مقدمه

خداوند منّان را شاکریم که بار دیگر توان و توفیق نوشتن کتابی در مورد هندسه را به ما عنایت فرمود.

پس از تألیف کتاب هندسهٔ یازدهم، بر آن شدیم تا کتابی تحت عنوان هندسهٔ جامع (هندسه ۱، ۲ و ۳) تألیف نماییم، که دربرگیرندهٔ کلیهٔ نیازهای داوطلبان کنکور رشتهٔ ریاضی باشد. تغییرات بنیادین و بسیار بجا در کتاب‌های هندسه نظام جدید آموزشی و اهمیت این درس، در بین تمام محافل آموزشی و داوطلبان کنکور مشهود است. همچنین تعداد تست‌های موجود در کنکور سراسری که از کتاب‌های هندسه ۱، ۲ و ۳ مطرح می‌شود، جای خالی کتابی جامع در این زمینه را به خوبی نشان می‌دهد.

اما در مورد ویژگی‌های کتاب حاضر مطالبی در ادامه مطرح می‌شود:

۱) در قسمت درسنامه، سعی کرده‌ایم تا حد ممکن مطالب مربوط به هر درس به صورت جامع و موجز ارائه گردد و از آوردن اثبات‌ها خودداری شده است. مگر در معدود مواردی که ارائهٔ اثبات در فهم بهتر مطلب کمک نماید، به اثبات پرداخته‌ایم.

۲) تست‌های مطرح شده در درسنامه‌ها، دربرگیرندهٔ تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب‌های درسی می‌باشند، پس از آن‌ها، تست‌هایی شبیه‌سازی شده ارائه گردیده است تا مهارت داوطلبان در زمینهٔ پاسخ‌گویی به این‌گونه تست‌ها بیشتر شود.

۳) پرسش‌های چهار گزینه‌ای ارائه شده در انتهای هر فصل، شامل تست‌های مهم و هماهنگ با کتاب‌های درسی جدید در مقاطع دهم، یازدهم و دوازدهم رشتهٔ ریاضی هستند. این تست‌ها دربرگیرندهٔ کلیهٔ پرسش‌های کنکورهای سراسری، آزمون‌های مختلف و تست‌های تألیفی می‌باشند.

۴) پاسخ تشریحی ارائه شده برای پرسش‌های چهار گزینه‌ای، تا حد ممکن به صورت توضیحی و در بسیاری موارد، برحسب نیاز، به صورت تصویرهای مرحله‌ای می‌باشند.

۵) در انتهای پرسش‌های چهار گزینه‌ای هر فصل، تست‌هایی برای چالش بیشتر، تحت عنوان «برای ۱۰۰ درصد» ارائه شده است.

۶) آزمون‌های مطرح شده در انتهای هر فصل، جهت سنجش داوطلب، دربرگیرندهٔ تمام مطالب مربوط به درس یا فصل مربوطه است.

سپاس از

- در پدید آمدن این اثر افراد بسیاری سهیم هستند. بر خود لازم می‌دانیم سپاس بی‌انتهای خود را تقدیم افرادی کنیم که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را در به ثمر رساندن این مجموعه یاری نموده‌اند:
- **جناب آقای احمد اختیاری**، مدیریت محترم انتشارات مهروماه که همواره پشتیبانی خود را از ما دریغ نکرده‌اند و در تمام مشکلات با روحیه‌ای وصف‌ناپذیر همراه ما بوده‌اند.
- **جناب آقای محمدحسین انوشه** مدیر شورای تألیف که زحمات زیادی را متقبل می‌شوند.

- **جناب آقای مهندس عباس اشرفی**، مدیر محترم گروه ریاضی که در تمام مراحل یار و یاور ما بوده‌اند و افتخار دوستی و همکاری با ایشان برایمان بسیار مغتنم است.
- دوست گرامی **جناب آقای مهندس محمد خندان**، که در تألیف این کتاب همراه ما بودند و به ویژه در آماده‌سازی فصل چهارم و نیز تعدادی از تست‌ها زحمات زیادی را متقبل شدند.
- **سرکار خانم سنور حریری**، مسئول محترم ویراستاری، **خانم‌ها جمیله صادقی**، **الهام جعفری**، **فاطمه زارع** و **آقایان حامد شفیعی**، **احسان لعل** و **علی شهبازی** که زحمت ویراستاری و نمونه‌خوانی متن‌ها را به عهده داشتند. از شاگردان خوبم در دبیرستان البرز هم تشکر و قدردانی می‌کنم.
- **سرکار خانم سمیه جباری**، مدیر توانمند واحد تولید، به همراه گروه بسیار حرفه‌ای و مسلط در امر تایپ، رسم شکل‌ها و صفحه‌آرایی تمام همت خود را به کار بسته‌اند؛ به ویژه **خانم‌ها الهام پیلوایه** و **رؤیا طبسی** (در قسمت صفحه‌آرایی با دستان توانمندشان)، **خانم‌ها مینا محمدلو**، **فرحناز قاسمی** و **جناب آقای صمد ذوالفقاری** (تایپیست‌های مسلط و شکیبا) **سرکار خانم هستی فرهادپور** و **جناب آقای مرتضی ضیایی** (رسام‌های هنرمند) و **سرکار خانم زهرا فریدونی** (هماهنگ کنندهٔ امر تولید با پشتکار ستودنی).
- **جناب آقای محسن فرهادی** مدیر محترم واحد هنری و همکاران خوبشان که دستی توانمند در تهیهٔ تصاویر داخل کتاب و طراحی جلد دارند و همواره ما را رهین منّت خویش نموده‌اند.
- **جناب آقای امیر انوشه** مسئول محترم واحد سایت و همکاران محترمشان به جهت سعی وافر در شناساندن کتاب در فضای مجازی
- **خانم‌ها فرزانه قنبری** مدیر روابط عمومی و **ساره کفاش‌زاده** به‌خاطر هماهنگی‌های لازمه و زحمات فراوانشان

و اما

هرچه هست از قامت ناساز بی‌اندام ماست

- در انتها از تمام کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند صمیمانه درخواست می‌کنیم که کاستی‌های این کتاب را، چه در صورت و چه در محتوا، به ما گوشزد نمایند و نظرات سازندهٔ خود را آشکار سازند تا بتوانیم در چاپ(های) بعدی آن‌ها را برطرف نماییم. اهل دانش نیک می‌دانند که راه پویش علمی، نیازمند اصلاح و تغییر همیشگی است.

در آخر کتاب را در سهم خود به جوانان عزیز این مرز و بوم تقدیم می‌کنیم و تمام تلاشمان بر آن بوده است که نیازهای علمی این عزیزان برطرف گردد و هر آینه اگر این سعی‌مان هوده باشد، خوشا...

زمانه قرعهٔ نو می‌زند به نام شما　　　　خوشا شما که جهان می‌رود به کام شما

تابستان ۹۷

مقدمه / ویرایش جدید

آفریدگار دانا را سپاسگزاریم که فرصت ارائه ویراستی نو از کتاب حاضر را به مؤلفین عطا فرمود. در این ویراست، تغییرات زیر اعمال شده است.

- درسنامه‌های کتاب تا حد ممکن مطابق نظام جدید آموزشی گردیده و مطالب حشو حذف شده است.
- مجموعهٔ سؤال‌های چهارگزینه‌ای، با حذف سؤال‌های ضعیف‌تر و قدیمی و افزودن تعدادی سؤال جدید و مفهومی، از غنای بیشتری برخوردار شده است.
- اشتباهات چاپی و علمی کتاب، هر آن‌چه که توسط خوانندگان تیزبین، ویراستاران با دقت و همکاران گرانقدر و دلسوز گوشزد شده و تا جایی که به چشم مؤلفین آمده، برطرف گردیده است.
- سؤال‌های کنکور سال‌های اخیر رشتهٔ ریاضی داخل و خارج از کشور، همراه با پاسخ تشریحی در کتاب درج شده است.

در به ثمر رسیدن این ویراست بر خود لازم می‌دانیم از افرادی که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را یاری کرده‌اند، قدردانی کنیم، سپاس ویژهٔ خود را تقدیم می‌کنیم به:

- سرکار خانم **آزاده غنی‌فرد**، که مسئولیت ویراستاری گروه ریاضی را بر عهده دارند.
- آقایان **مهدی مرادی**، **مهدی حصاری**، **وحید جعفری**، **امیرحسین عباس** و **خانم زهرا رسولی** که با صبر و پشتکار ستودنی، زحمت ویراستاری صوری و محتوایی این کتاب را برعهده گرفتند.
- مدیر محترم واحد تولید سرکار خانم **مریم تاجداری**، همکار محترم‌شان جناب **آقای میلاد صفایی** و صفحه‌آرای توانا خانم **رویا طبسی** و رسام‌های پرتلاش، سرکار خانم **مریم صابری‌برون**، **میترا میرمصطفی و خاطره بهاگیر** که زحمات وصف‌ناپذیری را متحمل شدند.

