پیچیده‌ترین معادله شدی برایم
Δ زدم و نیامد آن به کارم!
با دیدن لبخند چو ماهت...
احساس عمیق و خوب دارم
انگار ریشه‌ی حقیقی دارم!

فصل ۵

معادله و تابع درجه‌ی دوم

هر چه درباره‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو و دیدگاهِ تابعیِ آن بخواهید این‌جاست... روش‌های حلِ معادله‌ی درجه‌ی دو، روابطِ بینِ ریشه‌هایش، سهمی و ویژگی‌های آن، کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دو در حل مسائل مختلف.

این فصل یکی از مهم‌ترین آیتم‌های کنکوریِ شماست؛ یادتان باشد معادله‌ی درجه‌ی دو چیزی نیست که در این فصل تمام شود! در ریاضیات تجربی و در بخش‌های مختلف نیاز به مباحث این فصل مُدام احساس می‌شود؛ درست مثل یکی از چهار عمل اصلی...!

تابع و معادله‌ی درجه‌ی دو، ابزاری است راه‌گشا که بدون تسلط به آن شاید بتوان گفت نابینا وارد کنکور شده‌اید!! حوصله‌ی زیاد و تست کافی پیشنهاد ما در این فصل است...

ایستگاه۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و بررسی Δ در ریاضی تجربی، حکمِ یکی از چهار عمل اصلی ریاضی را دارد، از بس کاربردی است.

معادله‌ی درجه‌ی اول و دوم

$\boxed{1}$ **معادله‌ی درجه‌ی اول:** معادله‌ای برحسب متغیرِ x، که بعد از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان مجهولش ۱ باشد، را معادله‌ی درجه‌ی اول می‌گوییم. فرم کلی این معادله به‌صورت $ax+b=0$ و مقدار ریشه‌ی آن هم $x=-\frac{b}{a}$ است. $(a\neq 0)$

این‌جوری هم ببین: برای حلِ معادله‌ی درجه‌ی اول، ابتدا عدد ثابت را به سمت راستِ تساوی منتقل کرده، سپس دو طرف را بر ضریبِ مجهول تقسیم می‌کنیم.

تست: دو برابر عددی را از ۲۵ کم کرده‌ایم و حاصل، نصف همان عدد شده است. مساحت مربعی که طول ضلعش این عدد باشد، کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

پاسخ: اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم:

$$25-2x=\frac{x}{2}\xrightarrow{\text{مرتب کن}}25=\frac{x}{2}+2x\xrightarrow{\text{ساده‌کن}}25=\frac{x+4x}{2}\Rightarrow 25=\frac{5x}{2}\xrightarrow{\times\frac{2}{5}}10=x\xrightarrow[\text{به توان ۲ برسون}]{\text{مساحت مربع}}x^2=100$$

$\boxed{2}$ **معادله‌ی درجه‌ی دوم:** معادله‌ای را که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیرِ آن، ۲ باشد معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گوییم. فرم کلی این معادله به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است؛ که a، b و c سه عددِ حقیقی هستند و البته $a\neq 0$ است!

معادله‌ی $\bigcirc = x^2$

یک معادله‌ی خیلی کاربردی، این است که بعد از ساده کردن معادله، برسیم به عبارتِ «عدد ثابت $= x^2$»، مثل $x^2=3$.

اگر u، عبارتی برحسبِ x بوده و A هم عددی ثابت باشد، آن‌وقت:

	$A>0$	$A<0$	$A=0$
$u^2=A$	**نتیجه می‌دهد:** $u=\sqrt{A}$ و $u=-\sqrt{A}$	**ریشه ندارد.** آخه عبارت نامنفیِ u^2، هیچ‌گاه برابرِ عدد منفی نمی‌شود!	**نتیجه می‌دهد:** $u=0$

تست: در معادله‌ی $9(2x+\frac{5}{3})^2-1=0$، مقدار ریشه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$9(2x+\frac{5}{3})^2-1=0\xrightarrow{\text{انتقال ۱ به سمت راست}}9(2x+\frac{5}{3})^2=1\xrightarrow{\div 9}(2x+\frac{5}{3})^2=\frac{1}{9}$$

$$\xrightarrow[u^2=\frac{1}{9}]{u=2x+\frac{5}{3}}\begin{cases}2x+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\\ 2x+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}\end{cases}\xrightarrow{-\frac{5}{3}}\begin{cases}2x=-\frac{4}{3}\\ 2x=-2\end{cases}\xrightarrow{\div 2}\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\ x=-1\end{cases}\xrightarrow{\text{ریشه‌ی کوچک‌تر}}x=-1$$

عبارتِ «عدد مثبت $+ u^2$»، همواره مثبت است. **ببین:** $(x-1)^2+3>0$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش تجزیه

در معادله‌ی درجه‌ی دومی که ضریبِ x^2 در آن ۱ باشد، به عنوان ساده‌ترین راه، می‌رویم سراغ تجزیه! در این روش معادله‌ی $x^2+mx+n=0$ را در نظر می‌گیریم: $\boxed{1}$ فرم تجزیه‌شده‌ی معادله را می‌نویسیم: $(x+\bigcirc)(x+\bigcirc)=0$ $\boxed{2}$ برای کامل کردنِ پرانتزها، به دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان بشود n و جمعشان هم m $\boxed{3}$ حالا اون دوتا عددی را که پیدا کردیم جای‌گذاری می‌کنیم و ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم. این روش برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، کلی نیست، گاهی دو عدد با ضرب و جمعی که می‌خواهید پیدا نمی‌کنید.

اگر ضربِ چند عبارت، مساویِ صفر شود، تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر می‌گذاریم.

تست: در معادله‌ی $x^2-20x+51=0$، تفاضل ریشه‌ها، کدام ویژگی زیر را دارد؟

۱) عدد فرد ۲) مضرب ۳ ۳) مضرب ۷ ۴) عدد اول

پاسخ: دنبال دو عدد با حاصل‌ضربِ ۵۱ هستیم که جمعِ آن‌ها ۲۰- باشد! این دو عدد ۳- و ۱۷- هستند:

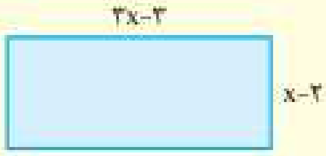
$$x^2-20x+51=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-17)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x-17=0\\ x-3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}x=17, x=3\xrightarrow{\text{تفاضل ریشه‌ها}}17-3=14\xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}}$$ ۱۴ مضرب ۷ است.

وقتی که معادله‌ی درجه‌ی دوم عدد ثابت نداشـــته باشد، **این‌طوری:** $ax^2+bx=0$، سریع از x، فاکتور گرفته و به حاصل‌ضربِ دو عبارت می‌رسیم که مساویِ صفر شده است، بعدش معادله حل می‌شود...

این‌جوری هم ببین: اگر $ax^2+bx=0$ شود، ریشه‌ها عبارت‌اند از $x=0$ و $x=-\frac{b}{a}$. آخه:

$$ax^2+bx=0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(ax+b)=0$$

تست: مساحت مستطیل مقابل برابر ۶ است. کدام گزینه درباره‌ی x درست است؟



۱) عددی زوج است. ۲) عددی مربع کامل است.
۳) عددی دورقمی است. ۴) عددی اول است.

پاسخ:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow S=(3x-3)(x-2) \xrightarrow{\text{مساوی ۶ بذار}} (3x-3)(x-2)=6$$

$$\xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{ضرب رو}} 3x^2-9x+6=6 \xrightarrow{-6} 3x^2-9x=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیر}} 3x(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } 3$$

طول ضلع مستطیل باید مثبت باشد، پس $x=0$ قابل قبول نیست، در نتیجه $x=3$ است که عددی اول می‌باشد.

حالا فرض کنید ضریبِ x^2، مساوی ۱ نباشد، در این حالتِ کلی هم اگر ریشه‌ها اعداد گویا باشند، می‌توانید با روش تجزیه معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنید...

تکنیک معلم کنکور: ضریبِ x^2 را در عددِ ثابت معادله ضرب کرده و بعد آن را نادیده بگیرید! حالا معادله‌ی درجه‌ی دومی دارید که ضریبِ x^2 در آن ۱ است، خُب تجزیه‌اش کنید! کار که تمام شد و حاصل به فرم $(x+m)(x+n)$ درآمد، در یک پرانتز، (به دلخواه) a را در x ضرب کنید و در پرانتز دیگری عدد ثابت را بر a تقسیم!

این‌جوری هم ببین:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+bx+ca=0 \xrightarrow{\text{تجزیه‌کن}} (x+m)(x+n)=0 \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم a}} (ax+m)(x+\frac{n}{a})=0$$

ضرب‌کن و حذف‌کن

ببین:

$$5x^2-9x-2=0 \Rightarrow x^2-9x-10=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x+1)(x-10) \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم ۵}} (5x+1)(x-\frac{10}{5})=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=-\frac{1}{5}, 2$$

ضرب و حذف

تست: در معادله‌ی $3x^2-11x+6=0$ ریشه‌ی بزرگ‌تر چند برابر ریشه‌ی کوچک‌تر است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

پاسخ:

$$3x^2-11x+6=0 \Rightarrow x^2-11x+18=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-2)(x-9)=0 \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم ۳}} (3x-2)(x-\frac{9}{3})=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=\frac{2}{3}, 3$$

ضرب و حذف

$$\frac{\text{ریشه‌ی بزرگ}}{\text{ریشه‌ی کوچک}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} = 4/5$$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش مربع کامل

۱ برای این‌که عبارتِ x^2+bx را مربع کامل کنیم باید به آن $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه کنیم.

این‌جوری هم ببین:

$$x^2+bx \xrightarrow{\text{مربع‌کامل کن}} x^2+bx+\frac{b^2}{4}=(x+\frac{b}{2})^2$$

۲ برای این‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ را با روش مربع کامل حل کنید، مراحل زیر را به‌ترتیب اجرا کنید:

الف) عدد ثابت را به سمت راستِ تساوی ببرید و بعد دو طرف را به ضریبِ x^2 تقسیم کنید:

این‌جوری هم ببین:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+bx=-c \xrightarrow{\div a} x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

ب) حالا سمت چپِ تساوی را همان‌طور که یاد دادیم، مربع کامل کنید و بعد معادله را حل کنید.

ببین: حل معادله‌ی $3x^2+2x-8=0$ با روش مربع کامل:

$$3x^2+2x-8=0 \Rightarrow 3x^2+2x=8 \xrightarrow{\div 3} x^2+\frac{2}{3}x=\frac{8}{3} \xrightarrow[b=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{4}=\frac{1}{9}]{+\frac{1}{9}}$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\underbrace{\frac{8}{3}+\frac{1}{9}}_{\text{ساده‌کن}} \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x+\frac{1}{3})^2=\frac{25}{9} \xrightarrow{\text{جذر}} x+\frac{1}{3}=\pm\frac{5}{3}$$

$$x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{6}{3}=-2$$

تکنیک معلم کنکور: اگر معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را با روش مربع کامل حل کنیم تا به‌صورت $\boxed{(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}}$ درآید، (ضریب x داخل پرانتز یک باشد) عددی که باید به دو طرف تساوی اضافه شود $\frac{b^2}{4a^2}$ است و عددی که در نهایت باید از آن جذر بگیریم $\frac{\Delta}{4a^2}$ خواهد بود...

تست: برای حل معادله‌ی $2x^2+9x+4=0$ به روش مربع کامل، عددی که باید در سمت راست تساوی از آن جذر بگیریم، کدام است؟

۱) $\frac{49}{8}$ ۲) $\frac{49}{4}$ ۳) $\frac{49}{16}$ ۴) $\frac{81}{16}$

پاسخ:

$$2x^2+9x+4=0 \xrightarrow{a=2,b=9,c=4} \Delta=b^2-4ac=9^2-4(2)(4)=81-32 \Rightarrow \Delta=49 \xrightarrow{\text{عددی که باید جذر بگیریم}} \frac{\Delta}{4a^2}=\frac{49}{4(2)^2}=\frac{49}{16}$$

تست: برای حل معادله‌ی $25x^2-25x+6=0$، با روش مربع کامل، کدام عدد را می‌توانیم به دو طرف تساوی اضافه کنیم؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) ۱

پاسخ:

$$25x^2-25x+6=0 \xrightarrow{a=25,b=-25} \frac{b^2}{4a^2}=\frac{(-25)^2}{4(25)^2}=\frac{1}{4}$$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روشِ Δ

متداول‌ترین روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، همین است. در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$:

۱) Δ را پیدا می‌کنیم: $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ ۲) مقدار ریشه‌ها، در صورتی‌که Δ منفی نباشد، عبارت‌اند از: $\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ و $\boxed{x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(\sqrt{3}+1)x^2-x+1=\sqrt{3}$، ریشه‌ی مثبت کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-1$ ۲) $\sqrt{3}+1$ ۳) $2\sqrt{3}-1$ ۴) $2\sqrt{3}-2$

پاسخ:

$$(\sqrt{3}+1)x^2-x+1=\sqrt{3} \xrightarrow{\text{مرتب کن}} \underbrace{(\sqrt{3}+1)}_{a}x^2\underbrace{-}_{b}x+\underbrace{(1-\sqrt{3})}_{c}=0 \xrightarrow[\text{پیدا کن}]{\Delta \text{ رو}} \Delta=(-1)^2-4\underbrace{(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})}_{-2}=9$$

$$\xrightarrow[\Delta>0]{\text{ریشه‌ها}} x_1=\frac{1+3}{2(\sqrt{3}+1)},\ x_2=\frac{1-3}{2(\sqrt{3}+1)} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{ریشه‌ی}} x_1=\frac{1+3}{2(\sqrt{3}+1)} \xrightarrow[\div 2]{\text{ساده کن}} \frac{2}{\sqrt{3}+1} \xrightarrow{\text{گویا کن}} \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\underbrace{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}_{2}}=\sqrt{3}-1$$

دو معادله‌ی درجه‌ی دوم خاص

۱) **اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع هر سه ضریب، برابر صفر شود،** مثل $5x^2+6x-11=0$، یکی از ریشه‌ها همواره ۱ بوده و دیگری هم می‌شود: نسبت عدد ثابت معادله به ضریب x^2

این‌جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم: $a+b+c=0$، آن‌وقت: $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$

۲) **اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع ضریب‌های اولی و آخری برابر ضریب وسطی باشد،** مثل $5x^2+6x+1=0$ $(5+1=6)$، یکی از ریشه‌ها، همواره -1 بوده و دیگری هم می‌شود: قرینه‌ی عدد ثابت معادله، تقسیم بر ضریب x^2

این‌جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم: $a+c=b$، در این‌صورت: $x_1=-1$ و $x_2=-\frac{c}{a}$

یه سطح بالاتر! در هر معادله‌ای و با هر درجه‌ای که داشته باشد، اگر **مجموعِ همه‌ی ضریب‌ها برابرِ صفر شود،** حتماً یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ بوده است و برای تعیین بقیه‌ی ریشه‌ها، عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم...

