

فهرست

تست

درس نامه

مقدمات

فصل صفر

قدر مطلق و جزء صحیح

۲۰	۱۱	درس ۱: قدر مطلق
۲۱	۱۵	درس ۲: جزء صحیح

فصل اول

تابع

فصل ۵ ریاضی دهم
فصل ۳ ریاضی یازدهم
فصل ۱ ریاضی دوازدهم

۸۸	۲۴	درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه
۹۰	۳۱	درس ۲: مفهوم دامنه و برد - تعیین دامنه
۹۵	۳۸	درس ۳: انواع تابع
۹۹	۴۴	درس ۴: انتقال نمودارها
۱۰۴	۵۰	درس ۵: معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی x^3
۱۰۶	۵۳	درس ۶: اعمال جبری روی توابع
۱۱۰	۵۸	درس ۷: ترکیب توابع
۱۱۵	۶۵	درس ۸: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)
۱۱۷	۷۲	درس ۹: تابع یک‌به‌یک
۱۱۸	۷۵	درس ۱۰: وارون تابع و تابع وارون
۱۲۴	۸۳	درس ۱۱: تعیین برد تابع

فصل دوم

مثلثات

فصل ۲ ریاضی دهم
فصل ۴ ریاضی یازدهم
فصل ۲ ریاضی دوازدهم

۱۷۱	۱۲۸	درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه و رادیان)
۱۷۲	۱۳۱	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه
۱۷۶	۱۳۶	درس ۳: دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های چهارگانه
۱۷۸	۱۴۲	درس ۴: اتحادهای اولیه
۱۸۰	۱۴۵	درس ۵: زاویه‌های ترکیبی
۱۸۲	۱۴۹	درس ۶: کمان‌های 2α
۱۸۵	۱۵۳	درس ۷: تابع متناوب
۱۸۷	۱۵۵	درس ۸: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس
۱۹۱	۱۶۰	درس ۹: تانژانت
۱۹۴	۱۶۴	درس ۱۰: معادله مثلثاتی

فصل سوم

حد و پیوستگی

فصل ۶ ریاضی یازدهم
فصل ۳ ریاضی دوازدهم

۲۳۶	۱۹۹	درس ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۲۳۷	۲۰۲	درس ۲: همسایگی
۲۳۸	۲۰۴	درس ۳: فرایندهای حدی و قوانین محاسبه حد
۲۴۲	۲۱۲	درس ۴: رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{0}{0}$)
۲۴۸	۲۱۹	درس ۵: حد بی‌نهایت
۲۵۰	۲۲۴	درس ۶: حد در بی‌نهایت
۲۵۵	۲۳۰	درس ۷: پیوستگی

فصل چهارم

مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

۲۹۴	۲۶۰	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۲۹۶	۲۶۵	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری
۳۰۰	۲۷۰	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده کردن)

تست

درس نامه

درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی ۲۷۳ ۳۰۳

درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق گیری در حضور بَرَاکَت و قدرمطلق ۲۷۶ ۳۰۴

درس ۶: پیوستگی و مشتق پذیری (در نقطه و بازه) ۲۷۹ ۳۰۷

درس ۷: نقاط مشتق ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم ۲۸۱ ۳۰۸

درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق ۲۸۵ ۳۱۱

درس ۹: مشتق تابع مرکب ۲۸۸ ۳۱۳

درس ۱۰: آهنگ تغییر ۲۹۱ ۳۱۶

درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق ۳۱۹ ۳۳۷

درس ۲: اکسترم‌های نسبی ۳۲۳ ۳۳۹

درس ۳: نقطه بحرانی ۳۲۷ ۳۴۱

درس ۴: اکسترم‌های مطلق ۳۳۰ ۳۴۳

درس ۵: بهینه‌سازی ۳۳۲ ۳۴۵

درس ۱: تفکر تجسمی ۳۴۹ ۳۷۴

درس ۲: بیضی ۳۵۸ ۳۷۸

درس ۳: دایره ۳۶۴ ۳۸۱

درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد ۳۸۶ ۴۰۴

درس ۲: احتمال رخداد یا پیشامد ۳۹۰ ۴۰۵

درس ۳: قوانین احتمال ۳۹۴ ۴۰۹

درس ۴: احتمال شرطی ۳۹۶ ۴۱۱

درس ۵: پیشامدهای مستقل ۳۹۹ ۴۱۴

درس ۶: قانون احتمال کل ۴۰۱ ۴۱۶

درس ۱: معادله درجه دوم و سهمی ۴۲۰ ۴۳۵

درس ۲: سهمی ۴۲۹ ۴۴۱

درس ۱: معادلات گویا ۴۴۶ ۴۶۱

درس ۲: معادلات رادیکالی ۴۴۹ ۴۶۲

درس ۳: تعیین علامت ۴۵۱ ۴۶۳

درس ۴: معادلات قدرمطلق ۴۵۷ ۴۶۶

درس ۱: یادآوری و تکمیل معادله خط ۴۶۹ ۴۸۰

فصل چهارم

مشتق

فصل ۴ ریاضی دوازدهم

فصل پنجم

کاربرد مشتق

فصل ۵ ریاضی دوازدهم

فصل ششم

هندسه (تفکر تجسمی و ...)

فصل ۶ ریاضی دوازدهم

فصل هفتم

احتمال

فصل ۷ ریاضی دهم

فصل ۷ ریاضی یازدهم

فصل ۷ ریاضی دوازدهم

فصل هشتم

معادله درجه دوم و سهمی

فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ ریاضی یازدهم

فصل نهم

معادله، نامعادله و تعیین علامت

فصل ۱ ریاضی یازدهم

فصل دهم

هندسه تحلیلی

فصل ۱ ریاضی یازدهم

تست

درس نامه

۴۹۷ ۴۸۶
۵۰۰ ۴۹۰
۵۰۲ ۴۹۲
۵۰۴ ۴۹۴
۵۰۵ ۴۹۵

درس ۱: تابع نمایی
درس ۲: تابع لگاریتمی
درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم
درس ۴: معادلات لگاریتمی
درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

فصل یازدهم

توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵ ریاضی یازدهم

۵۱۸ ۵۰۷
۵۱۹ ۵۱۱
۵۲۰ ۵۱۲
۵۲۲ ۵۱۶

درس ۱: توان و ریشه
درس ۲: رادیکال و توان‌های گویا
درس ۳: اتحادها
درس ۴: گویا کردن مخرج کسرها

فصل دوازدهم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۳ ریاضی دهم

۵۳۱ ۵۲۴
۵۳۲ ۵۲۸
۵۳۳ ۵۲۹

درس ۱: مجموعه‌های اعداد، بازه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
درس ۲: مجموعه مرجع و متمم
درس ۳: تعداد اعضای مجموعه

فصل سیزدهم

مجموعه و بازه

فصل ۱ ریاضی دهم

۵۴۸ ۵۳۵
۵۵۱ ۵۴۰
۵۵۳ ۵۴۴

درس ۱: الگوهای هندسی
درس ۲: دنباله حسابی
درس ۳: دنباله هندسی

فصل چهاردهم

الگو و دنباله

فصل ۱ ریاضی دهم

۵۷۲ ۵۵۶
۵۷۴ ۵۶۰
۵۷۶ ۵۶۴
۵۷۹ ۵۷۰

درس ۱: شمارش
درس ۲: جایگشت
درس ۳: ترکیب
درس ۴: جایگشت با حضور اشیای تکراری

فصل پانزدهم

شمارش، بدون شمردن

فصل ۶ ریاضی دهم

۵۹۴ ۵۸۲
۵۹۵ ۵۸۴
۵۹۶ ۵۸۷

درس ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار
درس ۲: شاخص‌های مرکزی
درس ۳: شاخص‌های پراکندگی

فصل شانزدهم

آمار

فصل ۷ ریاضی دهم

فصل ۷ ریاضی یازدهم

۶۱۹ ۶۰۱
۶۲۱ ۶۰۵
۶۲۲ ۶۰۷
۶۲۵ ۶۱۰
۶۲۷ ۶۱۳
۶۳۰ ۶۱۶

درس ۱: ترسیم‌های هندسی
درس ۲: استدلال
درس ۳: نسبت و تناسب - قضیه تالس
درس ۴: تشابه مثلث‌ها
درس ۵: نسبت مساحت‌ها
درس ۶: روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه

فصل هفدهم

هندسه

فصل ۲ ریاضی یازدهم

۶۳۳

پاسخ‌نامه کلیدی

درس نهم تابع یک به یک



تابع f وقتی یک به یک است که برای هر x از دامنه، یک y منحصر به فرد داشته باشد. پس باید خروجی‌ها تکراری نباشند. مثلاً تابعی که به هر کس کد ملی او را نسبت می‌دهد یک به یک است؛ چون کد ملی هیچ دو نفری مثل هم نیست. اما تابعی که به هر کس نام کوچک پدر او را نسبت می‌دهد یک به یک نیست؛ چون نام پدر خیلی‌ها یکسان است. در جدول زیر نمایش زوج مرتبی، پیکانی و نموداری توابع یک به یک را می‌بینیم:

انواع نمایش تابع	توضیحات	مثال
نمایش زوج مرتبی	در تمام زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های دوم متمایز باشند. اگر دو تا زوج مرتب با y یکسان دیدیم، باید x های آنها هم یکی باشند. یعنی: $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$	یک به یک است. $\{(1, 3), (2, 5), (3, 8)\}$ یک به یک نیست. $\{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 6)\}$
نمایش پیکانی	باید به هر عضو از مجموعه دوم، حداکثر یک فلش وارد شود. تعداد اعضای برد = تعداد اعضای دامنه.	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>C D</p> <p>یک به یک نیست. (دو فلش به عدد ۲ وارد شده است.)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>A B</p> <p>یک به یک است.</p> </div> </div>
نمایش نموداری	هیچ خط افقی نمودار را در ۲ نقطه یا بیشتر قطع نکند.	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>یک به یک نیست.</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>یک به یک است.</p> </div> </div>

مثل بخش تابع بودن، در این جا هم ممکن است بعضی از زوج‌های مرتب، پارامتر داشته باشند و باید شرط تابع و یک به یک بودن، مقادیر مجهول‌ها را پیدا کنیم. ببینید:

آزمون ۱ اگر $f = \{(1, 2), (-2, 1), (b, 1), (a, b), (a^2 - 3, 2)\}$ تابعی یک به یک باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ± 1 (۴) نشدنی

پاسخ ۱ اول هم $(a^2 - 3, 2)$ و هم $(1, 2)$ را می‌بینیم، پس باید داشته باشیم $a^2 - 3 = 1$ که از آن نتیجه می‌شود $a^2 = 4$ یا $a = \pm 2$. حالا به $(-2, 1)$ و $(b, 1)$ دقت می‌کنیم و در نتیجه b می‌شود -2 . اما نگران زوج مرتب (a, b) هستیم! چون اگر $a = -2$ باشد، تابع بودن را خراب می‌کند (هم $(-2, -2)$ و هم $(-2, 1)$ داریم). پس فقط $a = 2$ قابل قبول است. تابع را به ازای $a = 2$ و $b = -2$ ببینید:

خب خوب شد! f مشکلی ندارد و تابعی یک به یک و ۳ عضوی است.