در انتها از تمامی کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند، تقاضا داریم که ما را از انتقادها و پیشنهادهای سازنده و به‌جای خود برخوردار نمایند و ارائه خدمتی هرچند ناچیز به جوانان این مرز و بوم، چراغ راه مؤلفین باشند.

تابستان ۱۴۰۱

استادان مشاور کتاب که از نظرات ارزندهٔ آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم: (به ترتیب حروف الفبا)

حسین بسطام، سید مسعود طایفه، مهدی عبداللهی، مجید محمدی و رضا مهربانی

فهرست

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

ماتریس یک جدول مستطیل شکل از اعداد حقیقی است، (ماتریس را آرایهٔ مستطیل‌شکل نیز می‌نامند.) که اگر دارای m سطر و n ستون باشد، آن را ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) می‌گوییم.

برای نمونه:

$B=\begin{bmatrix} ۵ & \sqrt{۲} \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۲×۲ است. (زیرا دو سطر و دو ستون دارد)

$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۴ & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۲×۳ است. (زیرا دو سطر و سه ستون دارد)

$D=\begin{bmatrix} ۱/۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ \\ ۷ & ۱۰۰ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۳×۲ است. (زیرا سه سطر و دو ستون دارد)

$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۴}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۱×۳ است. (زیرا یک سطر و سه ستون دارد)

$E=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$ یک ماتریس ۳×۱ است. (زیرا سه سطر و یک ستون دارد)

تذکر: معمولاً مرتبهٔ ماتریس را در کنار آن می‌نویسند.

درایه

هر عضو ماتریس را یک درایه می‌نامند. هر درایه در یک سطر و در یک ستون مشخص قرار گرفته است، که این دو عدد (عدد سطر و عدد ستون)، در کنار هم آدرس درایه را مشخص می‌سازند. درایهٔ واقع در سطر iام و ستون j ام ماتریس A را به‌صورت a_{ij} نشان می‌دهیم.

درایهٔ واقع در سطر i و ستون j: a_{ij} (سطر، ستون)

برای نمونه: در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ \sqrt{۳} & ۷ & ۰ \end{bmatrix}$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول برابر با $\sqrt{۳}$ است، بنابراین $a_{۲۱}=\sqrt{۳}$.

نتیجه: معمولاً اگر بخواهیم یک ماتریس را به‌صورت یک آرایه مستطیل شکل در حالت کلی نشان دهیم، از آدرس درایه‌ها کمک می‌گیریم.

برای نمونه:

درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۳

$C=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$

$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$

درایهٔ واقع در سطر ۲ و ستون ۱

درایهٔ واقع در سطر ۱ و ستون ۲

$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$

نمایش فشردهٔ ماتریس

ماتریس A را به‌طور کلی می‌توان به‌صورت فشردهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش داد، که در آن a_{ij} نمایندهٔ تمام درایه‌های ماتریس A است و مرتبهٔ ماتریس $m\times n$ می‌باشد. بنابراین $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ است. به عبارت دیگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون می‌باشد.

برای نمونه: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۲}$ عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس A دارای سه سطر و دو ستون است.

تذکر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با نماد $\bar{O}$ نشان داده می‌شود. گاهی اوقات ماتریس صفر مرتبهٔ $m\times n$ به‌صورت $\bar{O}_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود، پس: $\bar{O}_{m\times n}=[۰]_{m\times n}$

تست: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، با $a_{ij}=i+j^{۲}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰

۳) ۱۶ ۴) ۱۴

پاسخ گزینه ۳ واضح است که ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۲ است، یعنی دو سطر و دو ستون دارد، پس $۱\le i\le ۲$ و $۱\le j\le ۲$ می‌باشد، پس:

	ستون اول $\downarrow j=۱$	ستون دوم $\downarrow j=۲$
سطر اول $\xrightarrow{i=۱}$	$a_{۱۱}=۱+۱^{۲}=۲$	$a_{۱۲}=۱+۲^{۲}=۵$
سطر دوم $\xrightarrow{i=۲}$	$a_{۲۱}=۲+۱^{۲}=۳$	$a_{۲۲}=۲+۲^{۲}=۶$

بنابراین ماتریس A عبارت است از $A=\begin{bmatrix}۲&۵\\۳&۶\end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن ۱۶ است.

تساوی دو ماتریس

۱) دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲) درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند.

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش فشرده باشند، آن‌گاه:

$$A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$$
$$(\forall i,j\,;\,۱\le i\le m\ \wedge\ ۱\le j\le n)$$

تست: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۶&۵x-y\\-x^{۲}+x&۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x^{۲}-۵x&۲x+y\\-۲&۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۱ درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر مساوی قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases}x^{۲}-۵x=-۶\Rightarrow x^{۲}-۵x+۶=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲,۳\\-۲=-x^{۲}+x\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲,-۱\end{cases}$$

بنابراین اشتراک جواب‌ها، $x=۲$ است. همچنین داریم:

$$۲x+y=۵x-y\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}}۳x=۲y\xrightarrow{x=۲}y=۳$$

پس $x+y=۵$ است.

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد در تک‌تک درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش فشرده ماتریس دلخواه A باشد و $r\in\mathbb{R}$، آن‌گاه $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$. یعنی عدد حقیقی r در تک‌تک درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود. پس rA ماتریسی هم‌مرتبه با ماتریس A است.

برای نمونه:

$$A=\begin{bmatrix}۵&-۱&۴\\۰&۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۳A=\begin{bmatrix}۳\times۵&۳\times(-۱)&۳\times۴\\۳\times۰&۳\times۳&۳\times۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵&-۳&۱۲\\۰&۹&۶\end{bmatrix}$$

تذکر:

۱) همان‌طور که می‌توان یک عدد حقیقی را در ماتریس دلخواه A ضرب کرد، به همان ترتیب می‌توان یک عدد را از تمام درایه‌های ماتریس A فاکتور گرفت.

برای نمونه:

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۶\\۸&۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۱&۲\times(-۳)\\۲\times۴&۲\times۶\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱&-۳\\۴&۶\end{bmatrix}$$

۲) اگر یک ماتریس را در عدد (-۱) ضرب کنیم، تمام درایه‌های آن قرینه می‌شوند و ماتریس حاصل، **ماتریس قرینه** نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر قرینهٔ ماتریس A، که با $-A$ نشان داده می‌شود، ماتریسی است هم‌مرتبه با A که تمام درایه‌های آن نظیر به نظیر قرینهٔ درایه‌های ماتریس A هستند.

بنابراین:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\Leftrightarrow -A=[-a_{ij}]_{m\times n}$$

برای نمونه:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۴&-۱\\۰&-۵&۳\\۱&۶&۷\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}-۲&-۴&+۱\\۰&+۵&-۳\\-۱&-۶&-۷\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r، s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار است:

۱) $r(sA)=s(rA)=(rs)A$
۲) $(r\pm s)A=rA\pm sA$
۳) $r(A\pm B)=rA\pm rB$
۴) $rA=rB \xleftrightarrow{r\neq 0} A=B$
۵) $rA=\bar{O} \Leftrightarrow (r=0 \vee A=\bar{O})$

جمع (تفریق) دو ماتریس

۱) **دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند.** ۲) **درایه‌ها نظیر به نظیر جمع (تفریق) می‌شوند.**

بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ با نمایش قشرده باشند، آن‌گاه:

$$A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$
$$(\forall i,j;\ 1\leq i\leq m \wedge 1\leq j\leq n)$$

برای نمونه:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A+B=\begin{array}{c} \begin{matrix} a_{11}\ b_{11} & a_{12}\ b_{12} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3+5 & (-5)+(-3) \\ 1+(-7) & 2+1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a_{21}\ b_{21} & a_{22}\ b_{22} \end{matrix} \end{array}=\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A-B=\begin{bmatrix} 1-4 & 7-3 & 0-(-2) & (-3)-1 \\ -2-5 & 1-(-3) & 6-1 & -2-7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & -4 \\ -7 & 4 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های جمع دو ماتریس

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر در جمع ماتریس‌ها برقرار است:

۱) جابه‌جایی	$A+B=B+A$
۲) وجود عضو بی‌اثر (ماتریس صفر)	$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$
۳) وجود عضو قرینه	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$
۴) شرکت‌پذیری	$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$
۵) حذف‌پذیری	$A+B=A+C\Rightarrow B=C$

چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری

ماتریسی است که یک سطر و تعدادی ستون دارد. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=[a_{11}\quad a_{12}\quad \dots\quad a_{1n}]_{1\times n}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری (از مرتبهٔ ۳×۱) است.

۲) ماتریس ستونی

ماتریسی است که تعدادی سطر و یک ستون دارد. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی (از مرتبهٔ ۱×۲) است.