تست: در معادله‌ی $(2\sqrt{2}-1)x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$ یکی از ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}-3}{9}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}-3}{7}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{7}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$

پاسخ:

$$a=2\sqrt{2}-1,\ b=-\sqrt{2},\ c=1-\sqrt{2} \xrightarrow{a+b+c \text{ روحساب کن}} (2\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=1,\ x=\frac{c}{a}=\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \xrightarrow{\text{گویا کن}} x=\frac{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)} \xrightarrow{\text{ضرب کن}} \frac{\sqrt{2}-3}{7}$$

معادله‌ی درجه‌ی دومِ ناقص

اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، ضریبِ x یا عدد ثابت صفر بودند نیازی به تجزیه و روش Δ نیست! این معادله‌ها را **ناقص** می‌گوییم:

۱) اگر $c=0$ باشد، از x فاکتور بگیرید و تمام...!

ببین:

$$3x^2+5x=0 \xrightarrow[\text{فاکتور}]{c=0} x(3x+5)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0,-\frac{5}{3}$$

۲) اگر $b=0$ باشد، عدد ثابت را به سمت دیگر تساوی ببرید و بعد هم دو طرف، تقسیم بر a، بقیه‌اش را بلدید...

ببین:

$$3x^2-7=0 \xrightarrow[\text{انتقال}]{b=0} 3x^2=7 \xrightarrow{\div 3} x^2=\frac{7}{3} \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$$

جمع‌بندی حل معادله‌ی درجه‌ی دوم؛ دیدِ کنکوری!

تکنیک معلم‌کنکور: برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم در کنکور، دقت کنید ۱) **شاید ناقص باشد** یا ۲) **شاید خاص باشد:** $\boxed{a+c=\pm b}$، اگر این هم نبود ۳) **تجزیه** را امتحان کنید و یادتان باشد همیشه ۴) **روشِ Δ** جواب می‌دهد...!

این مجذورها در روشِ Δ به کارتان می‌آید؛ حفظ باشید:

عدد	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
مجذورِ عدد	۱۰۰	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹	۱۹۶	۲۲۵	۲۵۶	۲۸۹	۳۲۴	۳۶۱	۴۰۰

تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

وضعیتِ تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومِ $ax^2+bx+c=0$ با کمکِ Δ و به‌صورت زیر تعیین می‌شود: $\Delta=b^2-4ac$:

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
وضعیت ریشه‌ها	دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.	ریشه‌ی مضاعف دارد.	ریشه‌ی حقیقی ندارد.
	فرمول ریشه‌ها: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	**فرمول ریشه‌ی مضاعف:** $x=\frac{-b}{2a}$	

منظور از ریشه‌ی مضاعف، وجودِ دو ریشه‌ی مساوی با همدیگر است. راستی ریشه‌ی **مضاعف** را گاهی ریشه‌ی **مکرر مرتبه‌ی دوم** هم می‌گویند...

تست: ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ:

$$\underset{a}{1}x^2\underbrace{-(2m+3)}_{b}x+\underbrace{m^2}_{c}=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\Delta\text{روحساب‌کن}} \Delta=(2m+3)^2-4(1)(m^2) \xrightarrow{\text{اتحاد رو بازکن و ساده‌کن}} \Delta=12m+9$$

$$\xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف دارد}} 12m+9=0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}} m=-\frac{3}{4} \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{\text{در معادله}} x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0 \xrightarrow[\text{پیداکن}]{\text{ریشه‌ی مضاعف‌رو}} x=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-\frac{3}{2})}{2(1)}=\frac{3}{4}$$

کنترل Δ در تست

یادتان باشد هر تستی از معادله‌ی درجه‌ی دوم را که حل کردید و کارتان تمام شد، حتماً در مرحله‌ی آخر باید Δ را کنترل کنید.

۱) چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است،** باید علاوه بر هر شرطی که یافته‌اید، شرطِ $\Delta>0$ هم برقرار باشد...

۲) چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است،** باید شرطِ $\Delta\geq 0$ در کنار تمام فرض‌های مسئله نوشته شده و بررسی شود...

دور زدنِ Δ!

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومِ $ax^2+bx+c=0$، عددهای a و c علامت‌های متفاوت داشــته باشــند، آن‌وقت معادله، حتماً دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز است و در این‌حالت برای فهمیدنِ تعداد ریشه‌ها، نیازی به محاسبه‌ی Δ نداریم...!

تست: معادله‌ی $\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{3}{5}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ریشه‌ی ساده ۳) ریشه‌ی مضاعف ۴) دو ریشه‌ی متمایز

پاسخ:

$$\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{3}{5} \xrightarrow[x\neq 0]{\text{دو طرف را در }4x^2\text{ ضرب کن}} 1-4x=\frac{12x^2}{5} \xrightarrow{\times 5} 5-20x=12x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 12x^2+20x-5=0 \xrightarrow[ac<0]{a=12\text{ و }c=-5} \Delta>0 \Rightarrow \text{معادله حتماً دو ریشه‌ی متمایز دارد.}$$

ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

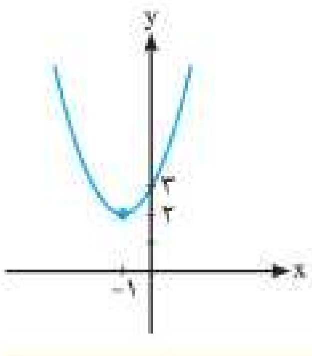
این‌جا رفتار و ویژگی‌های تابع درجه‌ی دوم را می‌بینید. موضوعی که در کتاب درسی بسیار مفصل به آن پرداخته شده است. رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم و تسلط بر آن، در بیشتر مسائل ریاضی، مهم و کاربردی است.

سهمی

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ با شرط‌های $a\neq 0$ و $D_f=\mathbb{R}$، تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود و نمودار این تابع، یک سهمی است.

	$y=ax^2+bx+c$
رأس سهمی	**طول رأس:** $x=-\frac{b}{2a}$ **عرض رأس:** $y=-\frac{\Delta}{4a}$ همچنین می‌توانید با جای‌گذاریِ طولِ رأس در تابع، عرضِ رأس را پیدا کنید.
تلاقی با محور yها	به جای x بگذارید صفر: همیشه یک نقطه‌ی تلاقی دارد. $x=0\Rightarrow y=c$
تلاقی با محور xها	$\Delta>0$ محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند. (یعنی همان ریشه‌هایش...) $\Delta=0$ بر محور xها مماس است. $\Delta<0$ محور xها را قطع نمی‌کند.
تأثیر علامت a	$a>0$: دهانه‌ی سهمی رو به بالاست.  مینیمم داریم. $a<0$: دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.  ماکزیمم داریم.
محور تقارن (همواره یکی)	$x=-\frac{b}{2a}$؛ 
برای رسم سهمی نیاز است	۱) مختصات رأس سهمی ۲) ریشه‌های آن در صورت وجود؛ که نقطه‌های برخورد با محور xها هستند. ۳) نقطه‌ی تلاقی با محور yها ۴) رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامت a

ببین: اگر $y=x^2+2x+3$ باشد، آن‌وقت دهانه‌ی سهمی رو به بالاست $(a=1)$ و طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1$ و عرض رأس هم می‌شود $x=-1 \xrightarrow{\text{در سهمی}} y=1-2+3=2$؛ یعنی $S(-1,2)$ این سهمی در نقطه‌ی $(0,3)$ با محور yها برخورد می‌کند و معادله‌ی محور تقارنش $x=-1$ است. از آن‌جایی که $\Delta=4-12=-8$ است، ریشه هم ندارد.



منظور از کمترین یا بیشترین مقدار سهمی، همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است...

تست: کمترین مقدار تابع $y=kx^2-8x+(6k-1)$ برابر با ۳ است. طول رأس سهمی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: عبارت درجه‌ی دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس $a>0$ بوده است که در این‌جا می‌شود $k>0$. خب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است:

$$\underbrace{k}_{a}x^2\underbrace{-8}_{b}x+\underbrace{(6k-1)}_{c}=0\xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\Delta\text{ رو حساب کن}}\Delta=64-4(k)(6k-1)\xrightarrow{\text{ساده کن}}\Delta=64-24k^2+4k$$

$$\xrightarrow[-\frac{\Delta}{4a}]{\text{فرمول عرض راس}}-\frac{64-24k^2+4k}{4k}=\underbrace{3}_{\text{فرض تست}}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}}24k^2-4k-64=12k\xrightarrow{\text{ساده کن}}24k^2-16k-64=0\xrightarrow{\div 8}3k^2-2k-8=0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}}\Delta=4-4(3)(-8)=100\Rightarrow k=\frac{2\pm 10}{6}=2\text{ و }-\frac{8}{6}\xrightarrow{k>0}k=2\xrightarrow{\text{طول راس}}x=\frac{-b}{2a}=-\frac{-8}{2k}=\frac{8}{4}=2$$

چنانچه سهمی از نقطه‌ی (m,n) بگذرد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

تست: سهمی $y=ax^2+bx+c$ دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x=-2$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(-1,-1)$ بگذرد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ:

۱ محور تقارن: $y=ax^2+bx+c \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x=-\frac{b}{2a}=\underbrace{\boxed{-2}}_{\text{فرض تست}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} b=4a$

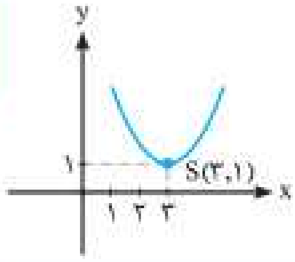
۲ تلاقی با محور y ها: $y=5 \xrightarrow{x=0} c=5$

۳ گذشتن از نقطه: $(-1,-1) \xrightarrow[\text{در سهمی}]{x=-1,y=-1} -1=a(-1)^2+b(-1)+c \xrightarrow{c=5} a-b=-6 \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{b=4a} a-4a=-6$

$\xrightarrow{\text{حل کن}} a=2 \xrightarrow{b=4a} b=8 \Rightarrow a+b+c=2+8+5=15$

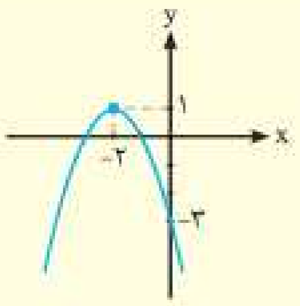
نوشتن معادله‌ی سهمی

۱ اگر **مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(h,k)$ داده شده باشد:** در این‌صورت معادله‌ی سهمی را به‌صورت $y=a(x-h)^2+k$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعاتِ دیگر سؤال، a را پیدا کنید... **ببین:**



$\xrightarrow[a>0]{\text{معادله‌ی کلی}} y=a(x-3)^2+1$

تست: معادله‌ی سهمی مقابل کدام است؟



۱) $y=-x^2+4x-3$

۲) $y=-x^2-4x-3$

۳) $y=-x^2-4x+3$

۴) $y=x^2-4x-3$

پاسخ:

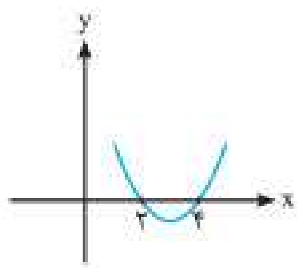
$S(-2,1) \xrightarrow[a<0]{\text{معادله‌ی کلی سهمی}} y=a(x-h)^2+k \xrightarrow[h=-2,\,k=1]{\text{جای‌گذاری کن}} y=a(x+2)^2+1$

سهمی از نقطه‌ی $(0,-3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه را در معادله‌ی آن صدق می‌دهیم:

$y=a(x+2)^2+1 \xrightarrow{x=0,\,y=-3} -3=a(0+2)^2+1 \Rightarrow -3=4a+1 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}} a=-1 \xrightarrow[\text{سهمی}]{\text{در معادله‌ی}} y=-1(x+2)^2+1 \xrightarrow[\text{دوجمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع}} y=-x^2-4x-3$

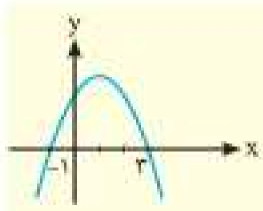
همان‌طور که دیدید برای کارکردن با سهمی‌هایی که معادله‌ی آن‌ها به فرم $y=a(x-h)^2+k$ نوشته شده است، می‌توانید اتحاد مربع دوجمله‌ای موجود را باز کرده و عبارت را ساده کنید...

۲ **اگر نقاط تلاقی سهمی با محور x ها به فرم x_1 و x_2 باشند:** در این‌صورت معادله‌ی سهمی را به‌صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال a را به‌دست بیاورید... **ببین:**



$\xrightarrow[a>0]{\text{معادله‌ی کلی}} y=a(x-2)(x-4)$

تست: سهمی مقابل از نقطه‌ی $(-2,-10)$ می‌گذرد، نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y ها چه عرضی دارد؟



۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ:

ریشه‌ها: $-1,3 \xrightarrow[a<0]{\text{فرم کلی سهمی}} y=a(x-x_1)(x-x_2) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} y=a(x+1)(x-3) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} y=a(x^2-2x-3) \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{(-2,-10)}$

$-10=a(4+4-3) \Rightarrow -10=5a \Rightarrow a=-2 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y=-2(x^2-2x-3) \xrightarrow[x=0]{\text{تلاقی با محور y ها}} y=-2(-3)=6$

در حالت خاص که معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعفِ x_0 دارد، معادله‌اش به‌صورت $y=a(x-x_0)^2$ درمی‌آید...!