پس $\frac{a}{b} = \frac{2}{-2} = -1$

پرسش مهم کتاب درسی

در تابع‌هایی که نمودارشان از نقاط مجزا تشکیل شده است، ممکن است سؤال بپرسد با حذف حداقل چند نقطه، به صورت یک به یک درمی‌آید. تست را ببینید:

آزمون ۲ شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. با حذف حداقل نقطه از این نمودار می‌توان به تعداد تابع یک به یک ساخت.

۲، ۶	(۱) ۲، ۳
۳، ۳	(۳) ۳، ۶

پاسخ ۱۳ | الان f یک‌به‌یک نیست؛ دوتا مشکل داریم: اولاً خط افقی $y = 0$ (همان محور x ها) نمودار را ۳ بار قطع کرده است و باید حداکثر یک بار قطع کند. پس باید حداقل ۲ تا از نقطه‌های روی محور x حذف شوند. ثانیاً خط افقی $y = 1$ نمودار را در دو نقطه قطع کرده است که باید حداقل یکی از آنها را حذف کرد. پس روی هم حداقل ۳ نقطه باید حذف کرد تا تابعی یک‌به‌یک ساخته شود.

حالا اگر گفتید با حذف ۳ نقطه، چند تابع یک‌به‌یک مختلف می‌شود ساخت؟ جواب $6 = \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}$ است.

انتخاب ۱ نقطه از روی خط $y = 1$ → انتخاب ۲ نقطه از روی خط $y = 0$

نمایش ضابطه‌ها

اگر ضابطه تابع را داشته باشیم و نخواهیم از شکل استفاده کنیم، معمولاً دنبال دوتا x می‌گردیم که y یکسان داشته باشند و مثال نقض می‌آوریم. مثلاً

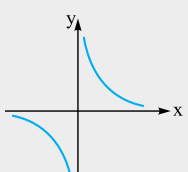
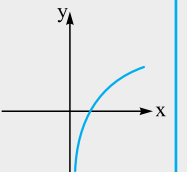
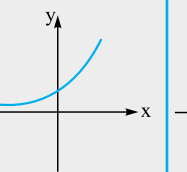
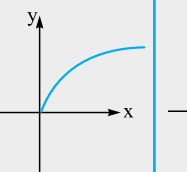
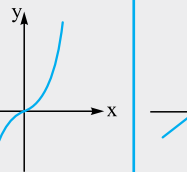
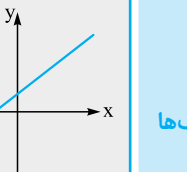
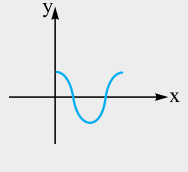
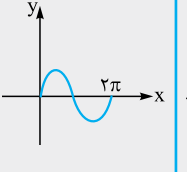
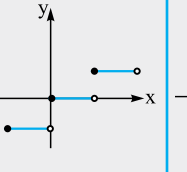
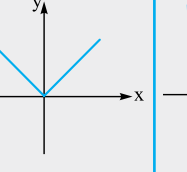
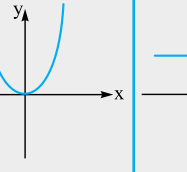
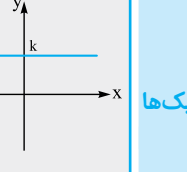
$y = x + \frac{1}{x}$ یک‌به‌یک نیست. چون هم $x = 2$ و هم $x = \frac{1}{2}$ را به $y = 2.5$ نظیر می‌کند.

اشاره ۱۴ | به زبان ریاضی اگر بخواهیم یک‌به‌یک بودن تابع را نشان بدهیم باید از $y_1 = y_2$ به $x_1 = x_2$ برسیم. مثلاً الان ثابت می‌کنیم $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ یک‌به‌یک است.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-2} = \frac{2x_2-1}{x_2-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x_1x_2 - 4x_1 - x_2 + 2 = 2x_2x_1 - 4x_2 - x_1 + 2$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

توابع معروف یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک

هموگرافیک	لگاریتمی	نمایی	رادیکالی	درجه ۳ با شکل	خطی	یک‌به‌یک‌ها
 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$	 $y = \log x$	 $y = a^x$	 $y = \sqrt{x}$	 $y = x^3$	 $y = ax + b; a \neq 0$	
کسینوسی	سینوسی	براکتی	قدرمطلق	درجه زوج	ثابت	غیر یک‌به‌یک‌ها
 $y = \cos x$	 $y = \sin x$	 $y = [x]$	 $y = x $	 $y = x^2$	 $y = k$	

آزمون ۱۵ | در میان توابع با ضابطه‌های $y = x^3 - x^4$ ، $y = x(x-2)$ ، $y = 3x-1$ و $y = \frac{2x+4}{x+2}$ چند تابع یک‌به‌یک وجود دارد؟

۲ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

پاسخ ۱۶ | فقط $y = 3x-1$ یک‌به‌یک است.

(الف) $y = x^3 - x^4$ چندجمله‌ای درجه چهارم است و یک‌به‌یک نیست. (البته با نگاهی ساده معلوم است که به ازای $x = 0$ و $x = 1$ ، جواب y صفر می‌شود، پس یک‌به‌یک نیست.)

(ب) $y = x(x-2)$ یک سهمی است و یک‌به‌یک نیست (در این جا هم معلوم است که $f(0) = f(2) = 0$).

(پ) $y = 3x-1$ خطی و یک‌به‌یک است.

(ت) $y = \frac{2x+4}{x+2}$ ساده می‌شود و به صورت $y = 2; (x \neq -2)$ درمی‌آید که یک‌به‌یک نیست. پس فقط یک تابع یک‌به‌یک وجود داشت.

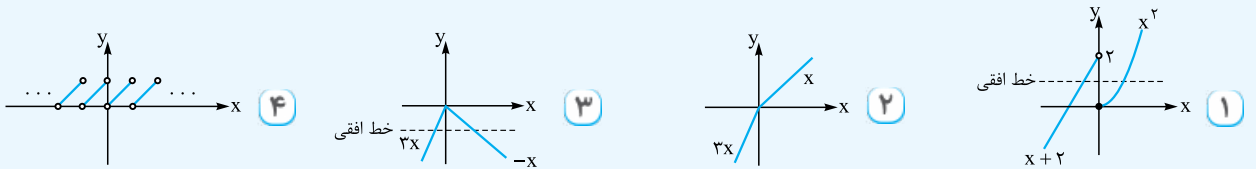
بررسی یک به یک بودن توابع چندضابطه‌ای، قدرمطلق و برکتی

در تابع‌های قدرمطلق، برکتی و چندضابطه‌ای، معمولاً با رسم شکل، می‌توانیم یک به یک بودن را تشخیص دهیم.

آزمون ۱ کدام تابع یک به یک است؟

$y = x - [x]$ (۴) $y = x - |2x|$ (۳) $y = 2x - |x|$ (۲) $\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases}$ (۱)

پاسخ ۲ نمودارها را می‌کشیم:



یک به یک نیست. $y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$ یک به یک است. $y = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$ یک به یک نیست. $y = x - [x]$ یک به یک نیست.

در تابع‌های چندضابطه‌ای، بعضی اوقات تست از ما می‌خواهد تابع را به صورت یک به یک درآوریم.

رابطه یکنوایی و یک به یک بودن تابع

گفتیم تأیید یک به یک بودن تابع از روی ضابطه، کار راحتی نیست. حالا یک راه خوب پیشنهاد می‌کنیم. اگر بتوانیم نشان دهیم که f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است، کار تمام است و f یک به یک است. پس به خاطر می‌سپاریم که هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. مثلاً $X^2 + X$ و $X^3 + \sqrt{X}$ همگی یک به یک هستند چون اکیداً صعودی‌اند و از طرف دیگر $-X^3 - X$ و $\sqrt{-X}$ ، اکیداً نزولی‌اند پس یک به یک هستند.

آزمون ۲ کدام تابع یک به یک نیست؟

$x + [x]$ (۱) $|x+3| + \sqrt{x}$ (۲) $x - \sqrt{-x}$ (۳) $\sqrt{x^2 + x + 1}$ (۴)

پاسخ ۴ در (۱)، $x + [x]$ ، جمع تابع اکیداً صعودی x و تابع صعودی $[x]$ است، پس اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک است.

در (۲)، به خاطر \sqrt{x} همواره $x \geq 0$ است، پس $|x+3|$ همان $x+3$ می‌شود و جمع دو تابع اکیداً صعودی را داریم که صعودی اکید و یک به یک است.

در (۳) تابع $\sqrt{-x}$ اکیداً نزولی است پس $-\sqrt{-x}$ اکیداً صعودی و جمع آن با x ، اکیداً صعودی است. پس این هم یک به یک است.

اما در (۴)، برای این که ثابت کنیم $\sqrt{x^2 + x + 1}$ یک به یک نیست، مثال نقض می‌آوریم: به ازای $x = 0$ مقدار تابع برابر ۱ می‌شود، از طرفی به ازای $x = -1$ نیز مقدار تابع برابر ۱ است.

محدود کردن دامنه و ساختن تابع یک به یک

در تابع‌های غیریک به یک مثل $y = x^2$ یا $y = |x|$ یا $y = \sin x$ به جای در نظر گرفتن کل دامنه، آن را محدود می‌کنیم تا تابع یک به یک ساخته شود. مثلاً $y = x^2$ با دامنه \mathbb{R} یک به یک نیست اما با دامنه $(-2, 0)$ یا $(1, 2)$ و یا $[0, +\infty)$ یک به یک است. ببینید:



با دامنه \mathbb{R} یک به یک نیست با دامنه $[0, +\infty)$ یک به یک است با دامنه $(-2, 0)$ یک به یک است با دامنه $(1, 2)$ یک به یک است

با دیدن نمودارهای بالا یک نتیجه‌گیری مهم می‌کنیم:

نکته سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، در قسمت‌هایی از دامنه که شامل رأس آن باشد، یک به یک نیست. (البته اگر رأس سهمی در ابتدا یا انتهای بازه قرار داشته باشد، سهمی در آن بازه یک به یک است.)

آزمون ۱۵ به ازای کدام مقادیر a ، تابع $f(x) = x^2 + ax$ در فاصله $(-۲, ۳)$ یک به یک است؟

- (۱) $[۴, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -۶]$ (۳) $[-۶, ۴]$ (۴) $(-\infty, -۶] \cup [۴, +\infty)$

پاسخ ۱۵ سهمی در بازه‌هایی که شامل رأس آن باشد یک به یک نیست. بنابراین باید a را به گونه‌ای انتخاب کنیم که رأس سهمی خارج از بازه $(-۲, ۳)$ باشد. طول رأس سهمی برابر است با $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2}$ پس:

$$-\frac{a}{2} \geq 3 \Rightarrow a \leq -6 \quad \text{یا} \quad -\frac{a}{2} \leq -2 \Rightarrow a \geq 4$$

بنابراین اگر a عضو $(-\infty, -۶] \cup [۴, +\infty)$ باشد، تابع $f(x)$ در بازه $(-۲, ۳)$ یک به یک است.