۳) ماتریس مربعی

ماتریسی است که تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن برابر است. شکل کلی آن عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$، یک ماتریس مربعی (از مرتبهٔ ۲×۲) است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱. ماتریس A از مرتبهٔ n مفروض است. اگر تمام درایه‌های این ماتریس برابر ۱ باشد، نسبت مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، به مجموع درایه‌های قطر اصلی آن کدام است؟

۱) n ۲) $\frac{n}{2}$ ۳) $\frac{n+1}{2}$ ۴) $\frac{n-1}{2}$

۲. ماتریس $A=[a_{ij}]_{5\times5}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} 2i-j & ; \; i=j \\ \dfrac{2x^2-9x+4}{2x^2-13x+4} & ; \; i\neq j \end{cases}$ مفروض است. اگر این ماتریس، قطری باشد، چند مقدار برای x موجود است؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۳. اگر $\begin{bmatrix} 4x & -x^2+5x \\ 2x+y & -y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^2+3 & 4 \\ 3x-y & -y \end{bmatrix}$ باشد، $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴. اگر $A=[j^2+2i]_{2\times3}$ ، $B=[i^3-j]_{2\times3}$ باشد، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $-B+2A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۵. اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ و $C=A\cdot B$ باشند، آن‌گاه درایهٔ c_{24} کدام است؟

۱) ۳ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

۶. اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ و $C=AB$ باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۴۷ ۲) ۸۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۳۱

۷. اگر $M=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $N\cdot M$ کدام ست؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۸. حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -20 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) I_3 ۴) $\begin{bmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 4 & -2 & 8 \\ -14 & 7 & -28 \end{bmatrix}$

۹. اگر $A=\begin{bmatrix} c & 5 \\ 2 & a \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ b & 7 \end{bmatrix}$ و $AB=BA$ باشد، آن‌گاه $c-a$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) -15 ۳) -20 ۴) ۲۰

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند. در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -2

۱۱. اگر حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} -2a & -2 \\ 2 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، در این‌صورت $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲. به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $x=1\ ,\ y=-7$ ۲) $x=2\ ,\ y=-7$ ۳) $x=2\ ,\ y=-5$ ۴) $x=1\ ,\ y=-5$

۱۳. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس A در رابطهٔ $C=AB$ صدق کند، مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

۱) -7 ۲) ۸ ۳) هر مقدار حقیقی ۴) ماتریسی مثل A وجود ندارد.

۱۴. بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A از معادلهٔ $A\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۱۵. از رابطهٔ ماتریسی $[x\ \ 2x\ \ -1]\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}=0$، عدد غیرصفر x، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۶. در معادلهٔ ماتریسی $[x\ \ 2\ \ 1]\begin{bmatrix}x & -1 & 1\\ 2 & x & 2\\ -1 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ x\\ -1\end{bmatrix}=\bar{o}$، مجموع جواب‌های x کدام است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

۱۷. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\ 3 & 3 & 5\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۸. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$، مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times A\times\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}d & c\\ b & a\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}c & d\\ b & a\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-d & -c\\ -b & -a\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-c & -d\\ -b & -a\end{bmatrix}$

۲۰. اگر ماتریس ناصفر $b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix}5 & -2\\ 4 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\ 4b_2\end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) -4 ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱۲

۲۱. ماتریس‌های مربع A و B از مرتبهٔ ۲ مفروض‌اند. اگر حاصل جمع درایه‌های واقع در ستون‌های هریک از آن‌ها برابر ۱ باشد، مجموع درایه‌های واقع در ماتریس AB کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۲۲. ماتریس‌های مربعی A و B مفروض‌اند. اگر $A^2=A$, $B^2=B$ باشند و داشته باشیم $AB=BA$، در آن‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $(A+B-AB)^2=A^2+B^2+A^2B^2$ ۲) $(A+B-AB)^3=-A-B+AB$

۳) $(A+B-AB)^3=A-B-AB$ ۴) $(A+B-AB)^2=A+B-AB$

۲۳. ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ A و B مفروض‌اند. اگر $AB=A$ و $BA=B$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $A^2-B^2=A+B$ ۲) $A^2=B^2$ ۳) $A^2+B^2=A+B$ ۴) $A^3=B^3$

۲۴. مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 100\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

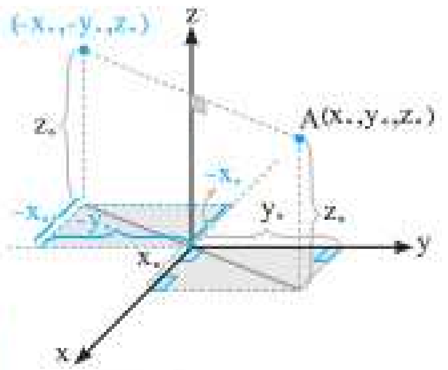
۱) ۵۰۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۹۹ ۴) ۱۰۱

۲۵. اگر $A^2=A$ و $B=2A-I$، در این‌صورت A^3+B^3 کدام است؟

۱) $2A+B$ ۲) $A+2B$ ۳) $A+B$ ۴) $A-B$

۲۶. اگر $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 2 & 1 & -1\\ d & e & f\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) -3 ۴) -6



۷) مختصات قرینهٔ (بازتاب) نقطهٔ $A(x_0,y_0,z_0)$:

الف) نسبت به محور zها عبارت است از $(-x_0,-y_0,z_0)$.

ب) نسبت به محور yها عبارت است از $(-x_0,y_0,-z_0)$.

پ) نسبت به محور xها عبارت است از $(x_0,-y_0,-z_0)$.

ترفند محاسباتی: در مختصات قرینهٔ (بازتاب) هر نقطه در فضا، نسبت به هر محور مختصات، مؤلفه‌های غایبِ همان محور، قرینه می‌شوند و مؤلفه‌های هم‌نام با آن محور تغییر نمی‌کند.

برای نمونه: مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۴,-۱)$ نسبت به محور yها، عبارت است از $(-۲,۴,۱)$.

تست: تصویر قائم نقطهٔ $A(۴,-۲,۵)$ را روی صفحهٔ yoz، نقطهٔ A' و قرینهٔ آن را نسبت به محور yها، نقطهٔ A'' می‌نامیم. فاصلهٔ دو نقطهٔ A' و A'' کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ گزینه ۳ مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(۴,-۲,۵)$ روی صفحهٔ yoz، عبارت است از $A'(۰,-۲,۵)$ و قرینهٔ آن نسبت به محور yها، نقطهٔ $A''(-۴,-۲,-۵)$ است، پس $|A'A''|=۴$.

فاصلهٔ بین دو نقطه در فضا

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

برای نمونه: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(۱,۴,-۲)$ و $B(۵,۱,-۲)$ برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۱-۴)^۲+(-۲+۲)^۲}=۵$$

تذکر: چند ویژگی

اگر A و B دو نقطه در فضا باشند، آن‌گاه:

الف) $|AB|\geq ۰$ **ب)** $|AB|=|BA|$ **پ)** $|AB|=۰ \Leftrightarrow A=B$

تست: اگر $A(۲,۱,۳)$، $B(۳,۰,۵)$ و $C(۵,-۴,۲)$ سه رأس یک مثلث باشند، آن‌گاه نوع این مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) متساوی‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

پاسخ گزینه ۱ کافی است طول ضلع‌های این مثلث را بیابیم:

$$|AB|=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰-۱)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۶}$$
$$|BC|=\sqrt{(۵-۳)^۲+(-۴-۰)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۲۹}$$
$$|AC|=\sqrt{(۵-۲)^۲+(-۴-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۳۵}$$

واضح است که $|AB|^۲+|BC|^۲=|AC|^۲$، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

اگر $A(۲m-۱,۱,-۴)$ و $B(۵m,۲n-۳,۲p-۱)$ دو نقطه در فضا باشند و $|AB|=۰$، آن‌گاه حاصل عبارت $m+n+p$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ گزینه ۴

$$|AB|=۰ \Rightarrow A=B \Rightarrow \begin{cases} ۲m-۱=۵m & \Rightarrow & m=-\frac{۱}{۳} \\ ۱=۲n-۳ & \Rightarrow & n=۲ \\ -۴=۲p-۱ & \Rightarrow & p=-\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow m+n+p=(-\frac{۱}{۳})+۲+(-\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۶}$$

روی محور yها نقطهٔ M به گونه‌ای قرار دارد که از دو نقطهٔ $A(۱,-۱,۴)$ و $B(۲,۳,۱)$ به یک فاصله است. فاصلهٔ نقطهٔ M از پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۹}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$

پاسخ گزینه ۱ چون نقطهٔ M روی محور yها قرار دارد، پس $M(۰,y_0,۰)$. از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

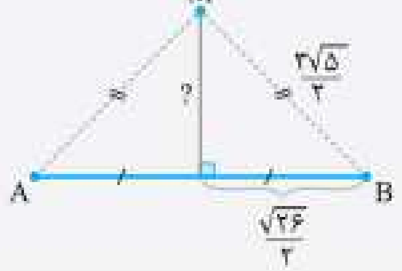
$$|MA|=|MB| \Rightarrow \sqrt{(۰-۱)^۲+(y_0+۱)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{(۰-۲)^۲+(y_0-۳)^۲+(۰-۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}۲} ۱+(y_0+۱)^۲+۱۶=۴+(y_0-۳)^۲+۱ \Rightarrow y_0^۲+۲y_0+۱+۱۲=y_0^۲-۶y_0+۹ \Rightarrow ۸y_0=-۴ \Rightarrow y_0=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow M(۰,-\frac{۱}{۲},۰)$$