قرارداد: ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ را برای تابع $y=ax^2+bx+c$، **صفرهای سهمی** می‌نامیم.

۳) **نوشتن معادله‌ی سهمی با داشتن سه نقطه از آن:** معمولاً ضابطه‌ی سهمی را در این حالت به فرم کلی $y = ax^۲ + bx + c$ نوشته و نقطه‌ها را در آن صدق می‌دهیم، دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و a، b و c را پیدا می‌کنیم. اما طراح کنکور چیزی را دوست دارد که می‌خواهیم به آن بپردازیم: **دو نقطه از سه نقطه قانون دارند!!**

تکنیک معلم کنکور: فرض کنید نقطه‌ها $(۳ , ۱)$، $(۶ , ۴)$ و $(۱ , -۲)$ باشند، در دوتای اول، قانونِ $y = x + ۲$ در نقطه‌ها برقرار! خب معادله‌ی سهمی را به فرم $y = a(x-۱)(x-۴) + x + ۲$ بنویسید و بعد نقطه‌ی سوم را در آن صدق دهید... حالا این قانون در دو نقطه می‌تواند هر چیز دیگری هم باشد:

$$y = a(x-۱)(x-۴) + x + ۲ \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(-۲,۱)} ۱ = a(-۳)(-۶) + ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۸}$$

این جوری هم ببین: دو نقطه از سه نقطه‌ی سهمی، این‌طوری هستند: $(\alpha , f(x))$ و $(\beta , f(x))$، معادله‌ی سهمی را به فرم $\boxed{y = a(x-\alpha)(x-\beta) + f(x)}$ بنویس و با صدق دادنِ نقطه‌ی سوم، a را پیدا کن و تمام...!

◄ $f(x)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی دو است.

تست: سهمی گذرنده از نقطه‌های $(۲,۴)$، $(-۱,۱)$ و $(۴,-۱۴)$ محور yها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) -۶ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) -۴

پاسخ:

$$(۲ , ۴),(-۱ , ۱) \xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}} y = a(x-۲)(x+۱) + x^۲ \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(۴,-۱۴)} -۱۴ = a(۲)(۵) + ۱۶ \Rightarrow ۱۰a = -۳۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y = -۳(x-۲)(x+۱) + x^۲ \xrightarrow[x=۰]{\text{تلاقی با }y\text{ ها}} y = -۳(-۲)(۱) + ۰ = ۶$$

مماس بودن سهمی بر خط

اگر خط دلخواهِ $y = mx + n$ بر یک سهمی مماس شده باشد، به جای yِ سهمی بگذارید: $mx + n$ و سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله‌ی آخری قرار دهید: $\Delta = ۰$...

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است؟ (خارج ۹۳)

۱) -۴ ۲) ۴ و -۱۲ ۳) -۴ و ۱۲ ۴) ۱۲

پاسخ:

$$y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{\text{نیمساز ناحیه‌ی اول: }y=x} x = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} x = ۲x^۲ + mx + x + m + ۶ \Rightarrow ۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مماس یعنی }\Delta=۰} m^۲ - ۴(۲)(m+۶) = ۰ \xrightarrow{\text{ساده کن}} m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+۴)(m-۱۲) = ۰ \Rightarrow m = ۱۲, -۴$$

اگر $m = ۱۲$ باشد، معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از: $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰ \xrightarrow{m=۱۲} ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۸ = ۰$
که به‌وضوح جوابش $x = -۳$ است و در ناحیه‌ی اول نیست! پس فقط $m = -۴$ قابل قبول خواهد بود.

وضعیت کامل یک سهمی نسبت به محور xها

۱) اگر سهمی، محور xها را در دو نقطه قطع کند، در این‌صورت $\Delta > ۰$ بوده است.

۲) اگر سهمی، محور xها را در دو نقطه **قطع نکند**، در این‌صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور xها یکی از چهار حالت زیر را دارد:

	همواره بالای محور	بالای محور، مماس بر آن	همواره پایین محور	پایین محور، مماس بر آن
شرط	$a > ۰$ و $\Delta < ۰$	$a > ۰$ و $\Delta = ۰$	$a < ۰$ و $\Delta < ۰$	$a < ۰$ و $\Delta = ۰$

جمله‌ی **مربع کامل شدن عبارت درجه‌ی دوم**، یعنی در آن عبارت، Δ مساوی صفر شده ...!

تست: همه‌ی نقاط نمودار تابع $y = (m+۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲}x + \frac{۱}{۴}$ بالای محور x هاست. چند جواب طبیعی و یک‌رقمی برای m وجود دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ:

$$y = (m+۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲}x + \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\Delta\text{ رو حساب کن}} \Delta = (۲\sqrt{۲})^۲ - ۴(m+۱)(\frac{۱}{۴}) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = ۷ - m$$

$$\xrightarrow{\text{سهمی بالای محور }x\text{هاست}} \left\{\begin{array}{l} ۱)\ \Delta < ۰ \Rightarrow ۷ - m < ۰ \Rightarrow m > ۷ \\ ۲)\ a > ۰ \Rightarrow m + ۱ > ۰ \Rightarrow m > -۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} m > ۷ \xrightarrow{m\text{ طبیعی و یک‌رقمی}} m = ۸, ۹ \xrightarrow{\text{تعداد}} \text{دو تا}$$

تست: هرگاه نمودار تابع $y = (k-۲)x^۲ - ۳x + ۲ + k$ پایین محور xها و بر آن مماس باشد، در این‌صورت چند مقدار برای k وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ:

$$y = (k-۲)x^۲ - ۳x + (۲+k) \xrightarrow{\Delta\text{ رو حساب کن}} \Delta = (-۳)^۲ - ۴\underbrace{(k-۲)(k+۲)}_{k^۲-۴\text{ مزدوج}} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = -۴k^۲ + ۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{پایین محور }x\text{ها و مماس بر آن}} \left\{\begin{array}{l} ۱)\ \Delta = ۰ \Rightarrow -۴k^۲ + ۲۵ = ۰ \Rightarrow k^۲ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow k = \pm\frac{۵}{۲} \\ ۲)\ a < ۰ \Rightarrow k - ۲ < ۰ \Rightarrow k < ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} k = -\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} \text{یکی}$$

عبارت درجه‌ی دوم با علامتِ ثابت: یک تیر و دو نشان!

نتیجه‌ی بســـیار مهم و البته کنکوریِ جدول قبلی که درباره‌ی وضع ســـهمی و محور xها گفتیم، این است که اگر بگویند **عبارت درجه‌ی دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است**، خب انگار سهمیِ آن کاملاً بالا یا کاملاً پایینِ محور xها افتاده...!

این‌جوری هم ببین:

	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
شرط	$\Delta<0$ و $a>0$	$\Delta\leq 0$ و $a>0$	$\Delta<0$ و $a<0$	$\Delta\leq 0$ و $a<0$

تست: به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m-1)x^2+6x+5$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

۱) $m>1$ ۲) $1<m<\frac{14}{5}$ ۳) $m>\frac{14}{5}$ ۴) $m\geq\frac{14}{5}$

پاسخ:

$$(m-1)x^2+6x+5 \xrightarrow{\Delta\text{ رو حساب کن}} \Delta=(6)^2-4(m-1)(5) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta=56-20m$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت همواره مثبت}} \text{سهمی بالای محور xها} \begin{cases} ① \ \Delta<0 \Rightarrow 56-20m<0 \Rightarrow m>\frac{14}{5} \\ ② \ a>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m>\frac{14}{5}$$

ویژگی محور تقارن سهمی

۱) محور تقارن سهمی همیشه از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور yهاست.

این‌جوری هم ببین: طولِ رأسِ سهمی، همیشه با مقدار داده‌شده برای محور تقارن سهمی مساوی است: **ببین:** ۴ = طولِ رأس $\Rightarrow$ $\underbrace{\boxed{x=4}}_{\text{معادله‌ی محور تقارن}}$

۲) هر دو نقطه‌ای که روی ســـهمی بوده و عرضِ مســـاوی با هم داشته باشند، نسبت به محورِ تقارن سهمی قرینه‌اند. در این‌حالت برای پیدا کردن مقدار عددیِ محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرید، **ببین:**

$$\underbrace{\boxed{A(-3,4),B(5,4)}}_{\text{دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی}} \xrightarrow[\text{میانگین طول‌ها}]{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=\frac{-3+5}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x=1$$

تست: دو نقطه‌ی $(-3,\beta)$ و $(1,\beta)$ روی نمودار سهمی با کمترین مقدار ۱ قرار دارند. اگر سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، کدام نقطه روی این سهمی واقع است؟

۱) $(-3,14)$ ۲) $(-2,2)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-3,13)$

پاسخ:

$$\underbrace{\boxed{(1,\beta),(-3,\beta)}}^{\text{دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی}} \xrightarrow[\text{میانگین طول‌ها را بگیر}]{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=\frac{1+(-3)}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x=-1 \xrightarrow{\text{محور تقارن از رأس می‌گذرد}} x_{\text{رأس}}=-1 \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{کمترین مقدار}=1} S(-1,1)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}} y=a(x+1)^2+1 \xrightarrow[(0,3)]{\text{تلاقی با yها}} 3=a(0+1)^2+1 \Rightarrow a=2$$

$$\xrightarrow[\text{معادله‌ی سهمی}]{\text{جای‌گذاری کن}} y=2(x+1)^2+1 \xrightarrow[\text{گزینه‌ی «۳»}]{\text{امتحان گزینه‌ها}} 3=2(-2+1)^2+1 \Rightarrow 3=2+1 \checkmark$$

تابع چاق و لاغر

تکنیک معلم کنکور: تابعی را که ضابطه‌اش به‌صورت یک عبارتِ درجه‌ی اول، ضربدر یک عبارتِ درجه‌ی دوم باشد تابع چاق و لاغر می‌نامیم، **ببین:**

$$y=\underbrace{(2x-1)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(x^2+5x-4)}_{\text{چاق}}$$

۱) اگر تست بگوید: «**تابع چاق و لاغر، محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند**»، دلتای تابع درجه‌ی دوم را منفی کنید...

تست: نمودار تابع $y=(x+2)(x^2-2x+m)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $0<m<1$ ۲) $m>-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $m>1$

پاسخ:

$$y=(x+2)(x^2-2x+m) \xrightarrow{\Delta\text{ چاق رو حساب کن}} \Delta=(-2)^2-4(1)(m)=4-4m \xrightarrow[\Delta_{\text{چاق}}<0]{\text{تابع فقط یک ریشه دارد}} 4-4m<0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m>1$$

۲) اگر تست بگوید: «**تابع چاق و لاغر، بر محور xها مماس است**»، در این‌صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

الف) دلتای عبارتِ درجه‌ی دوم صفر بوده است.

ب) ریشه‌ی عبارتِ درجه‌ی اول (همون لاغره) باید ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم باشد.

تست: نمودار تابع $y=(\frac{1}{2}x-k)(x^2+2x-3)$ بر محور xها مماس است. در این‌صورت تفاضل مقادیر k کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: همان‌طور که می‌بینید در قسمت چاق، Δ نمی‌تواند صفر شود: $x^2+2x-3 \xrightarrow{\Delta \text{ چاق رو حساب کن}} \Delta = 2^2-4(1)(-3)=16$

پس می‌ماند یک راه! ریشه‌ی عبارتِ لاغر باید در تابع چاق صدق کند تا نمودار تابع بر محور xها مماس شود:

$$\frac{1}{3}x-k=0 \xrightarrow{\text{ریشه رو حساب کن}} \frac{1}{3}x=k \Rightarrow x=3k \xrightarrow[x^2+2x-3=0]{\text{بذار توی تابع درجه‌ی دوم}} (3k)^2+2(3k)-3=0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 9k^2+6k-3=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم با دومی برابر است}} k=-1 \,,\, k=\frac{3}{9} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (\frac{1}{3})-(-1)=\frac{4}{3}$$

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

قسمتی شیرین و کنکوری! بیشتر دانش‌آموزان کار با S و P را دوست دارند و چه چیزی بهتر از این‌که این بخش سهم خوبی در کنکور هم داشته باشد...

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم: S و P

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، با فرض $\Delta>0$ و وجود دو ریشه به نام‌های α و β، داریم:

	نماد	برحسب ریشه‌ها	برحسب ضریب‌ها
مجموع دو ریشه	S	$\alpha+\beta$	$-\frac{b}{a}$
حاصل‌ضرب دو ریشه	P	$\alpha\beta$	$\frac{c}{a}$

تست: عدد $\frac{5}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2-6x-4m-1=0$ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{35}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{35}{9}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$x=\frac{5}{3} \xrightarrow[\text{ریشه در معادله صدق می‌کند}]{\text{بذار توی معادله}} m(\frac{5}{3})^2-6(\frac{5}{3})-4m-1=0 \xrightarrow{\times 9} 25m-90-36m-9=0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} -11m-99=0 \Rightarrow m=-9 \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} -9x^2-6x+35=0 \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{35}{-9}$$

رابطه‌ای بین ریشه‌ها در تست حضور دارد...

هر تستی که در آن «**رابطه‌ای مشخص، بین دوتا ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو داده شده باشد**» حتماً با روش S و P حل می‌شود: برای این منظور بنویسید:

۱ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۲ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ۳ رابطه‌ای که تست بین دو ریشه داده است!

حالا با کمک سه رابطه‌ی بالا و جای‌گذاری، پارامترِ موجود در تست را پیدا کنید...