درس دهم وارون تابع و تابع وارون



وارون یک تابع

از سال یازدهم به یاد داریم که وارون تابع f را f^{-1} می‌نامیم و برای ساختن f^{-1} ، جای x و y را عوض می‌کنیم. این‌ها را ببینید:

مثال	نحوه وارون کردن	بازنمایی تابع
	جهت پیکان‌ها را عوض می‌کنیم.	نمودار پیکانی
$f = \{(-1, 2), (3, 0)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, -1), (0, 3)\}$	جای مؤلفه‌ها را عوض می‌کنیم.	زوج‌های مرتب
$f(4) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$	به جای $f(a) = b$ می‌نویسیم $f^{-1}(b) = a$.	مقدار در یک نقطه
	نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم.	نمودار مختصاتی
$f: y = x^3 \Rightarrow f^{-1}: x = y^3$ $g: x + 2y = 5 \Rightarrow g^{-1}: y + 2x = 5$	جای x و y را عوض کنیم.	رابطه بین x و y

آزمون ۱۶ اگر $f = \{(2, -1), (3, 1), (0, 2), (1, 0)\}$ و $g = \{(1, -1), (2, 0), (-1, 3), (-3, 4)\}$ ، آن‌گاه $y = (g^{-1} + f^{-1})(x)$ شامل کدام زوج مرتب است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(-1, 3)$ (۴) $(-1, 4)$

پاسخ ۱۶ با عوض کردن جای مؤلفه‌های زوج مرتب‌ها، توابع f^{-1} و g^{-1} را به دست می‌آوریم:

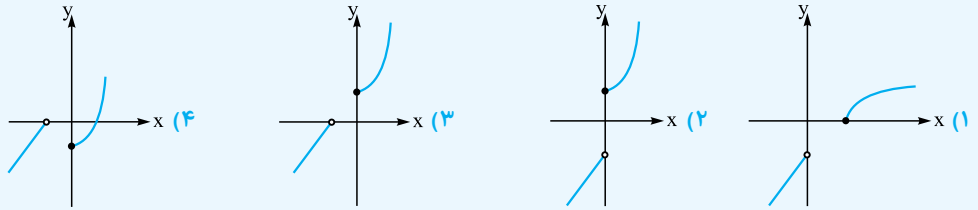
$$f^{-1} = \{(-1, 2), (1, 3), (2, 0), (0, 1)\} \quad \text{و} \quad g^{-1} = \{(-1, 1), (0, 2), (3, -1), (4, -3)\}$$

برای $f^{-1} + g^{-1}$ سراغ مؤلفه‌های اول مشترک می‌رویم. در بین x ها، اعداد -1 و 0 مشترک‌اند و در x های مشترک مؤلفه‌های دوم را با هم جمع می‌کنیم:

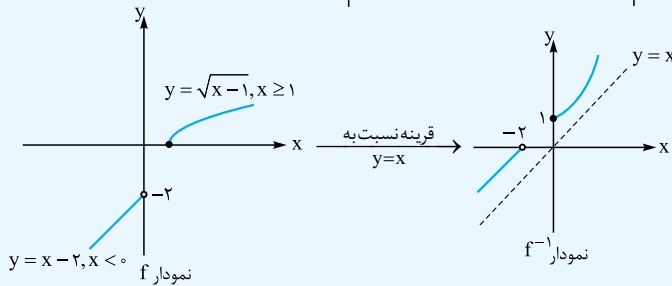
$$\begin{cases} (0, 2) \in g^{-1} \\ (0, 1) \in f^{-1} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع ی‌ها}} (0, 3) \in g^{-1} + f^{-1} \quad \text{و} \quad \begin{cases} (-1, 1) \in g^{-1} \\ (-1, 2) \in f^{-1} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع ی‌ها}} (-1, 3) \in g^{-1} + f^{-1}$$

حالا تابع $f^{-1} + g^{-1} = \{(0, 3), (-1, 3)\}$ می‌شود:

تست ۱۵ وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}$ به کدام شکل است؟



پاسخ ۱۵ نمودار تابع f را رسم و نسبت به $y = x$ قرینه می‌کنیم:



اشاره ۱۵ نقطه $(1,0)$ روی محور x به نقطه $(0,1)$ روی محور y نظیر می‌شود.

تابع وارون

وارون یک تابع ممکن است تابع باشد و یا تابع نباشد. این‌ها را ببینید:

الف $f = \{(1,2), (-1,3), (0,2)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2,1), (3,-1), (2,0)\}$

f تابع است اما f^{-1} تابع نیست چون دوتا زوج مرتب با مولفه اول ۲ دارد. دقت کنید که چون تابع f دارای y تکراری بود، طبیعتاً f^{-1} ، x های تکراری خواهد داشت.

ب $f = \{(2,4), (-1,5), (0,1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(4,2), (5,-1), (1,0)\}$

f تابع است و f^{-1} نیز تابع است. از اول هم معلوم بود که چون f ، y تکراری ندارد، f^{-1} هم x تکراری نخواهد داشت. حالا بگویید در چه صورت وارون یک تابع، تابع است؟ خوب باید تابع خودمان y تکراری نداشته باشد یعنی یک‌به‌یک باشد.

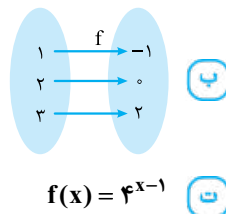
نکته اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، f^{-1} نیز تابع است، در این صورت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است و به f^{-1} می‌گوییم تابع وارون و این‌طوری یاد بگیرید که جملات زیر معادل هم هستند.

۱) f وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است. ۲) f یک‌به‌یک است. ۳) وارون f ، تابع است. ۴) f تابع وارون دارد.

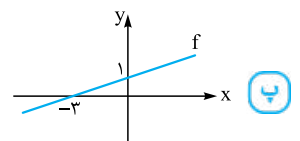
محاسبه مقدار تابع وارون

برای پیدا کردن $f^{-1}(b)$ باید از خودمان بپرسیم چه عددی رابطه $f(a) = b$ را برقرار می‌کند. به بیان ساده‌تر $f^{-1}(b)$ از ما می‌پرسد به f چه عددی بدهیم تا جوابش b شود؟

مثال ۱۶ در تابع‌های زیر مقدار $f^{-1}(2)$ را پیدا کنید.



الف $f = \{(2,1), (-1,4), (0,2), (4,1)\}$



پاسخ ۱۶ **الف** در تابع f زوج مرتب $(0,2)$ داریم، پس در f^{-1} زوج مرتب $(2,0)$ وجود دارد و بنابراین $f^{-1}(2) = 0$. یا این‌جوری می‌گوییم که اگر

عدد صفر را به f بدهیم، ۲ می‌دهد پس در f^{-1} ، ۲ را می‌گیرد و صفر می‌دهد.

ب تابع f عدد ۳ را به ۲ نظیر کرده پس f^{-1} عدد ۲ را به ۳ نظیر می‌کند یعنی $f^{-1}(2) = 3$.

پ تابع f خط است و از $(0, 1)$ و $(-3, 0)$ می‌گذرد. پس معادله آن $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ است. حالا $f^{-1}(2)$ از ما می‌پرسد به x چه عددی بدهیم تا $f(x)$ بشود ۲؟ خُب فکر کنید ... اگر $\frac{1}{3}x + 1 = 2$ بخواهد ۲ بشود باید x چند باشد؟
پس $f^{-1}(2) = 3$.

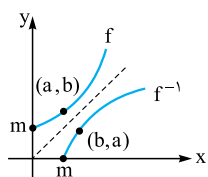
ت $f^{-1}(2)$ یعنی چه؟ یعنی در $f(x) = 4^{x-1}$ مقدار x چه قدر باشد تا $f(x)$ بشود ۲. پس $f(x)$ را مساوی ۲ قرار می‌دهیم:
 $4^{x-1} = 2 \Rightarrow (2^2)^{x-1} = 2 \Rightarrow 2^{2x-2} = 2^1 \Rightarrow 2x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ یعنی $f^{-1}(2) = \frac{3}{2}$
اشاره باز هم تأکید کنیم که $f^{-1}(b)$ از ما می‌خواهد $f(x) = b$ قرار دهیم و x را پیدا کنیم.

اشاره در تابع‌های دوضابطه‌ای باید حواسمان به دامنه f^{-1} (یعنی برد f) باشد و دقت کنیم که کدام ضابطه را استفاده می‌کنیم:

تست ۱ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 1 \\ \frac{4}{x-1} & x < 1 \end{cases}$ مقدار $f^{-1}(3) + f^{-1}(-1)$ کدام است؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ ۱ $f^{-1}(3)$ یعنی به x چه عددی بدهیم تا حاصل f برابر ۳ شود. ضابطه بالا می‌گوید $x = 8$ و اتفاقاً با دامنه‌اش هم مطابقت دارد. پس $f^{-1}(3) = 8$.
برای $f^{-1}(-1)$ از ضابطه بالا $x = -8$ درمی‌آید که قابل قبول نیست (چون دامنه این ضابطه $x \geq 1$ است)، اما از ضابطه پایین، اگر $\frac{4}{x-1} = -1$ را مساوی -1 بگذاریم $x = -3$ درمی‌آید که مناسب است. پس جواب می‌شود:
 $f^{-1}(3) + f^{-1}(-1) = 8 + (-3) = 5$



نکته ۱ اگر نقطه‌ای روی نمودار f باشد (a, b) نقطه متناظر آن روی نمودار f^{-1} است.

۲ اگر نمودار f محور x را در m قطع کند، نمودار f^{-1} محور y را در m قطع می‌کند و بالعکس.

تست ۱ اگر $f(x) = x + \sqrt[3]{x} + m + 1$ و نقطه $(5, 1)$ روی نمودار f^{-1} باشد، نمودار f^{-1} محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

(۱, ۰) (۱) (۲, ۰) (۲) (۳, ۰) (۳) (۴, ۰) (۴)

پاسخ ۱ اول از این که $(5, 1)$ روی f^{-1} است، نتیجه می‌گیریم $(1, 5)$ روی نمودار f است؛ یعنی $f(1) = 5$. پس داریم: $1 + \sqrt[3]{1} + m + 1 = 5$ و بنابراین $m = 2$.

حالا قرار است f^{-1} محور طول‌ها را قطع کند پس دنبال نقطه $(b, 0)$ روی f^{-1} هستیم. یعنی در تابع f ، نقطه $(0, b)$ را می‌خواهیم.

$$\xrightarrow{m=2} f(x) = x + \sqrt[3]{x} + 3 \xrightarrow{x=0} f(0) = b = 3$$

پس f^{-1} از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد.