حال کافی است $|MB|$ و $|AB|$ را بیابیم:

$$|AB|=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳+۱)^۲+(۱-۴)^۲}=\sqrt{۲۶}$$
$$|MB|=\sqrt{(۰-۲)^۲+(\frac{۱}{۲}-۳)^۲+(۰-۱)^۲}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

پس فاصلهٔ M تا پاره‌خط AB، طبق قضیهٔ فیثاغورس برابر است با: $\sqrt{(\frac{۳\sqrt{۵}}{۲})^۲-(\frac{\sqrt{۲۶}}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$



مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر دو نقطهٔ A و B دو سر یک پاره‌خط باشند، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB، با میانگین مؤلفه‌های دو نقطهٔ A و B برابر است. به عبارت دیگر: $\boxed{M=\frac{A+B}{۲}}$

بنابراین: $\boxed{M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})}$

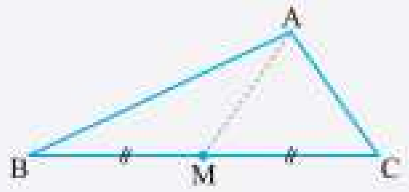
- در حالت دوبعدی نیز، مختصات وسط پاره‌خط به همین صورت به‌دست می‌آید.

برای نمونه: اگر $A(۲,-۱,۳)$ و $B(۰,۵,-۱)$ دو سرِ پاره‌خط AB باشند، مختصات نقطهٔ وسط آن عبارت است از:

$$M(\frac{۰+۲}{۲},\frac{۵+(-۱)}{۲},\frac{(-۱)+۳}{۲})\Rightarrow M(۱,۲,۱)$$

تست: اگر سه نقطهٔ $A(۱,-۴,۲)$، $B(۰,۴,۲)$ و $C(۲,-۲,۴)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ نظیر ضلع BC کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۶}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۳۹}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$



پاسخ گزینه ۱ اگر نقطهٔ M، وسط ضلع BC فرض شود، آن‌گاه مختصات آن عبارت است از:

$$M(\frac{۰+۲}{۲},\frac{۴+(-۲)}{۲},\frac{۲+۴}{۲})\Rightarrow M(۱,۱,۳)$$

پس طول میانهٔ AM برابر است با: $|AM|=\sqrt{(۱-۱)^۲+(-۴-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۲۶}$

نتیجه: ۱ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta,\gamma)$ عبارت است از:
$A'(۲\alpha-x_۰,۲\beta-y_۰,۲\gamma-z_۰)$

فرمول ممنوع: برای اثبات، کافی است به این موضوع توجه کنیم که برای یافتن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M، پاره‌خطی از نقطهٔ A به نقطهٔ M وصل می‌کنیم و آن را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' مشخص گردد. بنابراین از آن‌جایی که نقطهٔ M وسط پاره‌خط AA' می‌باشد، پس:

$$M=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow ۲M=A+A'\Rightarrow A'=۲M-A$$

پس: $A'=۲(\alpha,\beta,\gamma)-(x_۰,y_۰,z_۰)=(۲\alpha,۲\beta,۲\gamma)-(x_۰,y_۰,z_۰)=(۲\alpha-x_۰,۲\beta-y_۰,۲\gamma-z_۰)$

برای نمونه: مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,۵,-۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(۳,۱,۲)$ عبارت است از:

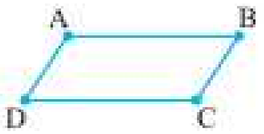
$$A'(۲(۳)-۲,۲(۱)-۵,۲(۲)-(-۱))\Rightarrow A'=(۴,-۳,۵)$$

حالت خاص مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ نسبت به مبدأ مختصات عبارت است از: $A'(-x_۰,-y_۰,-z_۰)$

- برای اثبات کافی است به جای نقطهٔ $M(\alpha,\beta,\gamma)$، نقطهٔ $O(۰,۰,۰)$ قرار گیرد.

برای نمونه: مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۵,-۲,۱)$ نسبت به مبدأ مختصات عبارت از $A'(-۵,۲,-۱)$ است.

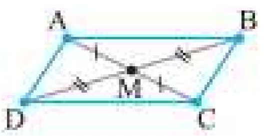
نتیجه: ۲ در هر متوازی‌الاضلاع، همواره مجموع مؤلفه‌های هر دو رأس مقابل با مجموع مؤلفه‌های دو رأس مقابل دیگر برابر است.



- بنابراین در متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل مقابل)، همواره داریم:

$$\boxed{A+C=B+D}$$

- برای اثبات، می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس:



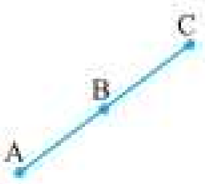
◄ نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC است، یعنی $M=\frac{A+C}{۲}$ ◄ نقطهٔ M وسط پاره‌خط BD است، یعنی $M=\frac{B+D}{۲}$

در نتیجه $\frac{A+C}{۲}=\frac{B+D}{۲}$ یا می‌توان گفت: $A+C=B+D$

- نتیجهٔ بالا به‌صورت مختصاتی عبارت است از:

$$\boxed{\begin{aligned}x_A+x_C&=x_B+x_D\\y_A+y_C&=y_B+y_D\\z_A+z_C&=z_B+z_D\end{aligned}}$$

نامساوی مثلثی در فضا



برای سه نقطهٔ متمایز در فضا، دو حالت می‌تواند متصوّر باشد:

◄ سه نقطه روی یک امتداد باشند.

◄ سه نقطه تشکیل یک مثلث بدهند.

- بنابراین برای سه نقطه A، B و C در فضا، همواره یکی از دو حالت زیر می‌تواند مطرح باشد:

◂ سه نقطه روی یک امتداد باشند و در نتیجه تساوی مقابل برقرار است: $|AB|+|BC|=|AC|$

◂ سه نقطه تشکیل یک مثلث بدهند و در نتیجه نامساوی مثلثی برقرار است: $|AB|+|BC|>|AC|$

- به طور خلاصه:

برای سه نقطه A، B و C در فضا همواره داریم: $\boxed{|AB|+|BC|\geq|AC|}$

تست: اگر $A(0,3,2)$ و $B(4,3,-1)$ دو نقطهٔ مفروض باشند، چند نقطه مانند C در فضا وجود دارد که فاصلهٔ آن از نقطهٔ A برابر ۱ و از نقطهٔ B برابر ۲ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینه ۳ ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را می‌یابیم. داریم: $|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(3-3)^2+(-1-2)^2}=5$

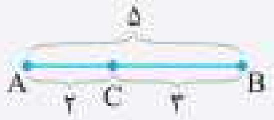
از طرفی طبق فرض مسئله، $|CA|=1$ و $|CB|=2$ می‌باشد. واضح است که این سه مقدار در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کنند (زیرا جمع هیچ دو عددی بزرگ‌تر از سومی نیست). پس به ناچار باید روی یک امتداد باشند. از آن‌جایی که جمع هیچ دو عددی با سومی مساوی نمی‌باشد، پس این سه نقطه روی یک امتداد هم نیستند. بنابراین نقطه‌ای مانند C وجود ندارد.

اگر $A(5,1,-2)$ و $B(1,1,1)$ و نقطه‌ای مانند C وجود داشته باشد که $|CA|=2$ و $|CB|=3$، آن‌گاه برای نقطهٔ C چند جواب وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینه ۱ ابتدا طول پاره‌خط AB را می‌یابیم. داریم: $|AB|=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5$

پس با توجه به فرض مسئله $|AB|=|CB|+|CA|$. به عبارت دیگر این سه نقطه روی یک امتدادند و مطابق شکل، یک جواب برای نقطهٔ C وجود دارد.

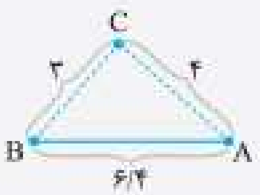


اگر $A(-2,3,-1)$ و $B(2,-2,-1)$ دو نقطهٔ مفروض باشند، چند نقطه مانند C در فضا وجود دارد که فاصلهٔ آن از A برابر ۴ و از B برابر ۳ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

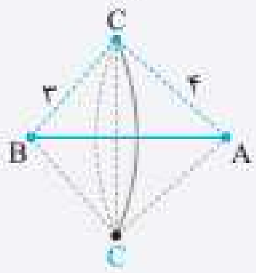
پاسخ گزینه ۴ ابتدا فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$|AB|=\sqrt{(2+2)^2+(-2-3)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{41}\simeq 6/4$$



از طرفی طبق فرض مسئله، $|CA|=4$ و $|CB|=3$ و در نتیجه $|CA|+|CB|>|AB|$.