تست: در معادله‌ی $x^2-8x+m=0$ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ:

$$\underset{b=-8,c=m,a=1}{x^2-8x+m=0} \Rightarrow \begin{cases} ① \ \alpha+\beta=-(\frac{-8}{1})=8 \\ ② \ \alpha\beta=\frac{m}{1}=m \end{cases}$$

۳ یکی از ریشه‌ها از نصف دیگری ۵ واحد بیشتر است $\Rightarrow \alpha=\frac{\beta}{2}+5 \xrightarrow[\alpha+\beta=8]{\text{بذار توی ①}} (\frac{\beta}{2}+5)+\beta=8 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{\beta}{2}+\beta=3$

$$\xrightarrow{\times 2} \beta+2\beta=6 \Rightarrow 3\beta=6 \Rightarrow \beta=2 \xrightarrow[\alpha+\beta=8]{\text{بذار توی ①}} \alpha+2=8 \Rightarrow \alpha=6 \xrightarrow[\alpha\beta=m]{\text{بذار توی ②}} 6\times 2=m \Rightarrow m=12$$

کنترل Δ

در تستی که با S و P حل کرده‌اید و **برای پارامترِ موجود در سؤال، دو مقدار به‌دست آورده‌اید**، یادتان باشد برای هر کدام کنترل کنید که Δ مثبت می‌شود یا منفی؟! چنانچه به ازای پارامتری، $\Delta<0$ شود آن مقدارِ پارامتر، قابل قبول نیست!

این‌جوری هم ببین: خودِ S و P به‌تنهایی، لزوماً وجود ریشه را برای معادله‌ی درجه‌ی دوم تضمین نمی‌کنند، **حتماً چکِ Δ لازم است...**

این‌طوری بدانید که **کنترلِ Δ همیشه لازم است، مگر این‌که $\frac{c}{a}<0$ شود...**

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$ معکوس یکدیگرند؟

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ:

$$mx^2+3x+m^2=2 \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} mx^2+3x+(m^2-2)=0 \xrightarrow{\text{S و P رو تشکیل بده}} \begin{cases} (1)\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{m} \\ (2)\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m^2-2}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\alpha=\frac{1}{\beta}} \alpha\beta=1 \xrightarrow{\text{در (2) بذار}} 1=\frac{m^2-2}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} m^2-2=m \xrightarrow{\text{مرتب کن}} m^2-m-2=0$$

$$\xrightarrow[\text{جمع ضرایب اولی و سومی با وسطی برابر است}]{\text{حل کن}} m=-1,\ m=2 \xrightarrow{\text{در معادله جای‌گذاری کن}} \begin{cases} \xrightarrow{m=-1} -x^2+3x-1=0 \\ \xrightarrow{m=2} 2x^2+3x+2=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کنترل }\Delta} \begin{cases} \Delta=9-4(-1)(-1)=5 \ \text{ق ق} \\ \Delta=9-4(2)(2)=-7 \ \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow m=-1$$

$\alpha=k\beta$

اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی، k برابرِ ریشه‌ی دیگر است، غیر از روش کلی که در قسمت قبل گفتیم، می‌توانید سریع قرار دهید: $\boxed{\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}}$ و پارامتر را پیدا کنید.

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+mx+9=0$ یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی معادله، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ:

$$2x^2+mx+9=0 \xrightarrow[k=2]{\text{یک ریشه k برابر دیگری}} \frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{m^2}{2\times 9}=\frac{(2+1)^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2}{18}=\frac{9}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} m^2=81 \Rightarrow m=\pm 9 \Rightarrow \begin{cases} m=-9 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} 2x^2-9x+9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S=-\frac{b}{a}=-(\frac{-9}{2})=4/5 \\ m=9 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} 2x^2+9x+9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S=-\frac{b}{a}=-\frac{9}{2}=-4/5 \end{cases}$$

دومی در گزینه‌ها موجود نیست.

محاسبه‌ی رابطه‌های معروف بین ریشه‌ها برحسب S و P

در این مدل از تست‌ها، یک معادله‌ی درجه‌ی دو دارید که خب پارامتر هم ندارد و قرار است عبارتی را که برحسب ریشه‌ها داده شده است، حساب کنید. مثل مجموع مکعبات ریشه‌ها یا هر چیز دیگری! طبق جدول زیر موارد مهم را به خاطر بسپارید:

مدل اول) معروف‌ها:

	به فارسی	برحسب ریشه‌ها	حاصل عبارت خواسته‌شده برحسب S و P
۱	مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^2+\beta^2$	S^2-2P
۲	مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^3+\beta^3$	S^3-3SP
۳	قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها	$\lvert\alpha-\beta\rvert$	$\sqrt{S^2-4P}$ یا $\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$
۴	مجموع جذرهای ریشه‌های مثبت	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

اینم دلیلش: واسه اثبات حالت‌هایی شبیه به ۳ و ۴، عبارت را مساوی k گرفته و به توان ۲ برسانید و بعد حسابشون کنید، **ببین:**

$$(4)\ k=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P} \xrightarrow[k>0]{\text{جذر بگیر}} k=\sqrt{S+2\sqrt{P}} \xrightarrow[\alpha,\beta>0]{\text{نتیجه}} \boxed{\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert=\sqrt{S-2\sqrt{P}}}$$

تست: در معادله‌ی $x^2-8x+4=0$ ریشه‌ها را α و β نامیده‌ایم. حاصل تقسیم $\alpha^2+\beta^2$ به $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ چقدر است؟

۱) $\frac{56\sqrt{3}}{3}$ ۲) $28\sqrt{3}$ ۳) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ ۴) $56\sqrt{3}$

پاسخ:

$$x^2-8x+4=0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=\alpha+\beta=8 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=\alpha\beta=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=S^2-2P=8^2-2(4)=56 \\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{8+2\sqrt{4}}=\sqrt{8+4}=\sqrt{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{56}{\sqrt{12}}=\frac{56}{2\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویاکن}} \frac{56\times\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{28\sqrt{3}}{3}$$

در معادله‌ی $x^2+3x-1=0$ حاصل $\alpha^3+\beta^3$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۳۶ ۲) −۳۶ ۳) ۲۷ ۴) −۲۷

پاسخ:

$$x^2+3x-1=0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-3 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرمول}} \alpha^3+\beta^3=S^3-3SP=(-3)^3-3(-3)(-1)=-36$$

یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(m+3)x+3m=0$ از دیگری ۵ واحد بیشتر است. m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) −۸ ۴) ۶

پاسخ:

$$\alpha=5+\beta \Rightarrow \alpha-\beta=5 \xrightarrow{\text{رابطه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=5 \xrightarrow{\text{توان ۲ برسون}} \Delta=25a^2 \Rightarrow \underbrace{(m+3)^2-4(1)(3m)}_{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم } \Delta}=25(1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد رو ساده کن}} m^2-6m+9=25 \Rightarrow m^2-6m-16=0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m=8,-2$$

مدل دوم) غیرمعروف‌ها:

اگر حاصل عبارتی را که برحسب ریشه‌ها نوشته شده، خواستند و جزء جدول مدل اول نبود، ابتدا عبارت را با عملیات جبری مانند مخرج مشترک‌گیری، فاکتورگیری و اتحاد ساده می‌کنیم؛ با این هدف که در آن‌ها فقط $\alpha\beta$ و $\alpha+\beta$ یا عبارت‌های معروفی که در جدول گفتیم دیده شود، بعدش عبارت را برحسب S و P نوشته و حاصل آن را از روی معادله پیدا می‌کنیم...

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2-12x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ:

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \xrightarrow[\text{مخرج جذر P است}]{\text{صورت جزء جدول است}} \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

$$(2)\quad 4x^2-12x+1=0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-(\frac{-12}{4})=3 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=\frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (1)}} \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3+2(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

در معادله‌ی $2x^2+7x-20=0$ با ریشه‌های α و β، حاصل $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ کدام است؟

۱) −۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۳۵ ۴) −۴۵

پاسخ:

$$(1)\quad 2x^2+7x-20=0 \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{2},\ P=\frac{c}{a}=-\frac{20}{2}=-10$$

$$(2)\quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \xrightarrow{\text{از } \alpha\beta \text{ فاکتور بگیر}} \alpha\beta(\alpha+\beta) \xrightarrow{\text{برحسب S و P بنویس}} PS \xrightarrow{\text{طبق (1) جای‌گذاری کن}} (-10)(-\frac{7}{2})=35$$

مدل سوم) رابطه‌ی غیرمتقارن بین ریشه‌ها:

در این مدل، α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ هستند و رابطه‌ای غیرمتقارن بین α و β خواسته شده است. مثل $\alpha^4+5\beta=?$.
خب در این حالت کافی است بدانید α و β (هردو) در معادله صدق می‌کنند، یعنی باید اول کار (مثلاً) با گذاشتن α در معادله‌ی درجه‌ی دوم رابطه‌ای برای α به‌دست بیاورید تا آن را در عبارت خواسته شده بگذارید و بعد به رابطه‌های معروف برسید...

تست: α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-5=0$ هستند. حاصل $\alpha^2+2\beta$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ:

$$\text{ریشه‌ی معادله است } \alpha \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} \alpha^2-2\alpha-5=0 \Rightarrow \alpha^2=2\alpha+5 \xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{\alpha^2+2\beta=?} (2\alpha+5)+2\beta=?$$

$$\Rightarrow 2(\alpha+\beta)+5=? \Rightarrow 2S+5=? \xrightarrow{S=-\frac{b}{a}=2} 2S+5=2(2)+5=9$$

بحث درباره‌ی علامت ریشه‌ها فقط با کمکِ S و P

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی $\Delta > 0$ باشد و در واقع معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، می‌توانید بدون آن‌که معادله را حل کرده و ریشه‌هایش را پیدا کنید، فقط با کمک علامتِ S و P درباره‌ی علامتِ ریشه‌ها اظهار نظر کنید.

این‌جوری هم ببین: یادت باشه اگه علامت ریشه‌ها رو خواستن، به یاد علامت S و P بیفتی...

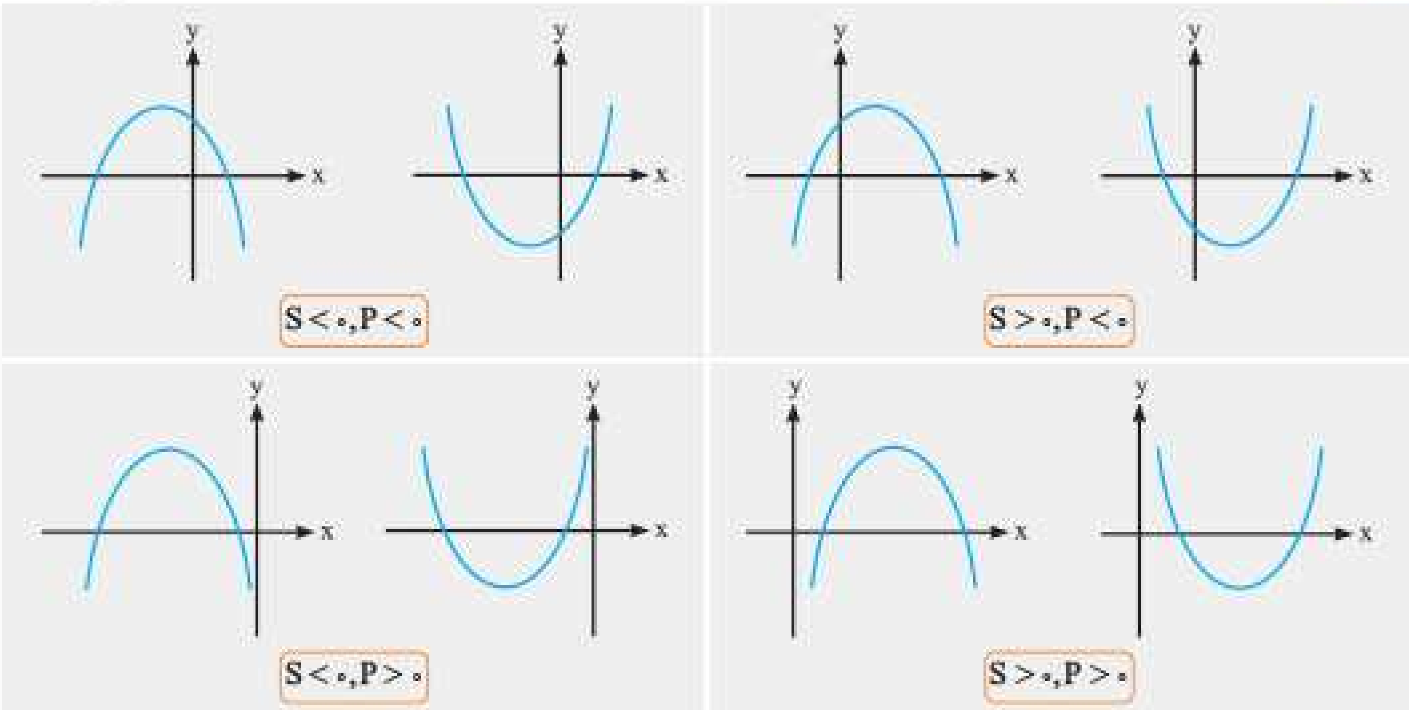
وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

$\Delta > 0$	$P > 0$	$P < 0$
$S > 0$	هر دو ریشه مثبت هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و ریشه‌ی مثبت از قدر مطلق ریشه‌ی منفی، بزرگ‌تر است: مثل ۴ و ۲−.
$S < 0$	هر دو ریشه منفی هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت، بزرگ‌تر است: مثل ۵− و ۲.

(۱) اگر $S = 0$ و $P \neq 0$ باشد، یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد: مثل ۳ و ۳−. در این‌حالت حتماً P منفی است.

(۲) اگر $P = 0$ باشد، یعنی معادله حتماً یک ریشه‌ی صفر دارد.

این‌جوری هم ببین: چهار حالتی را که در جدول قبل آوردیم، به‌صورت نموداری هم ببینید: برای $y = ax^2 + bx + c$ و با فرضِ $\Delta > 0$، داریم:



تست: کدام‌یک از معادله‌های زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟

۱) $x^2 - 4x - 2 = 0$ ۲) $x^2 - 2x + 4 = 0$ ۳) $x^2 + 8x + 1 = 0$ ۴) $x^2 - 4x + 2 = 0$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: $x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = -2 \Rightarrow$ علامت ریشه‌ها مختلف است. ✗

گزینه‌ی «۲»: $x^2 - 2x + 4 = 0 \xrightarrow{b^2-4ac} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ اصلاً ریشه ندارد. ✗

گزینه‌ی «۳»: $x^2 + 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = 1 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند $\xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = -8 \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند. ✗

اما در گزینه‌ی «۴»، $P = 2$ و $S = 4$ است که یعنی وجودِ دو ریشه‌ی مثبت؛ در ضمن Δ آن هم مثبت است...