دامنه و برد تابع وارون

چون x های f^{-1} همان y های f هستند و بالعکس، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f است. هم‌چنین برد تابع f^{-1} نیز همان دامنه تابع f است. به زبان ریاضی داریم:

• $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$ •

تست ۱ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$ باشد، برد $g(x)$ کدام است؟

[۰, ۱] (۱) $\mathbb{R} - [0, 1]$ (۲) $\mathbb{R} - (0, 1)$ (۳) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ (۴)

پاسخ ۱ $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، پس برد آن برابر دامنه تابع $f(x)$ است که می‌شود:

$$x^2 - x \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c|c|c|c|c} x & & 1 & & \\ \hline x^2 - x & + & | & - & | & + \end{array} \quad R_g = D_f = \mathbb{R} - (0, 1)$$

تعیین ضابطه تابع وارون

گفتیم که برای تعیین ضابطه f^{-1} ، در ضابطه تابع f جای x و y را عوض می‌کنیم. بعد باید عبارت حاصل را مرتب کنیم و یادمان نرود که دامنه f^{-1} برد f بود. مثلاً وارون تابع $y = 2x^5 - 1$ را می‌خواهیم. جای x و y را عوض می‌کنیم و به $x = 2y^5 - 1$ می‌رسیم. حالا آن را مرتب می‌کنیم:

$$x + 1 = 2y^5 \Rightarrow y^5 = \frac{x+1}{2} \Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{2}}$$

$$y = 2x^5 - 1 \Rightarrow x^5 = \frac{y+1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{y+1}{2}}$$

$$y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{2}}$$

البته می‌توانستیم این‌طور هم بگوییم: اول x را بر حسب y پیدا می‌کنیم:

و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم:

اول بریم سراغ تابع‌های مهم!

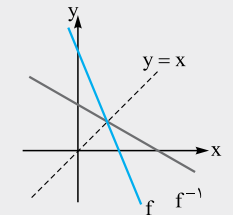
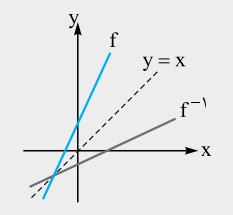
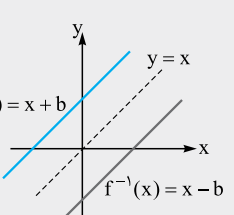
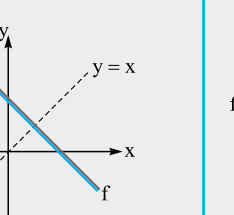
وارون تابع خطی

• $f^{-1}(x) = y = \frac{x-b}{a}$ •

اگر $f(x) = y = ax + b$ باشد (با شرط $a \neq 0$)، وارون آن می‌شود:

پس وارون تابع خطی نیز یک تابع خطی است و شیب آن‌ها عکس یکدیگر است. مثلاً اگر شیب خط ۲ باشد، شیب وارون آن $\frac{1}{2}$ است. در حالی که شیب

خط برابر ۱ یا -۱ باشد، اتفاقات جالبی رخ می‌دهد که در جدول زیر می‌بینیم:

رابطه شیب و وارون	اگر شیب خط ± 1 نباشد، حتماً وارونش را در یک نقطه روی $y = x$ قطع می‌کند.	اگر شیب خط برابر ۱ باشد، خط و وارونش با هم موازی‌اند.	در خط $y = x$ و هر خطی که شیب آن برابر -۱ باشد، خط و وارونش بر هم منطبق‌اند.
			
نمودار			

آزمون | وارون تابع خطی f ، به صورت یک خط با شیب ۲ است. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

پاسخ | وقتی شیب وارون f ، ۲ است شیب خود f حتماً $\frac{1}{2}$ بوده، $f(0)$ هم برابر ۲ است، پس:

حالا مقدار $f^{-1}(1)$ را می‌خواهیم:

$\frac{1}{2}x + 2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Rightarrow x = -2$

راه I | چه عددی به $\frac{1}{2}x + 2$ بدسیم تا جواب آن ۱ شود؟

$x = \frac{1}{2}y + 2 \Rightarrow x - 2 = \frac{1}{2}y \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2x - 4$

راه II | $y = \frac{1}{2}x + 2$ را وارون کنیم:

$\xrightarrow{x=1} y = f^{-1}(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$

حالا:

وارون تابع هموگرافیک

در تابع هموگرافیک $f(x) = y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به راحتی می‌توانیم ضابطه f^{-1} را پیدا کنیم. اگر جای y و x را عوض و سپس مرتب کنیم، می‌شود:

• $f^{-1}(x) = y = \frac{-dx+b}{cx-a}$ •

حفظ می‌کنند که: جای a و d را عوض و هر دو را قرینه می‌کنیم، مثلاً وارون $y = \frac{7x-1}{2x-5}$ می‌شود $y = \frac{+5x-1}{2x-7}$.

نکته اگر d و a (ضرب x صورت و عدد ثابت مخرج) قرینه هم باشند، وارون تابع هموگرافیک خودش می‌شود. مثلاً تابع در

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{5x-3}$$

$f(x) = \frac{3x-1}{5x-3}$ ، $a = 3$ و $d = -3$ یعنی قرینه هم هستند، پس f^{-1} همان f است:

$y = \frac{1}{x}$ بهترین مثال این نکته است.

تست ۱۴ اگر وارون تابع $f(x) = \frac{x-m}{x-m^2}$ خودش باشد، مقدار $f^{-1}(7)$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۷ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۱)

پاسخ ۱۴ باید a و d قرینه هم باشند. a برابر ضرب x صورت یعنی ۱ است و d همان عدد ثابت مخرج یعنی $-m^2$ است. پس داریم:

$$-m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } -1$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

دقت کنید که به ازای $m = 1$ تابع اصلاً هموگرافیک نمی‌شود ($\frac{x-1}{x-1}$ که هموگرافیک نیست!) پس $m = -1$ و داریم:

$$\frac{7+1}{7-1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

حالا مقدار $f^{-1}(7)$ را می‌خواهیم. چون f و f^{-1} بر هم منطبق‌اند، $f^{-1}(7)$ همان $f(7)$ است که می‌شود

نکته گفتیم در حالت $a+d=0$ تابع هموگرافیک بر وارونش منطبق می‌شود. اگر $a+d \neq 0$ باشد، وارونش را قطع نمی‌کند و یا حتماً

روی $y=x$ قطع می‌کند. وقتی می‌پرسند تابع هموگرافیک، کجا وارونش را قطع می‌کند، راه عادی این است که تابع را مساوی وارون آن قرار دهیم اما کار بهتر این است که به جای حل $f^{-1} = f$ ، f را مساوی x قرار دهیم.

تست ۱۵ تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ و وارونش در دو نقطه متقاطع‌اند. مجموع طول این نقاط چه قدر است؟

- ۱ (۱) -1 (۲) ۳ (۳) -3 (۴)

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{جای } 1 \text{ و } -1 \text{ را عوض و هر دو را قرینه کنیم}} f^{-1}(x) = \frac{1x+3}{x-2}$$

پاسخ ۱۵ **راه ۱** اول تابع را وارون کنیم:

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{x+3}{x-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 - 4x + 3x - 6 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a} = 3$$

راه ۲ حالا از آن روش بهتر می‌رویم. قرار شد در تلاقی تابع هموگرافیک و وارونش (وقتی بر هم منطبق نیستند) به جای $f^{-1} = f$ ، تابع f را مساوی x قرار دهیم:

$$\frac{2x+3}{x-1} = x \Rightarrow x^2 - x = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a} = 3$$

قرار دهیم:

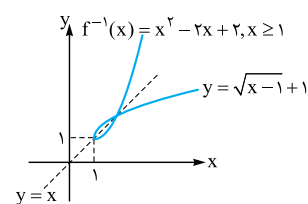
وارون تابع $y = \sqrt{ax+b}$

وارون تابع \sqrt{x} و انتقال‌های آن، همیشه قسمتی از یک سهمی است. مثلاً وارون خود $y = \sqrt{x}$ ، نیمه راست سهمی $y = x^2$ است.

در این جا خیلی مهم است که جلوی ضابطه تابع وارون، دامنه آن را بنویسیم (برد خود تابع را بنویسیم). مثلاً می‌خواهیم $y = \sqrt{x-1} + 1$ را وارون کنیم:

$$y = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-1 \Rightarrow x-1 = (y-1)^2 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 1 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 2$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 - 2x + 2$$



حالا حتماً باید برد تابع $y = \sqrt{x-1} + 1$ یعنی مجموعه $(1, +\infty)$ را به عنوان شرط دامنه برای تابع وارون

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2, x \geq 1$$

بنویسیم. یعنی جواب درست ضابطه تابع وارون می‌شود:

نمودار را هم ببینید:

تست ۱۶ ضابطه وارون تابع $f(x) = 1 - \sqrt{-x+3}$ کدام است؟

- $-x^2 + 2x + 2, x \leq 3$ (۴) $-x^2 + 2x - 2, x \leq 3$ (۳) $-x^2 + 2x + 2, x \leq 1$ (۲) $-x^2 + 2x - 2, x \leq 1$ (۱)

پاسخ ۱۶ اول دقت کنیم که برد تابع $f(x) = 1 - \sqrt{-x+3}$ فقط شامل y های کم‌تر یا مساوی ۱ است. پس شرط دامنه تابع وارون باید $x \leq 1$ باشد که

در گزینه‌های (۱) و (۲) درست گفته است. حالا جای x و y را عوض کنیم:

$$y = 1 - \sqrt{-x+3} \xrightarrow{\text{عوض کنیم}} x = 1 - \sqrt{-y+3} \Rightarrow 1-x = \sqrt{3-y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1-2x+x^2 = 3-y \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 2$$

$$f^{-1}(x) = -x^2 + 2x + 2, x \leq 1$$

پس جواب می‌شود:



• به دست آوردن f^{-1} از روی گزینه‌ها • بهترین راه به دست آوردن تابع وارون در تست‌ها، استفاده از گزینه‌ها است فقط کافی است به دو مورد زیر توجه کنید:

۱ دامنه تابع f ، برد تابع f^{-1} است و برد تابع f ، دامنه تابع f^{-1} خواهد بود.

۲ اگر نقطه (a, b) عضو تابع f باشد، حتماً نقطه (b, a) عضو تابع f^{-1} خواهد بود و برعکس.