پس این سه نقطه در فضا تشکیل یک مثلث می‌دهند (شکل ۱).



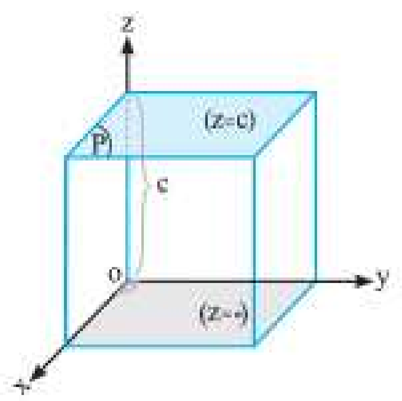
اما از آنجایی که این مثلث در فضا، تشکیل می‌شود، بنابراین نقطهٔ C می‌تواند حول پاره‌خط AB دوران کند و همواره فاصله‌اش از A و B را به اندازهٔ ۴ و ۳ حفظ نماید. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ C در فضا یک دایره است. (شکل ۲) پس برای نقطهٔ C در فضا، بی‌شمار جواب وجود دارد.

صفحه‌های موازی با صفحات مختصات (عمود بر محورهای مختصات)

- اگر صفحه‌ای موازی با یکی از صفحات مختصات باشد، آن‌گاه عمود بر محور مختصاتی است که بر آن صفحهٔ مختصات عمود می‌باشد.
- اگر صفحه‌ای عمود بر یک محور مختصات باشد، در معادلهٔ آن صفحه مؤلفهٔ هم‌نام با آن محور، برابر با مقدار ثابتی است.

به طور کلی سه حالت وجود دارد:

۱



- توجه کنید در صفحهٔ P، مؤلفه‌های x و y هر مقدار دلخواه می‌توانند اختیار کنند، اما مؤلفهٔ z همواره ثابت است.

۵۵۴. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۲ و ۴ با یکدیگر زاویهٔ ۳۰° می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ و $۲\vec{a}+۲\vec{b}$ تولید می‌شود، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۵۵۵. در مثلث ABC اگر $\vec{V}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$ و مساحت مثلث ABC برابر S باشد، $|\vec{V}|$ برحسب S کدام است؟

۱) S ۲) ۲S ۳) ۴S ۴) ۶S

۵۵۶. بردارهای $\vec{u}=(۱,-۲,۲)$ و $\vec{v}=(۲,۱,۱)$ اضلاع متوازی‌الاضلاعی هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۲}$

۵۵۷. اگر $\vec{a}=(-۲,۱,۱)$ و $\vec{d}=(۱,-۲,۲)$ به‌ترتیب یک ضلع و یک قطر متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) ۵۰ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۵۵۸. اگر $\vec{a}=(۱,-۲,۳)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$، مساحت متوازی‌الاضلاع تولیدشده توسط دو بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ و $۲\vec{a}+۵\vec{b}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

ضرب مختلط سه بردار

۵۵۹. دو بردار با تصاویر $\vec{a}=(۱,۱,۲)$ و $\vec{b}=(-۱,۰,۱)$ مفروض‌اند. حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}\times\vec{i}$ و $\vec{a}\times\vec{k}$ ساخته می‌شود کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۶۰. دو بردار با تصاویر $\vec{a}=(۱,-۲,۲)$ و $\vec{b}=(۲,۱,-۱)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوح که بر روی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۵۶۱. بر روی سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{j}$، $\vec{b}=\vec{j}+۲\vec{k}$ و $\vec{c}=۴\vec{i}-\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح را بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۵۶۲. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a}\times\vec{c}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا باشند و اندازهٔ هر کدام مساوی ۴ باشد، حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۵۶۳. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر و غیرواقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$ ۲) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ ۴) $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$

۵۶۴. چند بردار با طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار $\vec{a}=(۲,۱,-۱)$، $\vec{b}=(۱,۲,۲)$ و $\vec{c}=(۰,-۲,-۵)$ عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۵۶۵. سه بردار $\vec{a}=(-۱,۱,۱)$، $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{c}=(-۱,۲,m)$ مفروض‌اند. اگر $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{o}$ باشد، m کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵۶۶. به ازای چند مقدار m چهار نقطهٔ $A(۰,۱,۲)$، $B(۲,۲,۴)$، $C(۱,۱,۱)$ و $D(m,m,m)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۵۶۷. به ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a}=(-۱,۲,۲)$، $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ و $\vec{c}=(-۴,m,۵)$ در یک صفحه‌اند؟ (ریاضی ۹۸)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۶۸. اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرصفر باشند، خلاصه شدهٔ $(۲\vec{a}-\vec{b})\cdot((\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a}))$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۲) $۲\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۳) $۳\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ۴) صفر

۵۶۹. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با شرط $(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ مفروض‌اند. الزاماً کدام نتیجه حاصل می‌شود؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=۰$ ۲) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ ۳) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{۰}$ ۴) هر سه بردار موازی‌اند.

۵۷۰. حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر ۲ است. اگر بردارهای $۲\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}+۲\vec{c}$ با هم موازی باشند، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\vec{a}+۲\vec{b}$، $\vec{b}-۶\vec{c}$ و $\vec{a}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۳ ۴) ۸۱

۱. گزینه ۴ تعداد درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A برابر با n است. پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس n است.
برای پیدا کردن تعداد درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی این ماتریس، باید تعداد درایه‌های روی قطر اصلی آن را از کل درایه‌ها کم کنیم و در نهایت عدد حاصل را نصف کنیم: $\frac{n^۲-n}{۲}$

پس مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی برابر $\frac{n^۲-n}{۲}$ است.
در نهایت برای خواستهٔ مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی}}{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}}=\frac{\frac{n^۲-n}{۲}}{n}=\frac{n-۱}{۲}$$

۲. گزینه ۱ در ماتریس قطری، همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی باید صفر باشند. در این سؤال یعنی درایه‌های به شکل $\frac{۲x^۲-۹x+۴}{۳x^۲-۱۳x+۴}$ باید برابر صفر شوند. بنابراین:

$$۲x^۲-۹x+۴=۰\xrightarrow{\text{تجزیه}}(۲x-۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},x=۴$$

با امتحان ریشه‌های این معادله در عبارت مخرج کسر، مشاهده می‌شود که $x=۴$، مخرج را صفر می‌کند. پس فقط $x=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

۳. گزینه ۳ طبق خاصیت تساوی در ماتریس‌ها، درایه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند. پس می‌توانیم چهار معادله داشته باشیم.

$$\begin{cases}x^۲+۳=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow x=۱,۳\\ ۴=-x^۲+۵x\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۱,۴\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها، $x=۱$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$۳x-y=۲x+y\Rightarrow x=۲y\Rightarrow ۱=۲y\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}$$

پس: $x+y=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$

۴. گزینه ۴ از آن‌جایی که ماتریس‌های A و B دارای تعداد سطر و ستون برابر هستند، می‌توان عملیات خواسته شده را انجام داد. در این‌جا نیازی به پیدا کردن همهٔ درایه‌های ماتریس‌های A و B نداریم. در عملیات خواسته‌شده، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم خواسته شده است، پس محاسبهٔ درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس‌های A و B کافی می‌باشد:

$$a_{۲۳}=(۳)^۲+۲\times(۲)=۱۳,\ b_{۲۳}=(۲)^۳-۳=۵$$

حالا با توجه به خواص ضرب عدد در ماتریس درایهٔ $۲a_{۲۳}$ برابر با $۲۶=۱۳\times۲$ و درایهٔ $-b_{۲۳}$ برابر ۵- می‌باشد و در نهایت درایهٔ سطر دوم و ستون سوم از ماتریس خواسته‌شده برابر با $۲۱=۲۶+۵-$ است.

۵. گزینه ۴ توجه کنید که $c_{۲۴}$، درایهٔ سطر دوم و ستون چهارم از ماتریس C می‌باشد، اما $C=A.B$ است، پس:

$$c_{۲۴}=(\text{سطر دوم ماتریس }A)(\text{ستون چهارم ماتریس }B)$$

$$=\begin{bmatrix}۰&۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\۴\\-۶\end{bmatrix}=(۰)(۶)+(۳)(۴)+(۲)(-۶)=۰$$

۶. گزینه ۳

راهبرد: اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\text{سطر }i\text{ام ماتریس }(A\cdot B)=(\text{سطر }i\text{ام ماتریس }A)\cdot B$$

(وقتی از ماتریس دوم، ستون خاصی ذکر نشده است، کل آن را در نظر می‌گیریم.)
حال داریم:

$$\text{سطر دوم ماتریس }C=\text{سطر دوم ماتریس }(AB)=(\text{سطر دوم ماتریس }A)\cdot B$$

$$=\begin{bmatrix}\boxed{۲\ \ ۶}\end{bmatrix}_{۱\times۲}\begin{bmatrix}۱&۳&-۱&۰\\۵&-۶&۷&۱۰\end{bmatrix}_{۲\times۴}=\begin{bmatrix}۳۲&-۳۰&۴۰&۶۰\end{bmatrix}_{۱\times۴}$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس C برابر با $۱۰۲=۳۲+(-۳۰)+۴۰+۶۰$ است.