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

برای تسلط به این بخش، پیشنهاد می‌کنیم حتماً ایستگاه ۳ را خوب خوانده باشید و تست‌های آن را زده باشید. چون می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دوم بنویسیم...

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با داشتنِ S و P آن

اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی را داشته باشید، که آن‌ها را به‌ترتیب S و P می‌نامیم، آن‌وقت معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر می‌شود: $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

این‌جوری هم ببین: اگر دوتا عدد حقیقی α و β را بخواهید به‌طوری که جمع آن‌ها مساوی عدد معلوم S و ضربشان هم P باشد، برای پیدا کردن این دو عدد باید معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر، $\sqrt{4-a}+2$ و $\sqrt{4-a}-2$ هستند؟

۱) $x^2+4x-a=0$ ۲) $x^2+ax+4=0$ ۳) $x^2-4x+a=0$ ۴) $x^2+ax-4=0$

پاسخ:

$$\alpha=2+\sqrt{4-a}\ ,\ \beta=2-\sqrt{4-a}\ \begin{cases}\xrightarrow{\text{جمع کن}} S=(2+\sqrt{4-a})+(2-\sqrt{4-a})=4\\ \xrightarrow{\text{ضرب کن}} P=(2+\sqrt{4-a})\times(2-\sqrt{4-a})\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}P=4-(4-a)=a\end{cases}$$

پس معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر برابر است با: $x^2-Sx+P=0\xrightarrow[P=a]{S=4}x^2-4x+a=0$

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با کمک معادله‌ای دیگر؛ دو معادله‌ی درجه‌ی دوم در یک تست!

در این مدل تست‌ها، دوتا معادله‌ی درجه‌ی دوم بهتون میدن! **ریشه‌های معادله‌ی اولی α و β فرض می‌شوند و ریشه‌های معادله‌ی دوم هم برحسب α و β داده می‌شوند:** خب شما S و P معادله‌ی اول را حساب می‌کنید، بعدش مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های دومی را تشکیل می‌دهید و S' و P' می‌نامید. حالا باید S' و P' را با ساده کردن و عملیات جبری برحسب S و P ساخته و حساب کنید، خب حالا S' و P' هم معلوم شده، دیگه برو واسه خودت!

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2+kx-1=0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\}$ است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ:

۱ $$2x^2-3x=1\xrightarrow{\text{مرتب کن}}2x^2-3x-1=0\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}}S=\frac{3}{2}=\boxed{\alpha+\beta}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}}P=-\frac{1}{2}=\boxed{\alpha\beta}\end{cases}$$

۲ $$8x^2+kx-1=0\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}}S'=-\frac{k}{8}=\boxed{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}}P'=-\frac{1}{8}=\boxed{(\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2)}\end{cases}$$

حالا ساده می‌کنیم:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}}\alpha\beta(\alpha+\beta)\xrightarrow{\text{برحسب S و P جای‌گذاری کن}}PS\xrightarrow{\text{طبق ۱}}(-\frac{1}{2})(\frac{3}{2})=-\frac{3}{4}\xrightarrow[-\frac{k}{8}=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2]{\text{طبق ۲}}-\frac{k}{8}=-\frac{3}{4}\xrightarrow{\times(-8)}k=6$$

گاهی تست، ریشه‌های معادله‌ی اولی را به زبان ریاضی برایتان α و β اعلام نمی‌کند! بلکه رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی دومی و معادله‌ی اول را به‌صورت فارسی به شما می‌دهد، باز هم مراحل شما فرقی با قبل ندارد. ریشه‌های اولی را α و β بگیرید و از روی جملات فارسی داده‌شده، ریشه‌های دومی را برحسب α و β بنویسید و بعد هم دقیقاً مثل قبل عمل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمترند؟ (کنکور ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

پاسخ:

۱ $$2x^2-3x-1=0\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}}S=\frac{3}{2}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}}P=-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{فرم ریشه‌های دومی رو بنویس}}\underbrace{\frac{1}{\alpha}-1,\frac{1}{\beta}-1}_{\text{از معکوس، یک واحد کمتر}}$$

۲ معادله‌ی دوم:
$$\begin{cases}S'=(\frac{1}{\alpha}-1)+(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2\Rightarrow S'=\frac{S}{P}-2\\ P'=(\frac{1}{\alpha}-1)\times(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{1}{P}-\frac{S}{P}+1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عددهای ۱ رو جای‌گذاری کن}}\begin{cases}S'=\frac{S}{P}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2=-5\\ P'=\frac{1}{P}-\frac{S}{P}+1=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}+1=-2+3+1=2\end{cases}\xrightarrow[x^2-S'x+P'=0]{\text{معادله‌ی دوم رو بنویس}}x^2+5x+2=0$$

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

در این بخش به سؤالاتی می‌پردازیم که شاید در ظاهر معادله‌ی درجه‌ی دوم نباشند! اما با تغییر متغیر یا تبدیل مَدلِ ریاضی آن، درجه‌ی دوم می‌شوند. تست‌های ماکزیمم و مینیمم کردن در این بخش، خیلی مهم هستند...

معادلاتی که با تغییر متغیر به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شوند

در بعضی معادله‌ها، که خب نه درجه‌ی اول هستند و نه درجه‌ی دوم، **عبارتی را می‌بینیم که یک بار با توان ۱ و یک بار هم با توان ۲ حضور دارد.** در این حالت کافی است اسم آن عبارت را متغیر جدیدی مثل t، درنظر بگیریم تا عبارت درجه‌ی دومی برحسب t دربیاید و بعد آن را حل کنیم. در آخر که مقدار t به‌دست آمد، آن را مساوی عبارت خودش گذاشته و دوباره معادله‌ی دیگری را حل می‌کنیم تا x به‌دست بیاید.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2

۳) 2 ۴) 4

پاسخ:

$$x^2+x=t \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} t^2-18t+72=0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (t-12)(t-6)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها رو پیدا کن}} t=12,t=6$$

$$\xrightarrow[\text{بذار } t]{\text{برابر مقدار اولیه‌ی}} \begin{cases} x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \\ x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل کن}} \begin{cases} (x+4)(x-3)=0 \\ (x-2)(x+3)=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{پیدا کن}]{\text{ریشه‌ها رو}} x=-4,3,2,-3 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{جمع}} -2$$

اگر در معادله‌ای، **یکی از جمله‌ها مجذور دیگری بود**، روش حلِ آن تغییر متغیر و استفاده از معادله‌ی درجه‌ی دو است: ببین:

الف) $x^6+3x^3-4=0 \xrightarrow{x^3=t} t^2+3t-4=0$

ب) $x-5\sqrt{x}+4=0 \xrightarrow[x,t\geq 0]{\sqrt{x}=t} t^2-5t+4=0$

تست: معادله‌ی $x^4-2\sqrt{3}x^2-6=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) دو

۳) چهار ۴) یک

پاسخ:

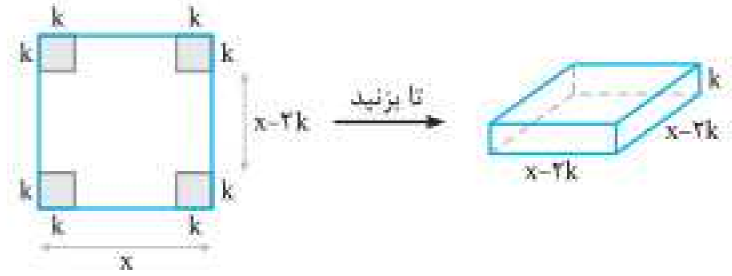
$$x^2=t \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} t^2-2\sqrt{3}t-6=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\Delta \text{ را پیدا کن}} \Delta=(-2\sqrt{3})^2-4(1)(-6)=36$$

$$\xrightarrow[\text{پیدا کن}]{\text{ریشه‌ها رو}} t=\frac{2\sqrt{3}\pm 6}{2}=\sqrt{3}+3 \text{ و } \sqrt{3}-3 \xrightarrow{x^2=t} \left.\begin{cases} x^2=3+\sqrt{3} \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} x=\pm\sqrt{3+\sqrt{3}} \\ x^2=\underbrace{\sqrt{3}-3}_{\text{منفی است}} \xrightarrow{x^2\geq 0} \text{امکان ندارد.} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{تعداد ریشه}} \text{۲ تا}$$

مسئله‌های کاربردی معروف از معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱) تعداد بازی‌ها	در یک دوره بازی که هر تیم با هر کدام از تیم‌های دیگر فقط یک بازی انجام می‌دهد، با فرض داشتنِ n تیم، تعداد بازی‌ها یک عبارتِ درجه‌ی دوم است.	$\text{تعداد بازی‌ها}=\frac{n(n-1)}{2}$
۲) ساختن قوطی	اگر چهار مربع کوچک به ضلع k را از گوشه‌های مربعی برش بزنیم و با تا زدن صفحه یک جعبه به حجم V بسازیم...	$\text{ضلع مربع اصلی}=\sqrt{\frac{V}{k}}+2k$
۳) حصارکشی	با یک رشته سیم به طول ℓ، می‌خواهیم مستطیلی به مساحت S بسازیم...	$\text{یکی از اضلاع مستطیل}=\frac{\ell+\sqrt{\ell^2-16S}}{4}$

اینم شکل قوطی:



تست: می‌خواهیم با بریدن چهار مربع به ضلع ۳ در گوشه‌های یک صفحه‌ی مربعی‌شکل و بعد تا کردنِ آن، یک ظرف به حجم ۷۵ بسازیم. ضلع مربع را باید چند در نظر بگیریم؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ:

$$x=\sqrt{\frac{V}{k}}+۲k\xrightarrow{V=۷۵,\,k=۳}x=\sqrt{\frac{۷۵}{۳}}+۲(۳)=\sqrt{۲۵}+۶=۵+۶=۱۱$$

با یک طناب ۱۵ متری می‌خواهیم دورتادور مستطیلی به مساحت ۹ را کاملاً بپوشانیم. ضلع کوچک‌تر مستطیل کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ:

$$a=\frac{\ell+\sqrt{\ell^۲-۱۶S}}{۴}\xrightarrow{\ell=۱۵,\,S=۹}a=\frac{۱۵+\sqrt{۲۲۵-۱۴۴}}{۴}=\frac{۱۵+\sqrt{۸۱}}{۴}=\frac{۱۵+۹}{۴}=۶$$

$$\xrightarrow[S=ab=۹]{\text{ضلع دیگر مستطیل رو پیدا کن}}۶\times b=۹\Rightarrow b=\frac{۹}{۶}\xrightarrow{\text{ساده‌کن}}b=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

حل مسائل ماکزیمم و مینیمم به کمک معادله‌ی درجه‌ی دوم

غیر از چند مسئله‌ی معروفی که در کتاب درسی اشاره شده و در بالا به آن‌ها پرداختیم، می‌خواهیم به یک مُدل از تست‌ها توجه کنیم که دسته‌ی متنوعی را هم شامل می‌شوند: فرم این تست‌ها این‌طوری است که **در ظاهر خبری از عبارت درجه‌ی دوم، ریشه و... نیست! صورتِ تست یک مسئله‌ی ریاضی است** که با یک سری توضیحات، **در نهایت خواسته که یک چیزی ماکزیمم یا مینیمم شود.** شاخصه‌ی اصلی تست‌هایی که چنین فُرمی دارند و با کمکِ تابع درجه‌ی دوم حل می‌شوند، این است که **دو تا متغیر در تست حضور دارد.** (معمولاً مثبت‌اند، چون در سؤالات کاربردی و عملی حضور داریم...!)

اما روش برخوردِ ما با این تست‌ها این‌طوری است:

۱) **از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را برحسب دیگری پیدا می‌کنیم؛** مثلاً m را برحسب n. **ببین:** $m+۲n=۴\Rightarrow m=۴-۲n$

۲) حالا عبارتی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود می‌نویسیم و بعد **متغیری را که در مرحله‌ی قبل بر حسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.**

۳) **خب الان عبارتی که در مرحله‌ی ۲ پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه‌ی دوم است برحسب یک متغیر.** جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکزیمم شود، به تابع درجه‌ی دومی با a منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیمم شود، حتماً در تابعِ درجه‌ی دومِ حاصل، a مثبت درمی‌آید: منظورمان از a، ضریبِ $x^۲$ است...!

می‌دانید برای آن‌که عبارتِ $ax^۲+bx+c$ به ماکزیمم یا مینیمم خود برسد **باید x مساویِ $-\frac{b}{۲a}$ شود** و مقدارِ ماکزیمم یا مینیمم هم، $-\frac{\Delta}{۴a}$ است.