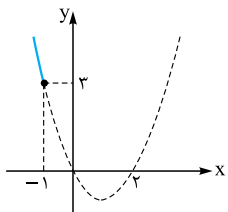
به عنوان مثال یک بار دیگر تست قبل را ببینید. اگر $x = 2$ قرار دهیم، داریم $f(2) = 0$ پس ضابطه‌ای درست است که به ازای $x = 0$ بشود ۲ (چون $f^{-1}(0) = 2$) و در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند. در گزینه‌های ۲ و ۴ ضابطه‌ها با هم برابر هستند و فقط دامنه‌هایشان متفاوت است. حالا باید برد تابع $f(x) = 1 - \sqrt{-x+3}$ را به دست بیاوریم، این شکلی:

$$\sqrt{-x+3} \geq 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } -1} -\sqrt{-x+3} \leq 0 \xrightarrow{\text{جمع بایک}} 1 - \sqrt{-x+3} \leq 1 \Rightarrow \text{برد: } (-\infty, 1]$$

پس دامنه f^{-1} باید $x \leq 1$ باشد، در نتیجه ۲ درست است.

وارون تابع درجه‌دو

سهمی در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون پذیر هم نیست، اما با تحدید دامنه، یک‌به‌یک می‌شود و تابع وارون آن به صورت رادیکالی است. مثلاً می‌خواهیم $y = x^2 - 2x$ را برای $x \leq -1$ وارون کنیم:



$$y = x^2 - 2x \quad (x \leq -1) \xrightarrow{\text{وارون}} x = y^2 - 2y \quad (y \leq -1)$$

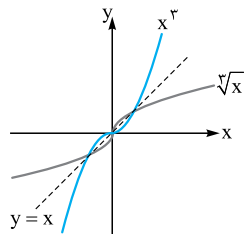
$$\xrightarrow{\text{به دو طرف اضافه کنیم تا مربع کامل شود}} x + 1 = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x+1} = |y - 1|$$

آهان، دقت کردید که شرط $(x \leq -1)$ را هم وارون کردیم و نوشتیم $y \leq -1$ ؟ حالا این شرط به دردمان می‌خورد که در عبارت $|y - 1|$ ، قدرمطلق را با علامت منفی برداریم: $y = 1 - \sqrt{x+1}$ $\Rightarrow \sqrt{x+1} = -(y-1) = 1-y \Rightarrow y = 1 - \sqrt{x+1}$ برد تابع $y = x^2 - 2x$ با دامنه $x \leq -1$ به صورت $(-\infty, -1]$ است، پس ضابطه تابع وارون می‌شود:

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}; \quad x \geq -1$$

شماره ۱۳ | یادتان نرود که در مقابل ضابطه وارون باید دامنه آن یعنی برد f را بنویسید.

وارون تابع درجه‌سه



وارون $y = x^3$ به صورت $y = \sqrt[3]{x}$ است. آن‌ها را در یک دستگاه کنار هم ببینید:

۱ f و f^{-1} هر دو صعودی با دامنه و برد \mathbb{R} هستند ۲ همدیگر را در $(-1, -1)$ ، $(0, 0)$ و $(1, 1)$ قطع می‌کنند. برای وارون کردن سایر تابع‌های درجه‌سوم باید حتماً آن‌ها را به شکل $y = a(x - x_1)^3 + b$ در بیاوریم و گرنه نمی‌توانیم وارون را پیدا کنیم. پس اگر عبارتی به شکل اتحاد باز شده دادند، اول باید اتحاد را بسازیم. ببینید:

تست ۱۵ | وارون تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ به کدام صورت است؟

۱ $\sqrt{x-2}+8$ ۲ $\sqrt{x+2}-8$ ۳ $\sqrt{x-8}-2$ ۴ $\sqrt{x-8}+2$

پاسخ ۴ | راه ۱ | در تابع اصلی $f(0) = 0$ است، پس در وارون هم باید $f^{-1}(0) = 0$ باشد که فقط به ۴ می‌خورد.

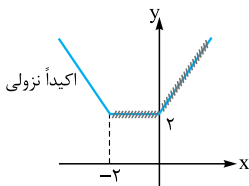
راه ۲ | ضریب‌های -6 و 12 و مقایسه قیافه عبارت‌ها با اتحاد $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ نشان می‌دهد این تابع به اتحاد $(x-2)^3$ شبیه می‌شود.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 8 \Rightarrow f(x) = (x-2)^3 + 8$$

$$y = (x-2)^3 + 8 \Rightarrow (x-2)^3 = y-8 \Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-8} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt[3]{x-8} + 2 \quad \text{حالا وارون:}$$

وارون توابع قدرمطلق‌دار

تابع‌های قدرمطلق معمولاً یک‌به‌یک نیستند و بیشتر اوقات آن‌ها را در یک بازه خاص وارون می‌کنیم. معمولاً صورت سؤال وارون تابع را در بازه‌ای که صعودی یا نزولی باشد، می‌خواهد.



مثلاً $y = |x| + |x+2|$ در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست. اما در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی و یک‌به‌یک است. در این

$$\text{بازه، داخل قدرمطلق‌ها منفی اند و داریم: } y = -x - (x+2) = -2x - 2 \xrightarrow{\text{وارون}} x = -2y - 2 \Rightarrow y = \frac{-x-2}{2}$$

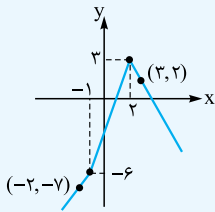
$$f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{2}, \quad x > 2$$

به عنوان شرط دامنه f^{-1} ، برد تابع f را می‌نویسیم:

آزمون ۱ وارون تابع $f(x) = |x+1| - |2x-4|$ در بازه‌ای که اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- (۱) $x < 2, x > 5$ (۲) $x < 3, x > 5$ (۳) $x > 2, x > 5$ (۴) $x > 2, -x + 5$

پاسخ ۱ رسم نمودار این تابع را بلدیم. نقاط شکستگی $(-1, -6)$ و $(2, 3)$ هستند و نقاط کمکی بعد و قبل، $(3, 2)$ و $(-2, -7)$ هستند.



تابع برای $x > 2$ با برد $(-\infty, 3)$ اکیداً نزولی است. پس حتماً شرط دامنه در ضابطه وارون آن $x < 3$ باید باشد.

حالا با x های بیشتر از ۲، درون قدرمطلقها مثبت است و ضابطه تابع $y = (x+1) - (2x-4) = -x+5$ خواهد بود که وارون آن می‌شود خودش (چرا؟).
 $f^{-1}(x) = -x+5, x < 3$

وارون توابع نمایی و لگاریتمی

در فصل لگاریتم و نمایی خوانده‌ایم که توابع $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ وارون هم هستند.

برای محاسبه ضابطه وارون توابع نمایی یا لگاریتمی هم همان ماجرای همیشگی را داریم. جای x و y را عوض می‌کنیم و ... ببینید:

$$y = \log_2(x-1) \xrightarrow{\text{عوض } x \text{ و } y} x = \log_2(y-1) \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} 2^x = y-1 \Rightarrow y = 2^x + 1$$

آزمون ۲ وارون تابع $f(x) = 2^{x+1} - 1$ کدام ضابطه را دارد؟

- (۱) $\log_2(x+1) - 1$ (۲) $\log_2(x-1) - 1$ (۳) $\log_2(x-1) + 1$ (۴) $\log_2(x+1) + 1$

پاسخ ۲ عددگذاری به ازای $x = 1$ داریم $f(1) = 2^2 - 1 = 3$. پس گزینه‌ای درست است که در تابع f^{-1} به ازای $x = 3$ ، ۱ بدهد که فقط در (۱)

$$f^{-1}(x) = \log_2(x+1) - 1 \Rightarrow f^{-1}(3) = \log_2 4 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

این طور است.

$$f(x) = 2^{x+1} - 1 \xrightarrow{\text{جا عوض}} x = 2^{y+1} - 1 \Rightarrow x+1 = 2^{y+1}$$

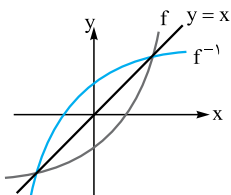
راه ۲ جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف } \log_2 \text{ بگیریم}} \log_2(x+1) = \log_2 2^{y+1} = y+1 \Rightarrow y = \log_2(x+1) - 1$$

تلاقی f و f^{-1}

یادمان نرفته f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه هم هستند. حالا دو حالت داریم:

۱ اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، وارونش را فقط روی $y = x$ قطع می‌کند. یعنی به جای برخورد f و f^{-1} ، دنبال نقاط برخورد $f(x)$ و x می‌گردیم. پس باید $x = f(x)$ قرار دهیم و x ها را پیدا کنیم و تمام. مثلاً $y = \sqrt{x+2}$ اکیداً صعودی است و می‌خواهیم ببینیم وارونش را کجا قطع می‌کند. باید بنویسیم $\sqrt{x+2} = x$ و از این معادله $x = 2$ ، طول نقطه برخورد f و f^{-1} به دست می‌آید. دقت کنید که عرض نقطه برخورد هم ۲ است.



آزمون ۳ اگر $f(x) = 3x - |x-1|$ ، آن گاه f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟

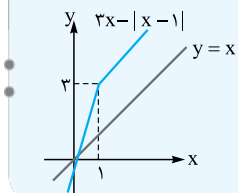
- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

پاسخ ۳ نمودار $f(x) = 3x - |x-1|$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم اکیداً صعودی است پس کافی است آن را با $y = x$ تلاقی دهیم:

$$3x - |x-1| = x \Rightarrow |x-1| = 2x \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x \Rightarrow x = -1 \\ x-1 = -2x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(جواب قدرمطلق منفی نمی‌شود) غرق

پس فقط در نقطه $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ تابع و وارونش متقاطع‌اند.



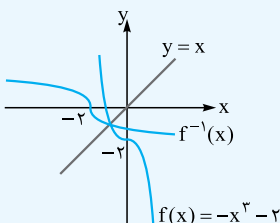
۲ اگر تابع f اکیداً صعودی نباشد، غیر از نقاط برخوردش با $y = x$ در هر نقطه دیگری هم می‌تواند وارونش را قطع کند. پس باید معادله $f = f^{-1}$ را حل کنیم، برای حل این معادله بهتر است که شکل f و f^{-1} را در یک دستگاه بکشیم و ببینیم در چه نقاطی متقاطع‌اند.

آزمون ۴ اگر $f(x) = -x^3 - 2$ باشد، f و f^{-1} در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ ۴ چون f ، اکیداً صعودی نیست، پس بهتر است f و f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنیم:

دو تابع در یک نقطه روی نیمساز ناحیه سوم متقاطع‌اند.



نکته این را هم در ذهن داشته باشید که اگر f و f^{-1} در نقطه (a, b) متقاطع باشند، این نقطه در هر دو تابع صدق می‌کند یعنی هم $f(a) = b$ و هم $f^{-1}(a) = b$ است. به بیان ساده‌تر باید نقطه‌های (a, b) و (b, a) در f صدق کنند.