۷. گزینه ۱

راهبرد: اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\text{ستون }j\text{ام ماتریس }(AB)=A\cdot(\text{ستون }j\text{ام }B)$$

(وقتی از ماتریس اول، سطر خاصی ذکر نشده است، کل آن را در نظر می‌گیریم.) حال داریم:

$$\text{ستون سوم ماتریس }(N\cdot M)=N\cdot(\text{ستون سوم }M)$$

$$=\begin{bmatrix}۴&-۲\\۰&۷\\۵&۱\end{bmatrix}_{۳\times۲}\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}_{۲\times۱}=\begin{bmatrix}-۲\\۷\\۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

پس مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $N\cdot M$ برابر با ۶ است.

۸. گزینه ۴

اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}۵\\۲\\-۷\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&-۱&۴\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب AB موردنظر است که یک ماتریس ۳×۳ است. زیرا: $A_{۳\times۱}\underset{ok}{\cdot}B_{۱\times۳}=C_{۳\times۳}$

برای یافتن آن داریم:

$$\begin{bmatrix}۵\\۲\\-۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\times۲&۵\times(-۱)&۵\times۴\\۲\times۲&۲\times(-۱)&۲\times۴\\(-۷)\times۲&(-۷)\times(-۱)&(-۷)\times۴\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱۰&-۵&۲۰\\۴&-۲&۸\\-۱۴&۷&-۲۸\end{bmatrix}$$

۹. گزینه ۳ حاصل‌ضرب‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}c&۵\\۳&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\b&۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳c+۵b&c+۳۵\\۹+ab&۳+۷a\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۳&۱\\b&۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&۵\\۳&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳c+۳&۱۵+a\\bc+۲۱&۵b+۷a\end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن یک درایهٔ متناظر در هر دو ماتریس حاصل داریم:

$$(AB)_{۱۲}=(BA)_{۱۲}\Rightarrow c+۳۵=۱۵+a\Rightarrow c-a=-۲۰$$

۱۰. گزینه ۲ اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $AB=BA$ برقرار می‌شود.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۲\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۳&-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-۲-۳a&۴-۳b\\۳-۲a&-۶-۲b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸&۱\\-۲a+۳b&-۳a-۲b\end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های مساوی، درایه‌های متناظر با هم برابرند. از تساوی درایه‌های ۱×۱ یعنی $-۸=-۲-۳a$، مقدار a مساوی ۲ می‌شود. از تساوی درایه‌های ۱×۲ داریم: $۳-۲a=-۲a+۳b\Rightarrow b=۱\xrightarrow{a=۲}a+b=۲+۱=۳$

۱۱. گزینه ۱ از آن‌جایی که حاصل‌ضرب ماتریسی، یک ماتریس قطری است، پس درایه‌هایی که روی قطر اصلی قرار نگرفته‌اند، باید صفر باشند.
یعنی درایه‌های $x_{۱۲}$ و $x_{۲۱}$ از ماتریس حاصل باید صفر باشند.

$$\begin{bmatrix}-۲a&-۲\\۲&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dots&۲a+۴\\۶-۲b&\dots\end{bmatrix}$$

از معادلات $2a+4=0$ و $2b-6=0$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر ۲− و ۳ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حاصل $a+b$ برابر با ۱ است.

۱۲. گزینه ۲ می‌دانیم ماتریس حاصل، یک ماتریس ۲×۲ است. (چرا؟) پس برای آنکه یک ماتریس قطری ۲×۲ داشته باشیم، باید درایه‌های a_{12} و a_{21} برابر صفر باشند. پس:

$$a_{12}=0\Rightarrow[x\ \ -1\ \ 4]\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow -2x+4=0\Rightarrow x=2$$

$$a_{21}=0\Rightarrow[2\ \ 3\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\y\end{bmatrix}=0\Rightarrow 4+3+y=0\Rightarrow y=-7$$

۱۳. گزینه ۴ ماتریس‌های B و C از مرتبهٔ ۳×۲ هستند. می‌دانیم در ضرب ماتریسی AB تعداد سطرها، با تعداد سطرهای ماتریس A برابر است. پس ماتریس A حتماً دارای ۲ سطر است. از طرفی ضرب ماتریسی AB وقتی ممکن است که تعداد ستون ماتریس A با تعداد سطر ماتریس B برابر باشد، پس ماتریس A دارای ۲ ستون می‌باشد. $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$$C=AB\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3a+b&a-b&2a+b\\-3c+d&c-d&2c+d\end{bmatrix}$$

از تساوی درایه‌های متناظر سطر اول از هر دو ماتریس مساوی داریم:

$$-3a+b=-1\ ,\ a-b=2\ ,\ 2a+b=1$$

از حل معادلات $-3a+b=-1$ ، $a-b=2$ مقادیر a و b به‌ترتیب برابر $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{5}{2}$ به‌دست می‌آیند. که این مقادیر در رابطهٔ $2a+b=1$ صادق نیستند، زیرا $2(\frac{-1}{2})-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}\neq 1$. پس ماتریسی مانند A وجود ندارد.

۱۴. گزینه ۲ ماتریس سمت راست دارای سه سطر است. بنابراین ماتریس A سه سطر دارد. از طرفی برای اینکه ماتریس A را در ماتریس $B=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$ ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. پس ماتریس A از مرتبهٔ ۲×۳ می‌باشد.

$$A\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&d\\c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3a+4b&-a+2b\\3c+4d&-c+2d\\3e+4f&-e+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\\3&5\end{bmatrix}$$

از برابر قرار دادن درایه‌های متناظر، پس از حل دستگاه‌های دو معادله دومجهولی، به‌ترتیب مقادیر دوتایی‌های (a,b)، (c,d) و (e,f) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}3a+4b=1\\-a+2b=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{-3}{5}\ ,\ b=\frac{7}{10}$$

$$\begin{cases}3c+4d=-1\\-c+2d=0\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{1}{5}\ ,\ d=-\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases}3e+4f=3\\-e+2f=5\end{cases}\Rightarrow e=-\frac{7}{5}\ ,\ f=\frac{9}{5}$$

بنابراین بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر $f=\frac{9}{5}$ است.

۱۵. گزینه ۱

$$\underbrace{[x\ \ 2x\ \ -1]\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}}_{[11x-1\ \ -x-2\ \ -3x]}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow[11x-1\ \ -x-2\ \ -3x]\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow(11x-1)\cdot x+(-x-2)\cdot(2x)+)-(-3x)(-1)=0$$

$$\Rightarrow 9x^2-2x=0\Rightarrow x\cdot(9x-2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ \frac{2}{9}$$

۱۶. گزینه ۱

$$[x\ \ 2\ \ 1]\begin{bmatrix}x&-1&1\\2&x&3\\-1&1&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{0}$$

$$\Rightarrow[x^2+3\ \ x+1\ \ 2x+6]\begin{bmatrix}2\\x\\-1\end{bmatrix}=\bar{0}$$

$$\Rightarrow 2(x^2+3)+x(x+1)-(2x+6)=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+6+x^2+x-2x-6=0\Rightarrow 3x^2-x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\x=0\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{1}{3}$$

۱۷. گزینه ۱ فرض می‌کنیم:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}}_{D}$$

در این صورت سطر سوم ماتریس A، عبارت است از:

$$(\text{سطر سوم } BC)\times D=((\text{سطر سوم } B)\times C)\times D$$

$$=([0\ \ -1\ \ 1]\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix})\times\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=[3\ \ 7\ \ -2]\times\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=[7\ \ 1\ \ -5]$$

پس مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس برابر با ۳ است.

۱۸. گزینه ۴ ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&?&?\\?&7&?\\?&?&5\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A، برابر ۲۱ است.