تست: برای دو عدد مثبت x و y می‌دانیم: $۳x+۲y=۲۴$. اگر xy بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار $y-x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

$$۳x+۲y=۲۴\xrightarrow{\text{y را پیدا کن}}y=\frac{۲۴-۳x}{۲}\xrightarrow{\text{در رابطه بذار}}xy=x\left(\frac{۲۴-۳x}{۲}\right)\xrightarrow{\text{کسر را تفکیک کن}}x\left(۱۲-\frac{۳}{۲}x\right)$$

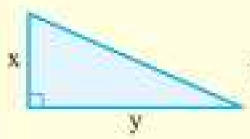
$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}}۱۲x-\frac{۳}{۲}x^۲\xrightarrow{\text{مرتب کن}}-\frac{۳}{۲}x^۲+۱۲x\xrightarrow{\text{ماکزیمم شود}}x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{۲(-\frac{۳}{۲})}=-\frac{۱۲}{-۳}=۴$$

$$\xrightarrow{y=\frac{۲۴-۳x}{۲}}y=\frac{۲۴-۳(۴)}{۲}=\frac{۲۴-۱۲}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶\Rightarrow y-x=۶-۴=۲$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه‌ی آن ۱۶ است، بیشترین مقدار خود را دارد. این مساحت چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ:



$$x+y=۱۶\xrightarrow{\text{y را برحسب x بنویس}}y=۱۶-x\xrightarrow{S=\frac{۱}{۲}xy}S=\frac{۱}{۲}x(۱۶-x)\xrightarrow{\text{ضرب کن}}۸x-\frac{۱}{۲}x^۲\xrightarrow{\text{مرتب کن}}S=-\frac{۱}{۲}x^۲+۸x$$

$$\xrightarrow{\text{S ماکزیمم شود}}\text{بیشترین مقدار S}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۸^۲-۴(-\frac{۱}{۲})(۰)}{۴(-\frac{۱}{۲})}=-\frac{۶۴}{(-۲)}=۳۲$$

فصل در یک نگاه

حلِ معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$

- **تجزیه:** وقتی ضریبِ x^2، مساوی ۱ بوده و ریشه‌ها صحیح باشند: $x^2+mx+n=0 \Rightarrow (x+\square)(x+\square)=0$
  - جمعشان m
  - ضربشان n
- **مربع کامل:**
  - عددی که می‌توانیم اضافه کنیم: $\boxed{\frac{b^2}{4a^2}}$
  - عددی که در سمت راست از آن جذر می‌گیریم: $\boxed{\frac{\Delta}{4a^2}}$
- **روش Δ:** $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$
  - **ریشه‌ها**
    - $\Delta>0$: $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$
    - $\Delta=0$: $\boxed{x=\frac{-b}{2a}}$
  - **تعداد ریشه‌ها**
    - $\Delta>0$: دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.
    - $\Delta=0$: یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
    - $\Delta<0$: ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- **حالت‌های خاص**
  - **جمع ضرایب، مساوی صفر بشود** $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+b+c=0 \rightarrow 1 \text{ و } \frac{c}{a}}$
  - **ضریب x^2 + عدد ثابت = ضریب x** $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+c=b \rightarrow -1 \text{ و } -\frac{c}{a}}$
  - **عدد ثابت ندارد؛ فاکتور بگیر:** $ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0$ $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{0 \text{ و } -\frac{b}{a}}$

سهمی $y=ax^2+bx+c$

- **مختصاتِ رأس:** $x=-\frac{b}{2a}$ و $y=-\frac{\Delta}{4a}$ یا به عبارتی $\boxed{S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})}$
- **تلاقی با محور x ها**
  - $\Delta>0$ ← در دو نقطه محور را قطع می‌کند.
  - $\Delta=0$ (یک نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← مماس است و بالای محور
    - $a<0$ ← مماس است و پایین محور
  - $\Delta<0$ (فاقد نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← قطع نمی‌کند: همواره بالای محور
    - $a<0$ ← قطع نمی‌کند: همواره پایین محور
- **علامتِ a**
  - $a>0$ ← دهانه‌ی سهمی رو به بالا است: مینیمم دارد.
  - $a<0$ ← دهانه‌ی سهمی رو به پایین است: ماکزیمم دارد.
- **محور تقارن: معادله:** $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$ $\xrightarrow{\text{ویژگی محور تقارن}}$ خط عمودی است و از رأس سهمی می‌گذرد؛ هر سهمی فقط یک محور تقارن دارد!
- **مماس برخطِ $y=mx+h$:** قرار دهید: $ax^2+bx+c=mx+h$ و معادله‌ی حاصل را ساده کرده و Δی آن را برابر صفر بگذارید.
- **تلاقی با محور y ها:** مختصات نقطه‌ی تلاقی: $(0,c)$
- **نوشتن معادله‌ی سهمی**
  - رأس سهمی نقطه‌ی $S(h,k)$ داده شده است $\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}}$ $\boxed{y=a(x-h)^2+k}$
  - صفرهای سهمی x_1 و x_2 داده شده‌اند $\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}}$ $\boxed{y=a(x-x_1)(x-x_2)}$

روابط بین ریشه‌ها

- **S و P**
  - **مقدار و مفهوم**
    - $\boxed{S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}}$
    - $\boxed{P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}}$ ← اگر منفی باشد ← حتماً معادله، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.
  - **فهمیدن علامت ریشه‌ها**
    - $P>0$ ← دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد
      - $S>0$ ← ریشه‌ها مثبت‌اند.
      - $S<0$ ← ریشه‌ها منفی‌اند.
    - $P<0$ ← حتماً دو ریشه‌ی غیرهم‌علامت دارد.
  - **نوشتن معادله با داشتن S و P:** $x^2-Sx+P=0$
- **قرار است رابطه‌ای بین ریشه‌ها پیدا کنی**
  - **رابطه‌های معروف**
    - $\boxed{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P}$
    - $\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$
    - $|\alpha-\beta|=\sqrt{S^2-4P}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
    - $\boxed{|\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}|=\sqrt{S\pm 2\sqrt{P}}}$ با شرط $\alpha,\beta>0$
  - **رابطه‌های غیرمعروف:** عبارت داده‌شده را با مخرج مشترک‌گیری و... ساده کن تا به عبارت‌های معروف برسد...
- **رابطه‌ای بین ریشه‌ها داده شده است**
  - **حالت کلی:** S و P را بر حسبِ α و β بنویس و مقدارشون رو هم پیدا کن، بعد هم رابطه‌ی داده‌شده رو برحسب α و β بنویس، حالا همه‌ی این‌ها رو با هم دستگاه کن...
  - **حالت خاص:** یکی از ریشه‌ها k برابر دیگری است ← $\boxed{\dfrac{b^2}{ac}=\dfrac{(k+1)^2}{k}}$
- **اخطار جدی** ← در همه‌ی تســت‌های S و P، بعد از پیدا کردن جواب، یادتان باشـــد Δ را کنترل کنید! اگر به ازای پارامتری، $\Delta<0$ شود یعنی ریشه نداشته‌اید و مقادیر به‌دست آمده برای S و P غلط است!

معادله‌های ساده

- **درجه‌ی اول: فرم کلی:** $ax+b=0$ ، $a\neq 0$ ← جواب معادله ← $x=-\dfrac{b}{a}$
- **$x^2=k$**
  - $k>0$ ← دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{k}}$ ؛ **ببین:** $x^2=4$، نتیجه می‌دهد $x=\pm 2$.
  - $k=0$ ← یک ریشه‌ی مضاعفِ صفر دارد.
  - $k<0$ ← ریشه ندارد: **ببین:** $x^2=-3$
  - **حالت کلی‌تر** ← اگر $\boxed{u^2=k}$ و u عبارتی برحسبِ x باشد، نتیجه بگیرید $|u|=\sqrt{k}$ و بعد هم $\boxed{u=\pm\sqrt{k}}$. $(k>0)$
- **جمعِ چندجمله‌ی غیر منفی، مساوی صفر شده است** ← هر کدام را تک‌تک، مساوی صفر بذار.
  چندجمله‌ای به توان زوج و رادیکال فرجه‌ی زوج و قدرمطلق، عبارت‌های غیرمنفی هستند: $|\ \ |$ ، $\sqrt[\text{زوج}]{\ \ }$ ، $(\ \ )^{\text{زوج}}$
- **که با تغییر متغیر حل می‌شوند**
  - **حالت کلی:** یک عبارت و مجذور آن در معادله دیده می‌شود ← آن عبارت را u بگیر.
  - **حالت‌های خاص**
    - $\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$ ← $\boxed{x^n=u}$ بگیر ← $au^2+bu+c=0$
    - $\boxed{ax+b\sqrt{x}+c=0}$ ← $\boxed{\sqrt{x}=u}$ بگیر ← $au^2+bu+c=0$

فالِ متولد خرداد

ریاضی را دوست داری ولی همیشه برای انجام آن بهانه‌تراشی می‌کنی...

برای دوران مرور و جمع‌بندی، فقط تست‌های با شماره‌ی صورتی...

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ایستگاه ۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

آموزش ٪45+

۴۵۱. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(3t-2)^2=4$ چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۴۵۲. ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x=0$ چند واحد با یکدیگر اختلاف دارند؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{6}{7}$ ۴) $\frac{7}{6}$

۴۵۳. اگر عدد p ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2+3x-1=0$ باشد، مقدار $2p^2+3p+4$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۵۴. کدام عبارت قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه‌ی اول نیست؟ (کتاب درسی)

۱) $x^2-3x-10$ ۲) $4x^2-10x+8$ ۳) $x^2-11x+10$ ۴) $4x^2+3x-1$

۴۵۵. برای حل معادله‌ی $x^2+2x=24$ به روش مربع کامل، چه عددی به طرفین معادله اضافه کنیم تا سمت چپ معادله، مربع کامل شود؟ (کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۱

۴۵۶. ریشه‌های معادله‌ی $\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}-\frac{3}{2}=0$ کدام‌اند؟ (کتاب درسی)

۱) ۳ و $\frac{-3}{2}$ ۲) -3 و $\frac{-3}{2}$ ۳) -3 و $\frac{3}{2}$ ۴) ۳ و $\frac{3}{2}$

۴۵۷. در معادله‌ی $(3m+1)x^2-5x+2-5m=0$ یکی از ریشه‌ها -1 است. حاصل جمع ریشه‌ی دیگر معادله با m کدام است؟

۱) $\frac{18}{13}$ ۲) $\frac{17}{13}$ ۳) $\frac{70}{13}$ ۴) $\frac{71}{13}$

۴۵۸. معادله‌ی $x(2x-5)=a$ دو ریشه‌ی مساوی دارد. این ریشه کدام است؟

۱) $\frac{-5}{2}$ ۲) $\frac{-5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۵۹. اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن برادر بزرگ‌تر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۴۶۰. مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی، ۲۹۰ است. حاصل‌ضرب این دو عدد چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۹۵ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۳ ۴) ۲۵۵

۴۶۱. معادله‌ی درجه‌ی دوم $mx^2+mx+1=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. حدود m کدام است؟

۱) $m<0$ ۲) $0<m<4$ ۳) $m>0$ ۴) $m<4$

۴۶۲. معادله‌ی $ax^2+x+3=0$:

۱) به ازای $a=\frac{1}{8}$، ریشه‌ی مضاعف دارد.

۲) به ازای $a=\frac{1}{12}$، دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد.

۳) به ازای $a=\frac{1}{6}$، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۴) به ازای هر عدد منفی a، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تثبیت ٪70+

۴۶۳. اگر $x=\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2+\alpha+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۴۶۴. معادله‌ی $b^2+\sqrt{2}b-4=0$ را به روش تجزیه به‌صورت $(b-r)(b+s)=0$ تبدیل کرده و حل کرده‌ایم. مقدار $\frac{r}{s}$ کدام است؟ $(r, s>0)$ (کتاب درسی)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۶۵. برای حل معادله‌ی $S^2-3S-3=0$ به روش مربع کامل به جایی می‌رسیم که باید از عددی جذر بگیریم. آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{21}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{19}{4}$ ۴) $\frac{23}{4}$

۴۶۶. معادله‌های $x^{۲}+۶x+m=۰$ و $x^{۲}+۲x-۳m=۰$ یک ریشه‌ی مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۴۶۷. کوچک‌ترین عدد صحیح m که به ازای آن معادله‌ی $x^{۲}-۳x-m+۹=۰$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۶۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادله‌ی $y=(۱-m)x^{۲}+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور x ها است؟ (خارج ۹۸)

۱) $۱<m<۵$ ۲) $۲<m<۵$ ۳) $۲<m<۴$ ۴) $۲<m<۶$

تسلط +85 %

۴۶۹. کدام عبارت به ازای مقادیر مختلف m، همواره قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه‌ی اول است؟

۱) $x^{۲}-mx+۱+m^{۲}$ ۲) $(m^{۲}+۲)x^{۲}-x+۳$ ۳) $-۲x^{۲}+۳x+m^{۲}+۲$ ۴) $(m+۱)x^{۲}-۳x+m$

۴۷۰. اگر $x^{۲}-(۱+\sqrt{۳})x+\sqrt{۳}=۰$ باشد، حاصل $|\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}|+\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $۲\sqrt[۴]{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt[۴]{۳}$

۴۷۱. فشار خون نرمال مردان برحسب میلی‌متر جیوه (mmHg) با رابطه‌ی $P=۰/۰۰۶s^{۲}-۰/۰۲s+۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی که فشار خون آن ۱۲۴ میلی‌متر جیوه باشد، کدام است؟ ($\sqrt{۲۴۱}\simeq ۱۵/۵$) (کتاب درسی)

۱) ۲۶ ۲) ۲۶/۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۲۷

۴۷۲. برای حل معادله‌ی $x^{۲}+۳x-۲=۰$ به روش مربع کامل کردن، آن را به شکل $(x+a)^{۲}=b+۲$ نوشته‌ایم. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴/۷۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۳/۷۵

۴۷۳. معادله‌ی $ax^{۲}-۳x+a+۴=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(-\frac{۹}{۲},\frac{۱}{۲})-\{۰\}$ ۲) $(-۲,\frac{۱}{۲})-\{۰\}$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},۲)-\{۰\}$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۹}{۲})-\{۰\}$

۴۷۴. سعید از معلم ریاضی خود سنش را پرسید. معلم پاسخ داد: «سن من ۴ سال بعد، مربع سنی می‌شود که ۲۶ سال قبل داشتم». سن معلم ریاضی سعید کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۴۷۵. عدد ۱۵ را به‌صورت مجموع دو عدد دیگر می‌نویسیم. اگر حاصل‌ضرب دو عدد به‌دست‌آمده ۵۲/۲۵ باشد، اختلاف دو عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

آموزش +45 %

۴۷۶. مختصات رأس سهمی به معادله‌ی $y=\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x}{۴}+۱$ کدام است؟

۱) $(\frac{-۱}{۴},\frac{۳۱}{۱۶})$ ۲) $(\frac{۱}{۴},\frac{۳۱}{۳۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۴},\frac{-۳۱}{۱۶})$ ۴) $(\frac{-۱}{۴},\frac{-۳۱}{۱۶})$

۴۷۷. اگر خط به معادله‌ی $x=-۱$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y=۱-۲mx+۳x^{۲}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۲

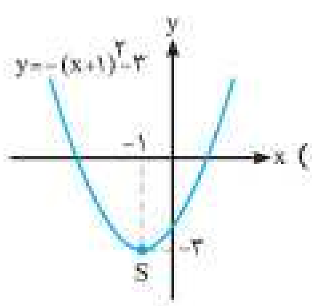
۴۷۸. طول رأس سهمی به معادله‌ی $y=(m-۲)x^{۲}-(۴m-۲)x+۳۰$ برابر ۳ است. درباره‌ی این سهمی کدام گزینه درست است؟

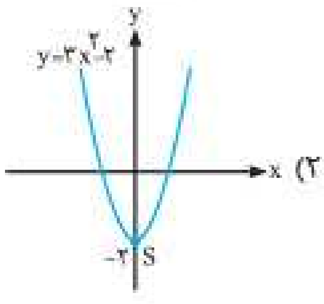
۱) محور x ها را قطع نمی‌کند.
۲) شکل سهمی رو به پایین است.
۳) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است.
۴) سهمی از نقطه‌ی (۲،۵) می‌گذرد.