تلاقی f^{-1} با تابع دیگری مثل g

اگر محاسبه f^{-1} سخت بود، می‌توانیم به جای تلاقی f^{-1} با g ، مسئله را کلاً وارون کنیم و به جای «برخورد f^{-1} با g » برخورد تابع f با g^{-1} را بررسی کنیم. مثلاً اگر سؤال گفته « f^{-1} ، خط $g: y = 2x$ را کجا قطع می‌کند؟» ما ببینیم « f ، خط $y = \frac{x}{2}$: g^{-1} را کجا قطع می‌کند». فقط حواستان باشد که با این کار، جای x و y را عوض کرده‌ایم! پس x ‌ای که به دست می‌آوریم در واقع عرض نقطه تلاقی است! تست زیر را ببینید:

تست ۱ اگر $x > 0$ ؛ $f(x) = x^3 + x$ ، آن‌گاه نمودار تابع f^{-1} خط $y = \frac{x}{3}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

(۱, ۳) (۱) $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ (۲) $(3, 1)$ (۳) $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (۴)

پاسخ ۱ خب قرار شد به جای حل این سؤال بگوییم: «نمودار تابع f خط $x = \frac{y}{3}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟»

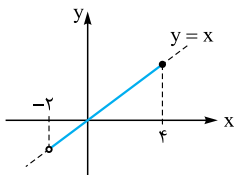
$$\begin{cases} x^3 + x = f(x) \\ 3x = y \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^3 + x = 3x \Rightarrow x^3 = 2x \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{2}$$

پس در نقطه با طول $\sqrt{2}$ ، خود f و خط $y = 3x$ متقاطع‌اند. پس محل تلاقی f^{-1} و خط $y = \frac{x}{3}$ می‌شود نقطه‌ای به عرض $\sqrt{2}$ که مختصاتش می‌شود: $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$

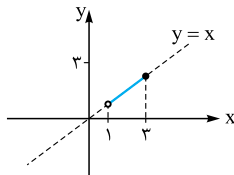
ترکیب تابع و وارونش

وقتی تابع و وارونش را ترکیب کنیم به تابع همانی $(f(x) = x)$ می‌رسیم، در $f \circ f^{-1}(x)$ باید x را اول به f^{-1} بدهیم پس x عضو دامنه f^{-1} یعنی عضو برد f است اما در $f^{-1} \circ f(x)$ اول f روی x عمل می‌کند پس باید $x \in D_f$ باشد. ببینید:

• $f \circ f^{-1}(x) = x, (x \in R_f)$ • $f^{-1} \circ f(x) = x, (x \in D_f)$ •



$y = f^{-1} \circ f(x) = x$
دامنه $= D_f = (-2, 4]$



$y = f \circ f^{-1}(x) = x$
دامنه $= R_f = (1, 3]$

پس $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ هر دو، قسمتی از تابع همانی $y = x$ هستند و همواره در نمایش زوج مرتبی آن‌ها، فقط زوج مرتب‌های به صورت (x, x) وجود دارند. مثلاً اگر تابع f دامنه‌اش $[-2, 4]$ و بردش $(1, 3]$ باشد، نمودارهای $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ به صورت مقابل هستند:

شماره ۱ حواسمان هست که برای رسم $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ به نمودار یا ضابطه f احتیاجی نداریم. چون می‌دانیم که نمودار آن‌ها $y = x$ است و فقط دامنه و برد f را می‌خواهیم.

تست ۲ اگر $f = \{(3, 4), (-1, 1), (2, 0)\}$ باشد، چندتا از زوج‌های مرتب مقابل در $f^{-1} \circ f$ هستند؟

(۱, ۱) (۱) ۵ $(2, 0)$ (۲) ۴ $(-1, -1)$ (۳) ۳ $(3, 3)$ (۴) ۲ $(0, 0)$ (۵) ۱ $(4, 4)$ (۶) ۰

پاسخ ۲ $f^{-1} \circ f$ تابع همانی با دامنه D_f است. پس x ‌های f را داریم یعنی $f^{-1} \circ f = \{(3, 3), (-1, -1), (2, 2)\}$ و از بین زوج‌های موجود ۲ تایی آن‌ها هستند.

نکته گاهی اوقات به جای تابع وارون، در صورت سؤال بیان‌های دیگری به کار می‌رود. حواستان باشد که تمام این‌ها معادل‌اند.

با قرینه‌کردن f نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، تابع g به دست می‌آید.

• تابع g در شرایط $f \circ g = x$ و $g \circ f = x$ صدق می‌کند.

• g وارون f است.

• g از تعویض جای مؤلفه‌های زوج‌های مرتب f به دست می‌آید.

تست ۱۵ | اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و تابع g طوری انتخاب شود که $\text{fog}(x) = x$ و $\text{gof}(x) = x$ ، آن گاه مقدار $g(\frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ ۱۵ | صورت سؤال یعنی g وارون f است پس $f^{-1}(\frac{1}{3})$ را می‌خواهیم و باید f را مساوی $\frac{1}{3}$ قرار دهیم:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 + 1 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حواسمان هست که در رابطه $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{3}$ مقدار x حتماً مثبت است.

شماره ۱۵

وارون تابع مرکب

• $(\text{fog})^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ •

وارون تابع fog به صورت $g^{-1} \circ f^{-1}$ است. یعنی:

یعنی تک تک تابع‌ها را وارون و جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم. برای درک بهتر فرض کنید در یک فیلم می‌بینید که در باز شده (تابع اول) و شخصی وارد می‌شود (تابع دوم). اگر تابع را وارون کنید (فیلم را برعکس پخش کنید) ابتدا شخص به عقب برمی‌گردد (تابع دوم وارون می‌شود) و سپس در بسته می‌شود (تابع اول وارون می‌شود).

تست ۱۶ | اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ ۱۶ | می‌دانیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = (\text{fog})^{-1}(20) = a$ حالا اگر فرض کنیم $(\text{fog})^{-1}(20) = a$ باید $(\text{fog})(a) = 20$ باشد، پس:

$$(\text{fog})(a) = 20 \Rightarrow f(g(a)) = 20 \xrightarrow{\text{عددگذاری به جای } g(a)} \frac{f(x)=x+\sqrt{x}}{g(a)} \rightarrow (g(a)) + \sqrt{g(a)} = 20 \rightarrow g(a) = 16$$

$$\frac{g(x)=\frac{9x+6}{1-x}}{1-a} \rightarrow \frac{9a+6}{1-a} = 16 \Rightarrow 9a+6 = 16-16a \Rightarrow 25a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

برای حسن ختام، یک تست ترکیبی از تابع مرکب و وارون را هم ببینیم:

شبهه این تست در کنکورهای سراسری رشته‌های تجربی و ریاضی سال‌های اخیر، چندین بار تکرار شده است.

تست ۱۷ | اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $g^{-1} \circ f$ کدام است؟

- (۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$

پاسخ ۱۷ | اول با استفاده از f و g تابع‌های $g^{-1} \circ f$ را پیدا می‌کنیم:

$$g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$$

$$g^{-1} = \{(3,2), (2,4), (6,5), (1,3)\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(1,4), (4,5)\}$$

$$f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$$

$$g^{-1} \circ f = \{(1,4), (4,5)\} \quad f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$$

$$\Rightarrow g^{-1} \circ f - f = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

حالا $g^{-1} \circ f - f$ را پیدا می‌کنیم:

پس برد $g^{-1} \circ f - f$ شامل اعضای ۲ و -۱ است.

درس نهم: تابع یک به یک

۴۰۶- اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دو تایی (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, 3)$

۴۰۷- اگر تابع زیر یک به یک باشد، کدام نتیجه درست است؟

(۱) $b \neq 3$ و $a = -2$

(۲) $b = 3$ و $a = -2$

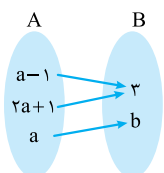
(۳) $b \neq 3$ و $a \neq -2$

(۴) $b = 3$ و $a \neq -2$

۴۰۸- کدام یک از توابع زیر، یک به یک است؟

(۱) $y = (x-1)^2 + 2$

(۲) $y = -x^2 + 1$



$$y = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ x + 5 & x < 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

(خارج ۹۵)

۴۰۹- تابع با ضابطه $f(x) = |x^2|$ با دامنه \mathbb{R} چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک به یک

کدام تابع وارون پذیر است. یعنی کدام تابع یک به یک است! و حواسمان هست که توابع آئینا یکتا حتماً یک به یک هستند.

۴۱۰- کدام تابع وارون پذیر است؟

- (۱) $y = x - 2|x|$ (۲) $y = x[x]$ (۳) $y = x|x|$ (۴) $y = x - [x]$

۴۱۱- کدام تابع، تابع وارون ندارد؟

- (۱) $y = 2^x$ (۲) $y = \log x$ (۳) $y = \frac{2x+4}{x+2}$ (۴) $x = x + [x]$

۴۱۲- کدام یک از توابع زیر، یک به یک است؟

- (۱) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$ (۲) $y = 2x + \frac{1}{x}$ (۳) $y = |\sqrt{x} - 2|$ (۴) $y = x - \sqrt{x}$

(خارج ۸۹)

۴۱۳- توابع زیر از \mathbb{R} به \mathbb{R} تعریف شده اند. کدام یک از آن ها معکوس پذیر است؟

- (۱) $y = x^4 - 2x^2$ (۲) $y = [x]$ (۳) $y = x^3 - 3x^2$ (۴) $y = x^3 + x + 1$

۴۱۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 1 \\ 2x+b & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، کدام مقدار برای b قابل قبول است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۱ (۴) ۳

۴۱۵- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 2 \\ g(x) & x < 2 \end{cases}$ یک به یک باشد، کدام ضابطه برای g مناسب است؟

- (۱) x^2 (۲) $x^2 - 1$ (۳) x (۴) $x + 2$

۴۱۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq a \\ 2x+1 & x < a \end{cases}$ یک به یک است. مقدار a کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

محدود کردن دامنه برای ساختن تابع یک به یک

۴۱۷- در تابع $f(x) = x^2 - 3x + 5$ با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه زیر، می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

- (۱) $[1, 5]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $[-7, 1]$ (۴) $[-2, 2]$

۴۱۸- تابع $f(x) = (x-1)(x+3) + x$ در بازه $[a, +\infty)$ یک به یک است، حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۴۱۹- تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ با کدام دامنه معکوس پذیر است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[0, 2] \cup (5, 6]$ (۳) $[0, 1] \cup [2, 4]$ (۴) $[1, 5]$

۴۲۰- تابع $f(x) = (a-1)x^2 - 2x + (a+4)$ بر روی \mathbb{R} یک به یک است. مقدار $af(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۲۱- در کدام بازه هر دو تابع $f(x) = -x(x-4)$ و $g(x) = |x-3| + 2$ یک به یک هستند؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $[2, 4]$ (۴) $[-1, 2]$

۴۲۲- تابع $f(x) = |x+1| - |x-1|$ در بازه $[a, b]$ ، یک به یک است. حداکثر $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۲۳- اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 1 \\ -x^2 & x < 1 \end{cases}$ ، با کدام انتخاب برای $g(x)$ ، تابع f یک به یک است؟

- (۱) $|x-2|$ (۲) $x-3$ (۳) $x^2 - 4x + 3$ (۴) $x+7$

درس دهم: وارون تابع و تابع وارون

(کتاب درسی)

۴۲۴- کدام یک از جملات زیر نادرست است؟

- (۱) برای رسم f^{-1} باید نمودار f را نسبت به $y = x$ قرینه کنیم. (۲) برد f^{-1} همان دامنه f است. (۳) اگر $f(a) = b$ باشد، آن گاه $f^{-1}(b) = a$. (۴) اگر f تابع باشد، f^{-1} هم حتماً تابع است.