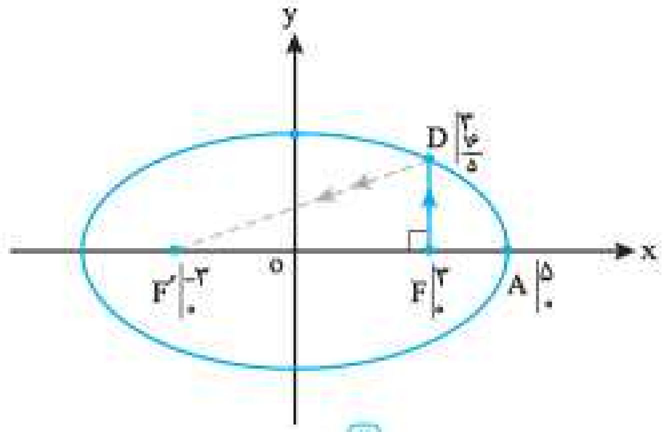
۱۹. گزینه ۱ ماتریس A را جای‌گذاری کرده و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-c&-d\\-a&-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&c\\b&a\end{bmatrix}$$

پس نقطهٔ $F(۰,۳)$ و در نتیجه $F'(۰,-۳)$ (چرا؟) به دست می‌آید.
اما DF، نصف وتر کانونی است و داریم:

$$DF=\frac{b^۲}{a}=\frac{۴^۲}{۵}=\frac{۱۶}{۵}\Rightarrow y_D=\frac{۱۶}{۵}\xrightarrow{x_D=x_F=۳}D(۳,\frac{۱۶}{۵})$$



۲

از طرفی می‌دانیم، شعاع بازتابش، خطی است که از D و کانون F' می‌گذرد (شکل ۲). پس شیب این خط عبارت است از:

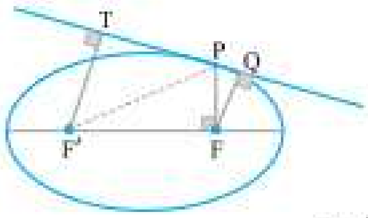
$$m_{DF}=\frac{\frac{۱۶}{۵}-۰}{۳-(-۳)}=\frac{۱۶}{۳۰}=\frac{۸}{۱۵}$$

بنابراین معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ D و F' می‌گذرد، مطلوب می‌باشد:

$$y-y_{F'}=m(x-x_{F'})\Rightarrow y-۰=\frac{۸}{۱۵}(x+۳)$$

$$\Rightarrow ۱۵y=۸x+۲۴\Rightarrow ۱۵y-۸x=۲۴$$

۳۶۰. گزینه ۲ اگر از نقطهٔ P به نقطهٔ F' وصل کنیم، در این صورت طبق خاصیت بازتابندگی در بیضی، داریم:



$$T\hat{P}F'=Q\hat{P}F\Rightarrow \overset{\triangle}{QPF}\sim\overset{\triangle}{TPF'}$$

$$\Rightarrow\frac{QF}{TF'}=\frac{PF}{PF'}\quad(*)$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ کانونی در بیضی داریم:

$$\begin{cases}۲a=۲\sqrt{۲}\Rightarrow a=\sqrt{۲}\\ ۲c=۲\Rightarrow c=۱\end{cases}\Rightarrow b^۲=a^۲-c^۲=(\sqrt{۲})^۲-(۱)^۲=۱$$

از آن‌جایی که پاره‌خط FP، نصف وتر کانونی بیضی است (چرا؟)، پس:

$$FP=\frac{b^۲}{a}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از طرفی نقطهٔ P روی بیضی است، پس:

$$PF+PF'=۲a\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}+PF'=۲\sqrt{۲}\Rightarrow PF'=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

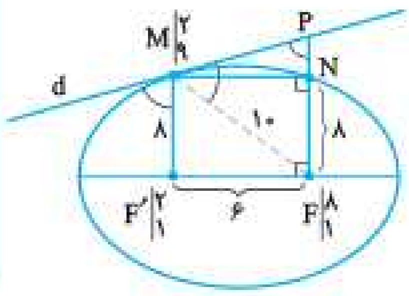
$$\xrightarrow{(*)}\frac{QF}{TF'}=\frac{PF}{PF'}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

۳۶۱. گزینه ۳

$$FF'=۲c\Rightarrow\sqrt{(۸-۲)^۲+(۱-۱)^۲}=۲c\Rightarrow ۶=۲c\Rightarrow c=۳$$

$$MF+MF'=۲a\Rightarrow\underbrace{\sqrt{(۲-۸)^۲+(۹-۱)^۲}}_{۱۰}+\underbrace{\sqrt{(۲-۲)^۲+(۹-۱)^۲}}_{۸}=۲a$$

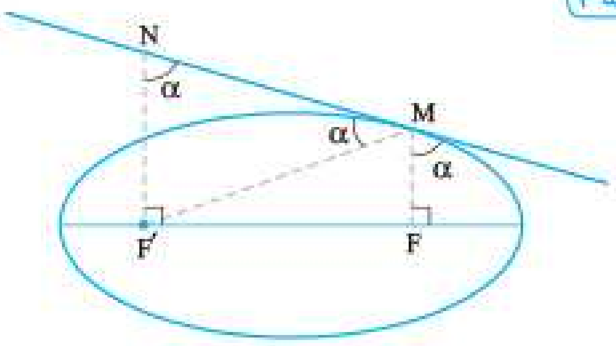
$$\Rightarrow ۱۸=۲a\Rightarrow a=۹$$



واضح است که $PF=MF=۱۰$ (چرا؟) و در نتیجه داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{PMN}}=\frac{۱}{۲}\underbrace{MN}_{۶}\times\underbrace{PN}_{۲}=۶$$

۳۶۲. گزینه ۴



$$\begin{cases}۲a=۱۰\Rightarrow a=۵\\ ۲b=۸\Rightarrow b=۴\end{cases}$$

می‌دانیم اندازهٔ پاره‌خط MF، با نصف اندازهٔ وتر کانونی بیضی برابر است. یعنی:

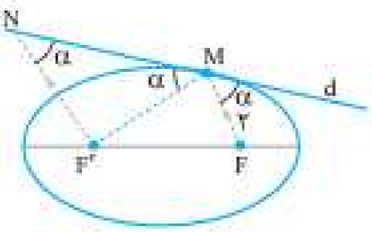
$$MF=\frac{b^۲}{a}=\frac{۴^۲}{۵}=\frac{۱۶}{۵}$$

از طرفی طبق تعریف بیضی داریم:

$$MF+MF'=\underbrace{۲a}_{۱۰}\Rightarrow\frac{۱۶}{۵}+MF'=۱۰\Rightarrow MF'=۱۰-\frac{۱۶}{۵}=\frac{۳۴}{۵}$$

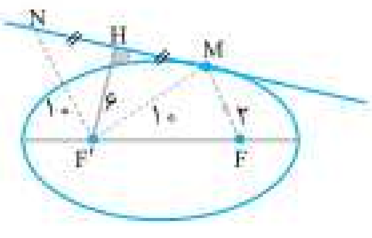
$$\xrightarrow{\text{می‌دانیم}}NF'=MF'=\frac{۳۴}{۵}=۶/۸$$

۳۶۳. گزینه ۲ با توجه به صورت سؤال، شکل مقابل به‌دست می‌آید. از درسنامه می‌دانیم اگر $NF'\parallel MF$ باشد، مثلث $F'MN$ متساوی‌الساقین است، یعنی $MF'=NF'$. از طرفی نقطهٔ M روی بیضی قرار دارد، پس در تعریف بیضی صدق می‌کند:



$$MF+MF'=۲a\Rightarrow ۲+MF'=۱۲\Rightarrow MF'=۱۰\Rightarrow NF'=۱۰$$

اگر از رأس F' (شکل زیر) در مثلث متساوی‌الساقین $F'MN$، ارتفاع $F'H$ را رسم کنیم، میانهٔ ضلع MN نیز می‌باشد. پس طبق قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $F'HM$، اندازهٔ $HM=۸$ به‌دست می‌آید و لذا $MN=۱۶$ است.

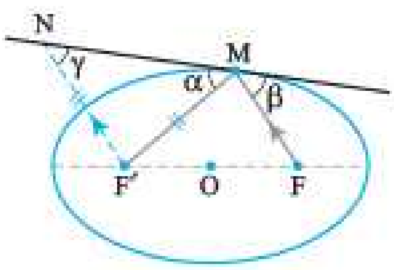


۳۶۴. گزینه ۳ با توجه به فرض‌های داده شده داریم:

$$\begin{cases}۲b=۶\Rightarrow b=۳\\ ۲c=۸\Rightarrow c=۴\end{cases}\xrightarrow{\text{رابطهٔ کانونی}}a^۲=b^۲+c^۲=۳^۲+۴^۲=۵^۲$$

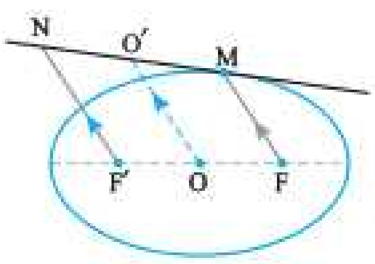
$$\Rightarrow a=۵$$

در شکل مقابل، می‌دانیم $\alpha=\beta$ و با توجه به موازی بودن $F'N\parallel FM$ و مورب بودن خط مماس، $\gamma=\beta$ است. پس $\gamma=\alpha$ و در نتیجه مثلث $F'MN$ متساوی‌الساقین است، پس و $F'N=F'M$. از طرفی نقطهٔ M روی بیضی قرار دارد و در نتیجه داریم:



$$MF+MF'=۲a\xrightarrow{MF'=NF'}MF+NF'=۲a=۱۰\ (*)$$

اما در ذوزنقهٔ $FMNF'$، نقطهٔ O (مرکز بیضی) وسط ساق FF' است و چون OO' موازی با هر دو قاعدهٔ ذوزنقه می‌باشد: پس نقطهٔ O' نیز وسط ساق MN می‌باشد. یعنی OO' پاره‌خط واصل وسط‌های دو ساق ذوزنقه است و لذا:



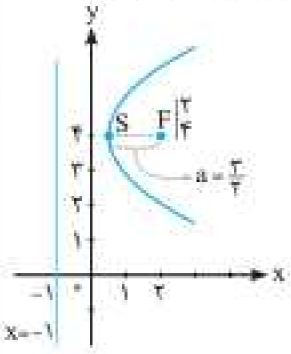
$$OO'=\frac{MF+NF'}{۲}\overset{(*)}{=\!=}\frac{۲a}{۲}=۵$$

۳۷۲. (گزینه۳) می‌دانیم مکان‌هندسی نقاطی که از یک نقطهٔ ثابت و از یک خط ثابت به یک فاصله‌اند، سهمی است. بنابراین مقطع مخروطی موردنظر یک سهمی است و در سهمی باید ضریب یکی از متغیرهای درجهٔ دوم صفر باشد.

$$\begin{cases}\alpha^2-1=0\Rightarrow \alpha=-1\ ,\ \alpha=1\\ \alpha^2+\alpha=0\Rightarrow \alpha=-1\ ,\ \alpha=0\end{cases}$$

مقدار $\alpha=-1$ هم‌ضریب x^2 و هم‌ضریب y^2 را صفر می‌کند، پس نمی‌تواند درست باشد. بنابراین $\alpha=0$ یا $\alpha=1$ قابل قبول می‌تواند باشد.

۳۷۳. (گزینه۲) از آنجایی که خط هادی سهمی $x=$ است، سهمی افقی و با توجه به موقعیت کانون نسبت به خط هادی، جهت دهانهٔ سهمی به طرف راست می‌باشد. فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a=3$ و از آنجا $a=\frac{3}{2}$ است. رأس سهمی، وسط کانون و خط هادی یعنی نقطهٔ $S(\frac{1}{2},4)$ می‌باشد. معادلهٔ سهمی را نوشته و مقدار y را در آن برابر صفر قرار می‌دهیم:

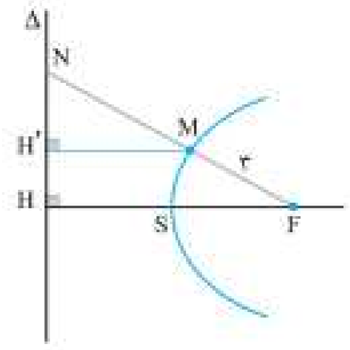


$$(y-4)^2=4\times\frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})$$

$$\xrightarrow[\text{(تقاطع با محور xها)}]{y=0}16=6x-3$$

$$\Rightarrow x=\frac{19}{6}$$

۳۷۴. (گزینه۳)
چون $MH'\parallel FH$، طبق قضیهٔ تالس در مثلث NFH داریم:



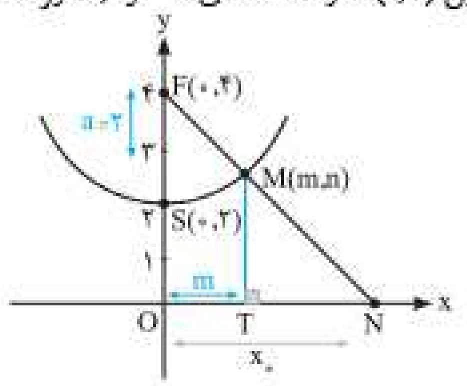
$$\frac{FH}{NF}=\frac{\overbrace{MH'}^{MF}}{MN}\Rightarrow\frac{5}{NF}=\frac{3}{NF-3}$$

$$5NF-15=3NF\Rightarrow NF=7/5$$

۳۷۵. (گزینه۲)

$$\frac{1}{8}x^2=y-2\xrightarrow{\times 8}x^2=8(y-2)\xrightarrow{\text{رأس سهمی}}S(0,2)$$

واضح است که سهمی قائم و دهانه‌اش رو به بالاست و $4a=8$ و لذا $a=2$ می‌باشد. پس کانون $F(0,4)$ و خط هادی $y=0$ (محور xها) است (چرا؟).

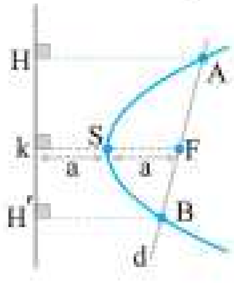


از درسنامه می‌دانیم:

$$\frac{FN}{\underbrace{FS}_{a=2}}=\frac{2NT}{TO}\xrightarrow[TO=|m|]{NT=|x_0-m|}\frac{FN}{2}=\frac{2|x_0-m|}{|m|}$$

$$\Rightarrow m\times FN=4(x_0-m)\Rightarrow FN\times\left|\frac{m}{x_0-m}\right|=4$$

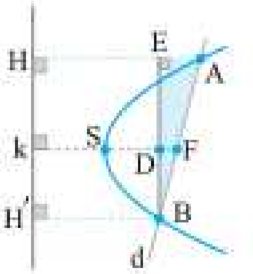
۳۷۶. (گزینه۱) مطابق شکل از دو نقطهٔ تقاطع A و B عمودهای AH و BH' را بر خط هادی سهمی رسم می‌کنیم. از آن‌جایی که دو نقطه A و B روی سهمی واقع‌اند، پس $AF=AH$ و $BF=BH'$ (شکل ۱).



از طرفی چون هر سه پاره‌خط AH، FK و BH' بر خط هادی سهمی عمودند، پس هر سه موازی یکدیگرند.

حال اگر از نقطهٔ B، عمود BE را بر AH رسم کنیم، طبق قضیهٔ تالس در مثلث BEA داریم:

$$\overset{\Delta}{BEA}:FD\parallel AE\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{FB}{AB}=\frac{FD}{AE}$$



$$\Rightarrow\frac{FB}{FA+FB}=\frac{2a-DK}{\underbrace{AH-EH}_{AF}}$$

$$\xrightarrow[BH'=BF]{DK=EH=BH'}\frac{FB}{FA+BF}=\frac{2a-FB}{AF-FB}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}FB\cdot FA-\cancel{FB^2}=2a(FA+FB)-FA\cdot BF-\cancel{FB^2}$$

$$\Rightarrow\cancel{2}FA\cdot FB=\cancel{2}a(FA+FB)$$

$$\Rightarrow\frac{FA+FB}{FA\cdot FB}=\frac{1}{a}\xrightarrow{\text{تفکیک}}\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{1}{a}$$

۳۷۷. (گزینه۳) مکان‌هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ $A(0,4)$ و $B(-2,0)$ به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

برای یافتن معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB (خط d)، معادلهٔ خطی را می‌یابیم که از نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB بگذرد و شیب آن قرینه معکوس شیب پاره‌خط AB باشد.

$$\begin{cases}M(\frac{-2+0}{2},\frac{0+4}{2})\Rightarrow M(-1,2)\in d\\ m_{AB}=\frac{4-0}{0-(-2)}=2\Rightarrow m_d=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ خط d عبارت است از:

$$d:(y-2)=-\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow 2y+x-3=0\quad(*)$$

برای پیدا کردن نقاط تلاقی این خط با سهمی مفروض، آن‌ها را قطع می‌دهیم. از معادلهٔ خط، $y=\frac{3-x}{2}$ به‌دست می‌آید و آن را در معادلهٔ سهمی جایگزین می‌کنیم. داریم:

$$y=x^2-2x-3\xrightarrow{y=\frac{3-x}{2}}\frac{3-x}{2}=x^2-2x-3$$

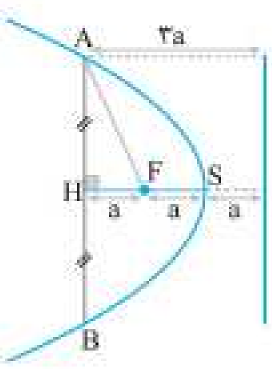
$$\xrightarrow{\text{مرتب}}2x^2-3x-9=0\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}x=3\ ,\ x=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3\xrightarrow{(*)}y=0\Rightarrow P(3,0)\\ x=-\frac{3}{2}\xrightarrow{(*)}y=\frac{9}{4}\Rightarrow N(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})\end{cases}$$

پس نقاط مطلوب مسئله عبارت‌اند از $N(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ و $P(3,0)$، که مجموع مختصات‌های نقطهٔ P برابر ۳ است.

۳۷۸. (گزینه۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHF با کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$AH=\sqrt{AF^2-FH^2}$$



از آن‌جایی که نقطهٔ A روی سهمی قرار دارد، فاصلهٔ A تا کانون (F) برابر با فاصلهٔ A تا خط هادی یعنی 3a است:

$$AH=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a$$

بنابراین:

$$\frac{AB}{SH}=\frac{2AH}{SH}=\frac{2\times(2\sqrt{2}a)}{2a}=2\sqrt{2}$$