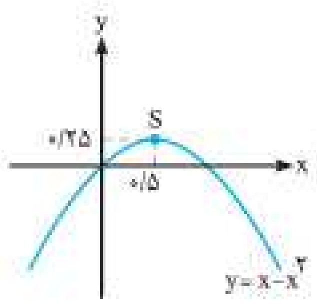
۴۷۹. رأس سهمی $y=kx^{۲}-۴x-۶$ روی خط $y=-۴x-۴$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

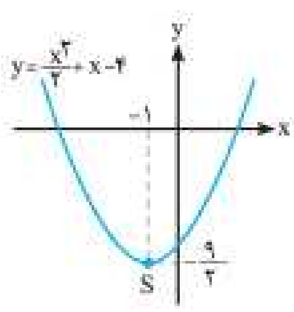
۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۸

۴۸۰. معادله‌ی کدام سهمی به‌درستی کنار آن نوشته نشده است؟ (کتاب درسی)

۱)


۲)


۳)


۴)


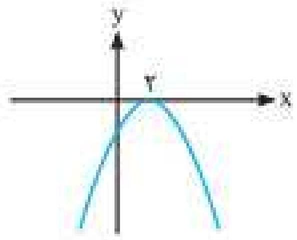
۴۸۱. سهمی به معادله‌ی $y=۲x^{۲}-۸x+۱$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

۴۸۲. به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور طول‌ها و مماس بر آن است؟

۱) -3 ۲) $\frac{-5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3

۴۸۳. اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+8x+c$ به‌صورت روبه‌رو باشد، مقدار c کدام است؟



۱) -2
۲) -8
۳) -4
۴) -6

۴۸۴. به ازای کدام مقدار a، بیشترین مقدار تابع $f(x)=ax^2+20x-120$ برابر با ۱۸۰ است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۸۵. کمترین مقدار تابع $y=mx^2-12x+5m-1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟ (کنکور تیر ۱۴۰۱)

۱) $x=2$ ۲) $x=2/5$ ۳) $x=3$ ۴) $x=3/5$

۴۸۶. به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=x^2+3x+k$ همواره مثبت است؟

۱) $k>\frac{9}{4}$ ۲) $k<\frac{9}{4}$ ۳) $k>\frac{-9}{4}$ ۴) $k<\frac{-9}{4}$

۴۸۷. سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $-3x^2+x\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ به ازای مقادیر مختلف x:

۱) گاهی مثبت و گاهی منفی است. ۲) گاهی منفی و گاهی صفر است.
۳) همواره منفی است. ۴) همواره مثبت است.

۴۸۸. نمودار تابع $y=(x-1)(x^2-ax+a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,4)$ ۴) $(4,+\infty)$

تثبیت ٪70+

۴۸۹. اگر $(-2,5)$ و $(0,5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله‌ی خط تقارن این سهمی کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $x=-2$ ۲) $x=-1$ ۳) $x=2$ ۴) $x=1$

۴۹۰. نقطه‌ی $S(-1,-4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y=2x^2+ax+b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -3 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

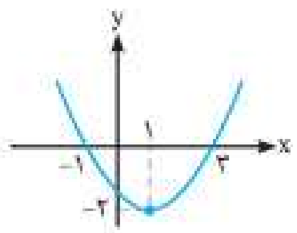
۴۹۱. رأس سهمی $y=-ax^2+ax+2$ روی سهمی $y=2bx^2-bx-1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b-a$ چقدر است؟ (خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) -6 ۲) 6 ۳) -18 ۴) 18

۴۹۲. خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{5}$، محور تقارن تابع $f(x)=x^2-4x+c$ را روی نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار c کدام است؟ (کتاب درسی)

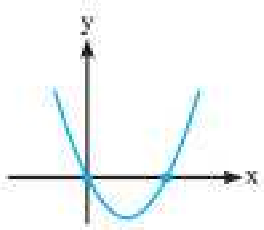
۱) $4/4$ ۲) $9/2$ ۳) $4/6$ ۴) $4/5$

۴۹۳. معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=x^2-x-3$ ۲) $y=2x^2+x-1$
۳) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ ۴) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

۴۹۴. مقدار a کدام باشد تا نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+(2a-5)x+a^2-2$ مطابق شکل مقابل باشد؟



۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۹۵. به ازای چند مقدار a، سهمی $y=ax^2+(3+2a)x$ از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (کنکور تیر ۱۴۰۱)

۱) هیچ مقدار a ۲) تمام مقادیر a ۳) ۱ ۴) ۲

۴۹۶. سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاطی به طول ۱− و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) $(-2,-3)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(\frac{1}{2},3)$ ۴) $(1,2)$

۴۹۷. فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$، بر سهمی $y=ax^۲+bx+c$ واقع باشند. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (کنکور ۹۹)

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۲,۱۵)$

۴۹۸. اگر کمترین مقدار تابع $f(x)=x^۲-(x-۱)^۲+(x+۲)^۲+m$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۹۹. به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x-a$، همواره بالای محور x هاست؟ (خارج ۹۶)

۱) $a<۱$ ۲) $a<-۲$ ۳) $a>۳$ ۴) $-۲<a<۱$

۵۰۰. در سهمی به معادله‌ی $y=(x+۲)^۲+(x-۴)^۲-۱۸$:

۱) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور x ها قرار دارد.
۲) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور y ها قرار دارد.
۳) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت منفی محور x ها قرار دارد.
۴) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور x ها قرار دارد.

۵۰۱. اگر نمودار تابع $y=mx^۲+(m+۴)x+(۲-m)$ دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، در این‌صورت چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۵۰۲. در تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ دو شرط $\frac{b^۲}{۴}<ac$ و $b+\frac{c}{۳}<-۳a$ برقرار است. کدام گزینه قطعاً درست است؟

۱) $a>۰$ ۲) $c>۰$ ۳) $ac>۰$ ۴) $ab<۰$

۵۰۳. اگر خط به معادله‌ی $x=\frac{۲}{۳}$ سهمی به معادله‌ی $y=(m-۲)x^۲-۳x+m^۲+۱$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ تسلط ٪85

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲۸۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۰۵}{۱۶}$

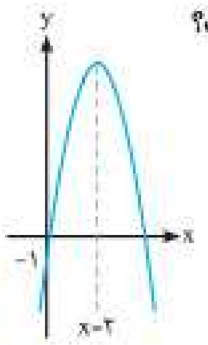
۵۰۴. رأس سهمی به معادله‌ی $y=-۲x^۲+bx-۳$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع است. مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶− ۳) ۴ و ۶− ۴) ۴− یا ۶

۵۰۵. نمودار تابع $y=۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}$ در ناحیه‌ی دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟ (خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $-\frac{۷}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۵۰۶. سهمی به معادله‌ی $y=-۲(x+۳m-۵)^۲+m+۲n$ مطابق شکل مقابل است. رأس سهمی به معادله‌ی $y=mx^۲+nx+۱$ کدام نقطه است؟



۱) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۴})$ ۲) $(\frac{۳}{۲},\frac{-۵}{۴})$
۳) $(\frac{-۳}{۲},\frac{۵}{۴})$ ۴) $(\frac{-۳}{۲},\frac{-۵}{۴})$

۵۰۷. سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطه‌ی $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ ۱− را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصله‌ی رأس سهمی از نقطه‌ی M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۰۸. محور تقارن سهمی‌های $y=x^۲+ax-۲$ و $y=-x^۲-۲x+b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y=۱$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

۱) ۸− ۲) ۴− ۳) ۸ ۴) ۴

۵۰۹. سهمی به معادله‌ی $y=x^۲-(۲m^۲+۱)x+m^۴+m^۲+\frac{۱}{۴}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

۱) محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند. ۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد.
۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود. ۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

۵۱۰. فرض کنید $A(-۱,۹)$ رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ گذرا بر نقطه‌ی $(۳,۱)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (خارج ۹۹)

۱) $(۵,-۷)$ ۲) $(۵,-۹)$ ۳) $(۲,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

۵۱۱. رأس سهمی به معادله‌ی $y=-3x^2+(2m-1)x+5$ روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی $y-2=0$، سهمی را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) قطع نمی‌کند.

۵۱۲. با توجه به ضابطه‌ی سهمی $y=2x^2-mx+m-2$، به ازای کدام مقدار مثبت m، مساحت مثلثی که دو رأس آن صفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی است، برابر ۲ است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۵۱۳. اگر مجموعه‌ی نقاط سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-x+\frac{2}{3}$ دارای عرضی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۵۱۴. سهمی به معادله‌ی $y=(2x+1)(x+8)$ با خط به معادله‌ی $y=mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

۱) $(5,13)$ ۲) $(15,23)$ ۳) $(7,15)$ ۴) $(9,25)$

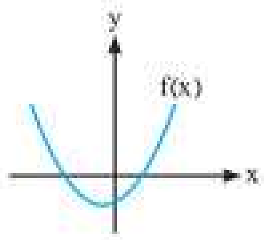
۵۱۵. به ازای چه مقادیری از a، سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-(a+2)x$ هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) $a\le 2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\le -2$ ۴) $-2\le a<0$

۵۱۶. اگر رأس نمودار تابع $f(x)=x^2+2x-c$ نقطه‌ی $(-1,3)$ باشد، مختصات رأس نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کدام است؟

۱) $(4,-5)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(0,5)$ ۴) $(0,3)$

۵۱۷. اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با نمودار مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $abc>0$ ۲) $\alpha^3+\beta^3<0$

۳) $\frac{b^2}{4}<ac$ ۴) $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\Delta}{4a}$

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

۵۱۸. هرگاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-9x-1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$ کدام است؟ (آموزشی +45٪)

۱) ۹ ۲) -9 ۳) $4/5$ ۴) $-4/5$

۵۱۹. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-4x-2=0$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{9}$ ۲) $\frac{29}{9}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{28}{9}$

۵۲۰. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(3m-1)x^2-2x+1=m^2$ برابر با $\frac{1}{4}$ است. حاصل‌ضرب دو ریشه کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۵۲۱. به ازای کدام مقدار m حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+m=0$ مساوی ۴ است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار m

۵۲۲. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $|x'-x''|$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) ۳

۵۲۳. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $-3x^2+(m+1)x+m=0$ برابر با $\alpha=1$ است. ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{-1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵۲۴. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(2x+1)(3x^2-7x+1)=0$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۵۲۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2(a+1)x+2a-1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار a، به‌ترتیب سه عدد a، α و β تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟ (خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۵۲۶. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ می‌باشد؟ (کنکور ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۲۷. معادله‌ی $x^2-x-2=0$ دو ریشه‌ی α و β دارد و $\alpha<\beta$ است. حاصل عبارت $5\alpha^2+7\beta^2$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۳ ۳) ۲۱ ۴) ۱۵

۵۲۸. اگر در معادله‌ی $2x^2-8x+m=0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۵۲۹. در معادله‌ی $x^2-20x+64=0$، حاصل $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{6}$

۵۳۰. مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)=0$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+1$

۵۳۱. برای کدام مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a-1)x^2+2ax+3-a=0$ معکوس یکدیگرند؟

۱) $a=2$ ۲) $a=\frac{1}{2}$ ۳) $a=-1$ ۴) هیچ مقدار a

۵۳۲. برای کدام مقادیر k در معادله‌ی $kx^2-4x+k+2=0$ یکی از ریشه‌ها ۳ برابر ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) -1 و -3 ۳) ۱ و -3 ۴) -1 و ۳

۵۳۳. معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m، کدام است؟ (خارج ۹۹)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

تثبیت 70^+ ٪

۵۳۴. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $3ax^2+bx-a=0$ مساوی $\frac{2}{3}$ است. ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{-2}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۳۵. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+3x-1=0$ با ریشه‌های α و β حاصل $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) -27 ۴) ۲۷

۵۳۶. بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی $x^2+2x+2c-1=0$ رابطه‌ی $\alpha^2+3\beta^2+4\alpha\beta+4=0$ برقرار است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-3/5$ ۲) -7 ۳) -4 ۴) -8

۵۳۷. جذر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+2=0$ را با هم جمع کرده‌ایم. حاصل در کدام گزینه آمده است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $2+2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

۵۳۸. اگر بین ضرایب معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $4a+2b+c=0$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $\frac{a}{2c}$ ۲) $\frac{c}{2a}$ ۳) $-\frac{a}{2c}$ ۴) $-\frac{c}{2a}$

۵۳۹. معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (کنکور ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

۵۴۰. در معادله‌ی $x^2-5x+m^2+5m=0$ اگر $\alpha=2$ یک ریشه‌ی آن باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^3+\beta^3$ چقدر است؟ (β ریشه‌ی دیگر معادله است.)

۱) ۳۵ ۲) ۱۹
۳) -19 ۴) به مقدار m بستگی دارد.

۵۴۱. به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-6x+5+m=0$ مجذور ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲ ۳) -32 ۴) -3

۵۴۲. به ازای دو مقدار a، یک ریشه‌ی معادله‌ی $3x^2-ax+4=0$، سه برابر ریشه‌ی دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟ (کنکور تیر ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۵۴۳. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $(\sqrt{4-2\sqrt{3}})x^2+(1-\sqrt{3})x=17$ درست است؟

۱) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
۲) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.
۳) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
۴) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.