در تمامی تست های این قسمت، یک نکته بیشتر نداریم؛ اگر $(a, b) \in f$ باشد، آن گاه $(b, a) \in f^{-1}$ است یا به عبارتی اگر $f(a) = b$ باشد، $f^{-1}(b) = a$ است.

(کانون فرهنگی آموزش)

۴۲۵- اگر $f = \{(1, 2), (-3, -1), (3, 4), (4, -3)\}$ باشد، مقدار $f^{-1}(-3) + f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱۳ (۳) ۴ (۴) ۱۲

۴۲۶- اگر $f = \{(-1, 0), (1, 2), (0, 1), (2, -1)\}$ باشد. آن گاه $\frac{f}{f^{-1}}$ شامل چند زوج مرتب است؟

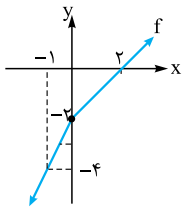
- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۴۲۷- اگر $f = \{(2, a+1), (\sqrt{b}, 3)\}$ و $f^{-1} = \{(a-1, c+1), (d, b-2)\}$ یک رابطه و وارون آن باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۴۲۸- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $f^{-1}(-5) + f^{-1}(4)$ کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) $3/5$ (۳) $-4/5$ (۴) $-3/5$



۴۲۹- در تابع خطی $f(x) = ax + b$ اگر $f^{-1}(6) = 1$ و $f^{-1}(21) = 4$ ، b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۴۳۰- به ازای چند مقدار a ، نمودار تابع وارون $f(x) = \frac{x-4}{2x-1}$ از نقطه $(a+2, a)$ می‌گذرد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۴۳۱- وارون تابع $y = x^2 + 2x - 3$ ، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۳۲- شکل روبه‌رو، نمودار وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ است. $a+b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{5}{4}$

۴۳۳- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۴۳۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & x \geq 3 \\ x+1 & x < 3 \end{cases}$ ، آن گاه $f^{-1}(-5)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) -۶ (۴) ۴

۴۳۵- اگر $f(x) = f^{-1}(3) + 2x - 1$ باشد، آن گاه $f(3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{19}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

رابطه بین دامنه و برد f و f^{-1} را یادتان هست؟ $R_{f^{-1}} = D_f$, $D_{f^{-1}} = R_f$

۴۳۶- دامنه تابع معکوس تابع $y = 3 - |x+1|$ (با شرط $x \leq -1$) کدام است؟

- (۱) $[3, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 3]$ (۳) $(-\infty, 2]$ (۴) $[-1, +\infty)$

۴۳۷- تابع $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ مفروض است. در تابع $g^{-1}(x)$ ، دامنه و برد چند عضو صحیح غیرمشترک دارند؟

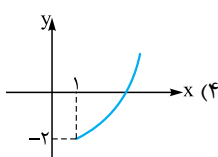
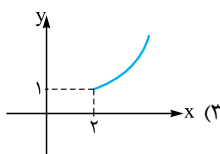
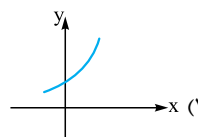
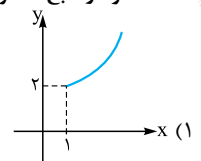
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نمودار f^{-1}

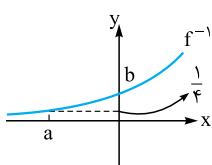
۴۳۸- ضابطه وارون تابع داده‌شده، کدام است؟

- (۱) $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
 (۲) $y = \frac{2}{3}x + 1$
 (۳) $y = \frac{3}{2}x + 1$
 (۴) $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

۴۳۹- نمودار تابع معکوس تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ کدام است؟



(کانون فرهنگی آموزش)



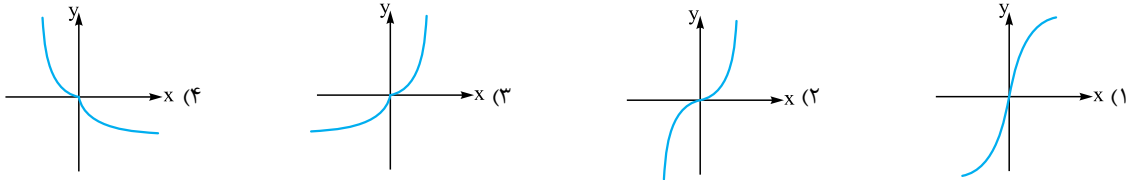
(کانون فرهنگی آموزش)

(سرآسری ۹۹)

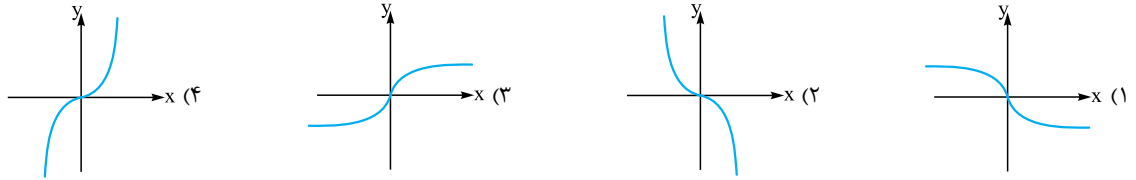
(کتاب درسی)

(کتاب درسی)

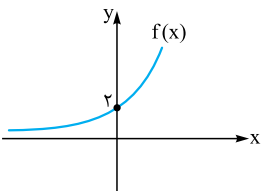
۴۴۰- نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟



۴۴۱- اگر $f(x) = x|x|$ ، آن گاه نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



۴۴۲- شکل مقابل، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{f^{-1}(x)}$ کدام است؟



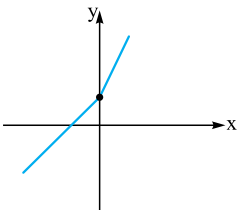
(۱) \mathbb{R}

(۲) $x > 0$

(۳) $2 \geq x \geq 0$

(۴) $x \geq 2$

۴۴۳- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار $2f^{-1}(x-1)$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟



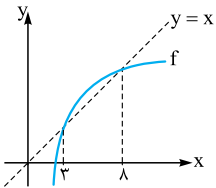
(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

۴۴۴- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تعریف تابع



با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

(سراسری ۹۴)

(۲) $[2, 3]$

(۴) $[3, 8]$

(۱) $(0, 2]$

(۳) $[2, 8]$

ضابطه تابع وارون

ابتدا از توابع خطی شروع می‌کنیم که در سال یازدهم خوانده‌ایم. قبل از شروع این قسمت یادآوری می‌کنم که بازه‌ای که در گزینه‌ها در مقابل ضابطه f^{-1} می‌نویسند، در واقع

برد تابع f است.

۴۴۵- تابع معکوس تابع $f(x) = 2x + 4$ با دامنه $[-1, 3]$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}; -1 \leq x \leq 3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+4}; -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}; -1 \leq x \leq 3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}; 2 \leq x \leq 10 \quad (3)$$

۴۴۶- ضابطه تابع وارون $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ 4x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x < 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < -1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x < -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

(سراسری ۹۷)

۴۴۷- قرینه خط d_1 به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۲

۴۴۸- اگر وارون تابع خطی $f(x) = ax + 1$ بر خودش منطبق باشد، a کدام است؟

- (۱) فقط ۱ (۲) فقط -۱ (۳) ۱ یا -۱ (۴) این اتفاق ممکن نیست.

۴۴۹- اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینه یکدیگر باشند، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ± 3 (۲) ± 2 (۳) 2 و -3 (۴) 3 و -2

اگر نکات وارون تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ را یادتان رفته. حتماً درس نامه را نگاه کنید.

۴۵۰- تابع وارون تابع $y = \frac{1}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$ (۳) $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x}$ (۴) $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$

۴۵۱- اگر تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+b}$ وارون خودش باشد، $f(0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

(خارج ۹۶)

۴۵۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) -4 و -1 (۲) 4 و -1 (۳) -4 و 1 (۴) 4 و 1

در اکثر تست های این بخش یک ورودی مثل α را به خود تابع f می دهیم و خروجی f را حساب می کنیم. خروجی به دست آمده را در گزینه ها به f^{-1} می دهیم. حالا باید خروجی f^{-1} همان α باشد.

(کتاب درسی)

۴۵۳- معکوس تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = x^2 - 3; x \geq -3$ (۲) $f^{-1}(x) = x^2 - 3; x \geq 0$
(۳) $f^{-1}(x) = x^2 + 3; x \geq -3$ (۴) $f^{-1}(x) = x^2 + 3; x \geq 0$

(کتاب درسی)

۴۵۴- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ (۲) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$
(۳) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x - 5; x \geq 1$ (۴) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

(کتاب درسی)

۴۵۵- ضابطه تابع معکوس تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5; x \geq 2$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2; x \geq 1$ (۲) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} - 2; x \geq -1$
(۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} - 1; x \geq 2$ (۴) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} - 2; x \geq 1$

۴۵۶- وارون تابع $y = x^2 - 2x$ وقتی $x \leq 1$ ، به صورت $y = a\sqrt{x+b} + c$ است، حاصل $a + b - c^2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۱

۴۵۷- معکوس تابع $y = x^2 + 3x^2 + 3x + 2$ کدام است؟

- (۱) $y = 1 - \sqrt{x-1}$ (۲) $y = 1 - \sqrt{x+1}$ (۳) $y = -1 + \sqrt{x-1}$ (۴) $y = -1 - \sqrt{x+1}$

۴۵۸- ضابطه وارون تابع $y = x^2 - 2x^2 + 1$ روی دامنه $(-1, 0)$ کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{x+1}$ (۲) $y = -\sqrt{1-\sqrt{x}}$ (۳) $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ (۴) $y = -\sqrt{\sqrt{x+1}}$

از این جا به بعد توابع چند ضابطه ای و قدرمطلق وارد تست ها می شوند. راه اولمان همیشه همان عددگذاری است ولی اگر نشد حتماً سعی می کنیم که قدرمطلق را برداریم.

