی تعدادی از تمرین‌های دشوار

در این بخش می‌توانید پاسخ تشریحی سؤال‌های دشواری را که با علامت  مشخص شده‌اند ببینید.



82

$$\begin{cases} B' \subseteq A \cup B' & (i) \\ \forall x \in A \cup B' \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \notin B \Rightarrow x \in B' \\ \vee \\ x \in B' \end{cases} \\ \Rightarrow A \cup B' \subseteq B' & (ii) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(i, ii)} A \cup B' = B'$$

87

$$\begin{cases} A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \wedge 2^x \leq 1\} = \{-1, 0\} \\ A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \wedge 2^x \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1\} \\ A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \wedge 2^x \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\} \\ A_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \wedge 2^x \leq 4\} = \{-4, -3, \dots, 2\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^4 A_i = \{-4, -3, \dots, 2\} = A_4, \quad \bigcap_{i=1}^4 A_i = \{-1, 0\} = A_1$$

الف $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
 $= \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

97

پ $A \cap A \subseteq B \cap B' \rightarrow A \subseteq \emptyset \xrightarrow{\emptyset \subseteq A} A = \emptyset$

الف $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow (A \cup B)' = B'$
 $\Rightarrow A' \cap B' = B' \Rightarrow B' \subseteq A'$

101

ت $(A - B) \cup (A \cup B)' = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
 $= (A \cup A') \cap B' = U \cap B' = B'$

104

ب $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C')$
 $= (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

106

الف $A = \{k^2 \mid \underbrace{k \in \mathbb{N}, k \leq 2}_{1, 2}\} = \{1, 4\}$

118

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = x\} = \{0, 1\}$

ب $A \times A = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (4, 0), (4, 1)\}$

$A \times B - B \times B =$

$\{(1, 0), (1, 1), (4, 0), (4, 1)\} - \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
 $= \{(4, 0), (4, 1)\}$

پ $A \times B$ 4 عضو دارد پس $2^4 = 16$ زیرمجموعه دارد.

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

9 الف حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی زوج است چون یکی زوج و دیگری فرد است پس به ازای هر عدد صحیح X داریم $X(X+1) \in E$. بنابراین مجموعه جواب برابر \mathbb{Z} است.

24 ب

p	q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p	~q	~p ∧ ~q
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

یکان

27 الف

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv$$

دورگان

$$\sim p \wedge (\sim q \vee q) \equiv \sim p$$

39 ب عکس نقیض: اگر n مضرب 5 نباشد آن‌گاه n^2 مضرب 5 نیست. وقتی n بر 5 بخش‌پذیر نباشد پس در تقسیم بر 5 باقیمانده‌ای غیرصفر مثل r دارد و $n = 5q + r$. $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. $r^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$.

$$n^2 = (5q + r)^2 = 25q^2 + 10qr + r^2$$

$$= 5(\underbrace{5q^2 + 2qr}_{q'}) + r^2 = 5q' + r^2$$

بنابراین n^2 مضرب 5 نیست.

44 ج نقیض:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{Z}; (\frac{x+1}{3} = 0) \wedge (x^2 = 1))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \sim(\frac{x+1}{3} = 0) \vee \sim(x^2 = 1)$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; (\frac{x+1}{3} \neq 0) \vee (x^2 \neq 1)$$

ارزش گزاره: خود گزاره نادرست است چون به ازای هر عدد صحیح مثل x ، دو شرط برقرار نیست. مثلاً اگر $x = 1$ باشد $\frac{x+1}{3} \neq 0$. نقیض گزاره درست است.

56 ب

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$|x| \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$