(سراسری ۹۶)

۴۵۹- ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = -x^2$ (۲) $f^{-1}(x) = x^2$ (۳) $f^{-1}(x) = x|x|$ (۴) $f^{-1}(x) = -x|x|$

۴۶۰- در بزرگ ترین بازه ای که تابع $f(x) = x + |x+2|$ وارون پذیر است، ضابطه وارون آن کدام است؟

- (۱) $y = \frac{x-2}{2}; x \geq -2$ (۲) $y = \frac{x+2}{2}; x \geq -2$ (۳) $y = \frac{x-2}{2}; x \geq 0$ (۴) $y = \frac{x+2}{2}; x \geq 0$

(سراسری ۹۴)

۴۶۱- تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}; x < 0$ (۲) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; x < 1$
(۳) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ (۴) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

(خارج ۹۳)

۴۶۲- تابع با ضابطه $f(x) = |2x-6| - |x+1|$ ، در یک بازه صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = x+7; x > 8$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x+2; x > 3$ (۳) $f^{-1}(x) = x+7; x > -4$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x-1; -4 < x < 8$

۴۶۳- ضابطه وارون تابع $y = 3x - |x|$ کدام است؟

$y = \frac{2x - |x|}{4}$ (۴) $y = \frac{x + |x|}{4}$ (۳) $y = \frac{3x + |x|}{8}$ (۲) $y = \frac{3x + |x|}{4}$ (۱)

(خارج ۹۲)

۴۶۴- ضابطه معکوس $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

$f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۲) $f(x) = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R}$ (۱)
 $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R}$ (۴) $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۳)

(سراسری ۹۰)

۴۶۵- ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$f^{-1}(x) = \frac{1-|x|}{|x|}; |x| > 1$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$ (۱)
 $f^{-1}(x) = \frac{|x|-1}{x}; |x| < 1$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|-1}; |x| > 1$ (۳)

اگر $m^n = t$ باشد، آن گاه: $n = \log_m t$

۴۶۶- معکوس تابع $f(x) = 2^x - 1$ کدام است؟

$y = (\log_2 x) - 1$ (۴) $y = (\log_2 x) + 1$ (۳) $y = \log_2(x-1)$ (۲) $y = \log_2(x+1)$ (۱)

۴۶۷- اگر $f(x) = \log(x-1) - 3$ باشد، ضابطه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

$f^{-1}(x) = 10^{x-3} - 1$ (۴) $f^{-1}(x) = 10^{x-1} + 3$ (۳) $f^{-1}(x) = 10^{x+3} + 1$ (۲) $f^{-1}(x) = 10^{x+1} + 3$ (۱)

تست بصری، یکی از سخت‌ترین تست‌های کنکور در ۵۰ سال اخیر است!

(سراسری ۹۹)

۴۶۸- فرض کنید در دامنه $(0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ ، مفروض باشد، $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

$\log_2(2 + \sqrt{3})$ (۴) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۳) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۲) $\log_2(2 - \sqrt{3})$ (۱)

نقاط تلاقی f با f^{-1} و توابع دیگر

۴۶۹- نمودار $y = -(x+1)^2 + 1$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

2 (۴) 1 (۳) 2 (۲) 3 (۱)

۴۷۰- طول نقطه تلاقی نمودار $f(x) = \sqrt{x+2}$ با نمودار معکوس آن کدام است؟

4 (۴) 2 و -1 (۳) 2 (۲) -1 (۱)

۴۷۱- نمودار تابع $f(x) = -x^2 + ax + b$ در نقطه $(1, 2)$ نمودار وارونش را قطع می‌کند. $f(2)$ کدام است؟

2 (۴) -1 (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) 1 (۱)

۴۷۲- اگر تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ تابع وارونش را در $(1, 2)$ قطع کند، $a - b$ کدام است؟

4 (۴) 10 (۳) -4 (۲) -10 (۱)

۴۷۳- تابع $f(x) = 3x + (a+4)x^2 + (a+2)x^3 + (a+1)x^4$ در مجموعه اعداد حقیقی معکوس پذیر است. تابع f^{-1} خط $y = x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

۴۷۴- اگر $f(x) = x^2 + x + 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $y = x - 2$ یکدیگر را در نقطه (α, β) قطع می‌کنند. $\alpha + \beta$ کدام است؟

4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

۴۷۵- تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟

2 (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) 1 (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

(سراسری ۹۹)

۴۷۶- اگر $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x - 3$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

21 (۴) 18 (۳) 15 (۲) 12 (۱)

(سراسری ۹۸)

۴۷۷- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f(x-1)$ و $f^{-1}(-x)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

f^{-1} of $f \circ f^{-1}$

 ۴۷۸- اگر $f = \{(1,2), (2,3)\}$ ، تابع $f \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(2,2), (3,3)\}$ (۲) $\{(1,1), (2,2)\}$ (۳) $\{(2,1), (3,2)\}$ (۴) $\{(1,1), (3,3)\}$

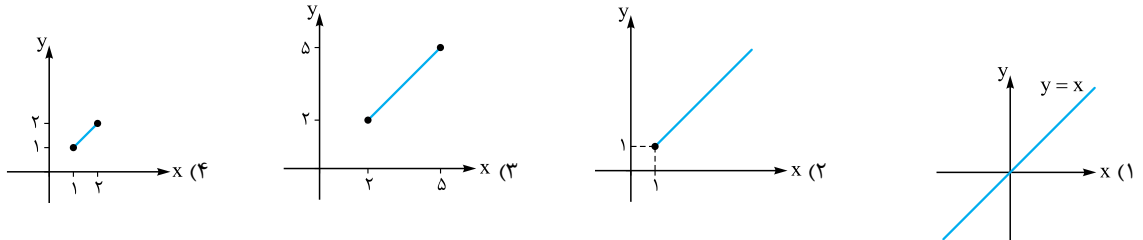
(کتاب درسی)

 ۴۷۹- اگر $f = \{(1,4), (2,3), (3,5)\}$ و g تابعی باشد که $f \circ g(x) = x$ ، تابع g کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $g = \{(4,1), (2,2), (3,3)\}$ (۲) $g = \{(4,1), (3,2), (5,3)\}$
 (۳) $g = \{(4,4), (3,3), (5,5)\}$ (۴) $g = \{(4,1), (3,2), (5,5)\}$

 ۴۸۰- با توجه به ماشین $x \rightarrow [g] \rightarrow [f] \rightarrow x$ ، اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد، $g(0)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

 ۴۸۱- در تابع $f(x)$ با دامنه $[2,5]$ و برد $[1,2]$ نمودار تابع $f \circ f^{-1}$ چگونه است؟

 ۴۸۲- اگر $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} + 6$ با دامنه $[-1,1]$ تعریف شود، طول پاره‌خط نمودار تابع $f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

(کانون فرهنگی آموزش)

 ۴۸۳- اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ ، آن‌گاه دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{1+f^{-1} \circ f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[0,1]$ (۲) $[-1,1]$ (۳) $(-\infty, -1]$ (۴) $(-\infty, 1]$

تابع مرکب و تابع وارون

 ۴۸۴- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$ ، آن‌گاه حاصل $(f \circ g^{-1})(4)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲ (۴) ۱۲

(کانون فرهنگی آموزش)

 ۴۸۵- اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,6)\}$ و $g = \{(2,3), (4,2), (5,6), (3,1)\}$ دو تابع باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $\{(4,2), (5,2)\}$ (۲) $\{(4,2), (3,5)\}$ (۳) $\{(5,2), (2,4)\}$ (۴) $\{(3,5), (2,4)\}$

 (کتاب درسی شما، وارون $f \circ g$ را خیلی تصویر گرفته...)

(کتاب درسی)

 ۴۸۶- اگر $f = \{(0,-1), (2, \frac{1}{2}), (-3, \sqrt{2}), (1,5)\}$ و $g = \{(-1,-3), (5,2), (\frac{1}{2}, 0), (4,6)\}$ ، تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(-1, \frac{1}{2}), (5,2), (\sqrt{2}, -3)\}$ (۲) $\{(\frac{1}{2}, 5), (5,2), (-1, \frac{1}{2})\}$
 (۳) $\{(\sqrt{2}, -1), (\frac{1}{2}, 5), (-1, -3)\}$ (۴) $\{(-1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 5), (\sqrt{2}, -1)\}$

(خارج ۹۸)

 ۴۸۷- اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

(خارج ۹۶)

 ۴۸۸- دو تابع $f = \{(5,2), (7,3), (1,4), (3,6), (9,1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

 ۴۸۹- اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = 2x^2 - 8x + 1$ باشند، آن‌گاه حاصل جمع ریشه‌های معادله $(f \circ g^{-1})^{-1}(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -10 (۳) ۸ (۴) -8

 ۴۹۰- اگر $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g^{-1}(x) = x^2$ و $x \geq 0$ ، آن‌گاه ضابطه $f \circ g(x)$ کدام است؟

- (۱) $x - 1$ (۲) $x^2 - 1$ (۳) $x + 1 + 2\sqrt{x}$ (۴) $x + 1 - 2\sqrt{x}$

 ۴۹۱- اگر $f = \{(2,3), (-1,2), (-4,1), (3,0)\}$ و $g = \{(0,2), (2,-4), (3,2), (-4,-2)\}$ ، آن‌گاه حاصل $(f \circ g \circ f^{-1})(3)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) ۱ (۴) ۲

(کانون فرهنگی آموزش)

 ۴۹۲- وارون تابع $y = f(3x - 1)$ کدام است؟

- (۱) $y = f^{-1}(\frac{x+1}{3})$ (۲) $y = f^{-1}(3x - 1)$ (۳) $y = 3f^{-1}(x) - 1$ (۴) $y = \frac{f^{-1}(x)+1}{3}$

۴۹۳- تابعی یک به یک و $g(x) = f(2x+1) + 1$ است. اگر $f^{-1}(5) = 3$ و $g^{-1}(a) = 1$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۵ (۴) ۶

۴۹۴- اگر $f(x) = x + [x]$ باشد، حاصل $(f \circ f^{-1})(4/5)$ کدام است؟

- (۱) ۴/۵ (۲) ۶/۵ (۳) ۶ (۴) موجود نیست.

۴۹۵- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ و $g(x) = k(x - \frac{1}{x})$ وارون هم باشند، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۹۶- نمودار $f(x) = \frac{x-3}{2} + 2\sqrt{x}$ و وارون آن در نقاط A و B متقاطع اند. طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $8\sqrt{2}$

۴۹۷- وارون تابع $f(x) = x + 4\sqrt{x} + 8$ به صورت $f^{-1}(x) = x - a\sqrt{x-b}$ است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۴۹۸- ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ کدام است؟

- (۱) $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ (۲) $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ (۳) $y = \log_x \frac{2+x}{2-x}$ (۴) $y = \log_x \frac{2-x}{2+x}$

۴۹۹- ضابطه وارون تابع $y = f(x) = 5^{\log_x 5}$ کدام است؟

- (۱) $y = 5^{\log_5 x}$ (۲) $y = 5^x$ (۳) $y = 5^{\log_x 5}$ (۴) $y = 5^{\frac{1}{x}}$

۵۰۰- اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۰۱- اگر داشته باشیم: $g(x) = f(2x+5)$ و $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{9} + \sqrt[3]{9x}$ ، آن گاه حاصل عبارت $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۶