۵۴۴. به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (خارج ۹۲)

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۵۴۵. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+(m-2)x+m+1=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز است؟ (خارج ۹۷)

۱) $-1<m<0$ ۲) $m<0$ ۳) $2<m<8$ ۴) $m>8$

۵۴۶. نمودار تابع $f(x)=m^2x^2-3mx-1$ به ازای مقادیر مختلف $m\neq 0$، همواره:

۱) بالای محور x ها قرار دارد.
۲) محور x ها را در یک طرف مبدأ قطع می‌کند.
۳) محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند.
۴) بر محور x ها مماس است.

تسلط 85^+ ٪

۵۴۷. اگر از صفرهای تابع $f(x)=x^2+3x-c$ نیم واحد کم کنیم، حاصل‌ضرب صفرها چقدر تغییر خواهد کرد؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}+c$ ۳) $\frac{7}{4}c$ ۴) $\frac{7}{4}-c$

۵۴۸. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-290x+m^2=0$، مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۳

۵۴۹. برای کدام مقدار b، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2+bx+b=0$، رابطه‌ی $\frac{3}{\beta}+\frac{2}{\alpha}=1$ برقرار است؟

۱) $\frac{-1}{12}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۵۵۰. در تابع $f(x)=2x^2-(\sqrt{5}+2)x+\sqrt{5}$ با صفرهای α و β، حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt[4]{20}$

۵۵۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx+2=0$ باشند و اعداد ۴، x_1+x_2 و x_1x_2 تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۵۵۲. در معادله‌ی $4x^2-10x+2m=0$، دو برابر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر یک واحد بیشتر است. در این‌صورت مقدار m کدام است؟

۱) ۵/۷۶ ۲) ۲/۸۸ ۳) ۵/۰۴ ۴) ۲/۵۲

۵۵۳. ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+2=0$ را α و β نامیده‌ایم. حاصل عبارت $A=\frac{\alpha}{\alpha^2+2}-\frac{\beta-5}{\beta^2-6\beta+7}$ چقدر است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{-4}{5}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{-6}{5}$

۵۵۴. α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2-8x+4=0$ هستند. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$، برابر باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}} a$ کدام است؟ $(a>0)$ (کنکور دی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۵۵. اگر در معادله‌ی $3x^2-ax+b=0$، بین اعداد a و b رابطه‌ی $2a+b=-12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله، کدام گزینه است؟

۱) $-b$ ۲) $-\frac{b}{2}$ ۳) $-\frac{b}{3}$ ۴) $-\frac{b}{6}$

۵۵۶. اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$ باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟ (خارج تیر ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵۵۷. در معادله‌ی $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$ حاصل $\alpha^4+\beta^4$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{41}{2}$ ۴) $\frac{41}{8}$

۵۵۸. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2x-4=0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۵۵۹. α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+6x+a=0$ هستند. اگر $\alpha<\beta<0$ و $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (کنکور تیر ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) ۲

۵۶۰. به ازای کدام مقادیر m، سهمی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (خارج ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

۵۶۱. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز است؟ (کنکور ۹۷)

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

۵۶۲. به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (کنکور ۹۲)

۱) $a\leq 2$ ۲) $0<a\leq 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

آموزش ٪45+

۵۶۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشند، در کدام گزینه آمده است؟ (کتاب درسی)

۱) $x^2-2x-2=0$ ۲) $x^2-2x-1=0$ ۳) $x^2+2x-2=0$ ۴) $x^2-2x-4=0$

۵۶۴. مجموع دو عدد حقیقی، $-1/5$ و حاصل‌ضرب آن دو -7 است. یکی از آن دو عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{-7}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۵۶۵. دو عدد حقیقی که مجموعشان $2\sqrt{3}$ و حاصل‌ضربشان -1 است، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $\sqrt{3}x^2+6x-\sqrt{3}=0$ ۲) $\sqrt{3}x^2-6x-\sqrt{3}=0$ ۳) $x^2+2\sqrt{3}x-1=0$ ۴) $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

۵۶۶. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

تثبیت ٪70+

۵۶۷. جواب‌های کدام معادله -2 برابر جواب‌های معادله‌ی $x^2-bx=2c$ است؟

۱) $x^2-2bx-8c=0$ ۲) $x^2+2bx+8c=0$ ۳) $x^2-2bx+8c=0$ ۴) $x^2+2bx-8c=0$

۵۶۸. معادله‌ای که ریشه‌هایش عددهای حقیقی $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$ هستند، در کدام گزینه دیده می‌شود؟ $(a\neq 0)$

۱) $x^2+2\sqrt{a}x-1=0$ ۲) $x^2-2\sqrt{a+1}x+1=0$ ۳) $x^2-2\sqrt{a}x+1=0$ ۴) $x^2-2\sqrt{a}x-1=0$

۵۶۹. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن از ۳ برابر قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی x^2-4x+1 دو واحد بیشتر باشند، کدام است؟

۱) $x^2+4x+1=0$ ۲) $x^2-4x+2=0$ ۳) $x^2+8x-11=0$ ۴) $x^2-8x+4=0$

۵۷۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{1+\frac{1}{\alpha}, 1+\frac{1}{\beta}\}$ است؟ (کنکور ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۵۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $4x^2-kx+25=0$ به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (کنکور ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۵۷۲. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x=x^2-4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^2+\frac{1}{x_2}$ و $x_2^2+\frac{1}{x_1}$ است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) $4x^2=51x+221$ ۲) $4x^2+51x=221$ ۳) $4x^2=51x+197$ ۴) $4x^2+51x=197$

تسلط ٪85+

۵۷۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2+10x-16=0$ ۲) $x^2-10x+16=0$ ۳) $x^2-10x-16=0$ ۴) $x^2+10x+16=0$

۵۷۴. عددهای α و β صفرهای تابع $f(x)=x-3\sqrt{x}+2$ هستند. ریشه‌های کدام معادله، اعداد $1+\frac{1}{\alpha}$ و $1+\frac{1}{\beta}$ است؟

۱) $4x^2-13x+10=0$ ۲) $4x^2+13x+10=0$ ۳) $4x^2-17x+18=0$ ۴) $4x^2+17x+18=0$

۵۷۵. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟ (خارج ۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۵۷۶. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6

۵۷۷. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x = 5 - x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$، ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (کنکور ۱۴۰۰)

۱) $125x^2 + 16x = 1$ ۲) $125x^2 = 16x + 1$ ۳) $125x^2 = 12x + 1$ ۴) $125x^2 + 12x = 1$

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

آموزش ٪۴۵+

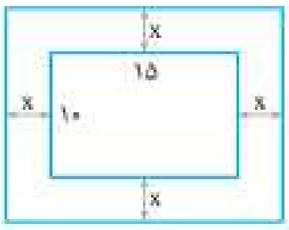
۵۷۸. طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل $45\,cm^2$ باشد، طول قطر آن چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) $\sqrt{230}$ ۲) $\sqrt{231}$ ۳) $\sqrt{234}$ ۴) $\sqrt{236}$

۵۷۹. در لیگ فوتبال که هر تیم با بقیه‌ی تیم‌ها فقط یک بازی به‌صورت حذفی انجام می‌دهد، اگر تعداد کل بازی‌های انجام‌شده برابر ۱۰۵ باشد، در این لیگ چند تیم حضور دارند؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۵۸۰. یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت $300\,cm^2$ قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) 15×20
۲) $16 \times 18/75$
۳) $12/5 \times 24$
۴) 12×25

۵۸۱. معادله‌ی $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ .... است. (کتاب درسی)

۱) دارای دو ریشه‌ی مثبت ۲) دارای چهار ریشه‌ی مثبت ۳) دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز ۴) فاقد ریشه‌ی حقیقی

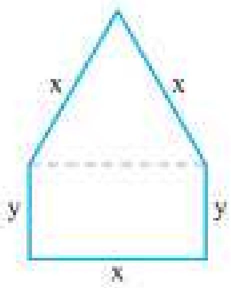
۵۸۲. مستطیلی را با کمک یک سیم به طول ۲۰ ساخته‌ایم. اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود، مساحت مستطیل چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

۵۸۳. یک ماهی‌گیر می‌خواهد مطابق شکل در کنار رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را فنس‌کشی کند. اگر او فقط هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس‌کشی را داشته باشد، بیشترین سطحی که با این ۱۰۰ متر می‌تواند ایجاد کند، چند مترمربع است؟ (کتاب درسی)

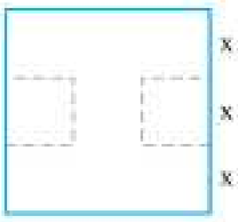
۱) ۵۲۵ ۲) ۱۲۵۰
۳) ۱۸۷۵ ۴) ۳۷۵۰

۵۸۴. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. حداکثر مساحت ممکن (جهت نوردهی بیشتر) در بین پنجره‌هایی که محیطی برابر 4m دارند، کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $\frac{4}{33}(6 - \sqrt{3})$ ۲) $\frac{4}{11}(6 + \sqrt{3})$
۳) $\frac{4}{33}(6 + \sqrt{3})$ ۴) $\frac{4}{11}(6 - \sqrt{3})$

۵۸۵. در مربع شکل زیر، دو مربع کوچک‌تر، مطابق شکل به فاصله‌ی برابر از بالا و پایین مربع بزرگ‌تر، طوری جدا می‌کنیم که اختلاف عدد مساحت شکل باقی‌مانده با محیط آن، ۱۵ واحد باشد. طول ضلع مربع جدا شده کدام است؟



۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

تثبیت ٪۷۰+

۵۸۶. در مستطیلی با مساحت ۵ واحد مربع و محیط ۹ واحد، عرض مستطیل کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۲ یا ۲/۵ ۴) چنین مستطیلی وجود ندارد.

۵۸۷. درباره‌ی معادله‌ی $(\frac{x^2}{x^2+1})^2 + (\frac{x^2}{x^2+1}) - 6 = 0$ کدام گزینه درست است؟

۱) ریشه‌ی مضاعف دارد. ۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۳) چهار ریشه دارد. ۴) دو ریشه دارد.

۵۸۸. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $2x^4-7x^2-4=0$ درست است؟ (کتاب درسی)

۱) دو ریشه‌ی قرینه دارد. ۲) یک ریشه‌ی مثبت دارد.
۳) چهار ریشه‌ی متمایز دارد. ۴) دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۵۸۹. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^4-7x^2-5=0$ به‌ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2-3SP+2S$، کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

۱) $59-7\sqrt{69}$ ۲) $7+\sqrt{69}$ ۳) 50 ۴) $59+7\sqrt{69}$

۵۹۰. بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر همان قاعده برابر ۱۲ واحد است، بیشترین مساحت چند واحد مربع است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

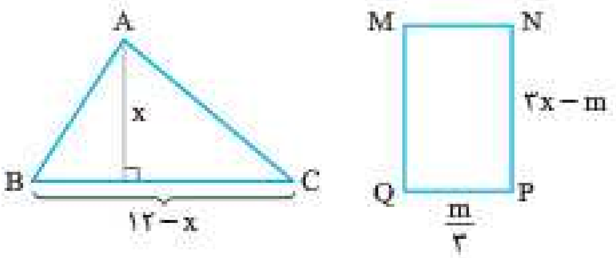
۵۹۱. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای با مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی ۱۵، کدام است؟

۱) $\frac{225}{2}\pi$ ۲) $\frac{225}{4}\pi$ ۳) $\frac{675}{4}\pi$ ۴) $\frac{675}{2}\pi$

۵۹۲. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\sqrt{106}$ و مجموع اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱۴ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۱/۵

۵۹۳. اگر مساحت مثلث ABC و مستطیل $MNPQ$ هر دو ماکزیمم شود، مقدار m کدام است؟



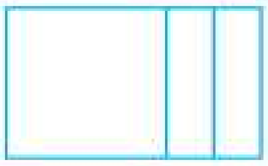
۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

تسلط ۵۸٪

۵۹۴. حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $(1-x^2)^6-19(x^2-1)^3=216$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -2 ۴) -4

۵۹۵. با استفاده از سیمی به طول ۸۰۰ سانتی‌متر، مستطیلی مانند شکل مقابل ساخته‌ایم. اگر مساحت این مستطیل ۲۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، طول آن چند سانتی‌متر است؟



۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۰۰

۵۹۶. اگر معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $(-\infty,-4)$ ۲) $(4,+\infty)$ ۳) $(-4,4)$ ۴) $(4,9)$

۵۹۷. معادله‌ی $x^2-4|x|+2=0$ .... دارد.

۱) دو ریشه‌ی مثبت ۲) چهار ریشه‌ی مثبت
۳) چهار ریشه‌ی هم‌علامت ۴) چهار ریشه‌ی دوبه‌دو قرینه

۵۹۸. حاصل‌ضرب ریشه‌های غیرصفر معادله‌ی $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۴

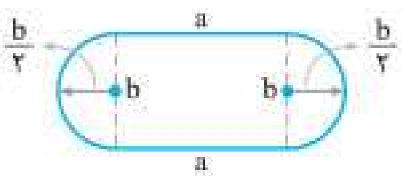
۵۹۹. بین ارتفاع (h) و قاعده‌ی (b) متوازی‌الاضلاعی رابطه‌ی $b+h=9$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت ممکن که با این متوازی‌الاضلاع می‌توان ساخت، چقدر است؟

۱) ۲۰/۲۵ ۲) ۲۰/۵ ۳) ۱۰/۲۵ ۴) ۱۰/۵

۶۰۰. فاصله‌ی بین نقطه‌ای با طول a روی سهمی به معادله‌ی $y=x^2-3x+3$ از نقطه‌ای با همین طول روی خط به معادله‌ی $x+2y+1=0$ را d می‌نامیم. مینیمم مقدار d چقدر است؟

۱) $\frac{77}{16}$ ۲) $\frac{31}{16}$ ۳) $\frac{81}{16}$ ۴) $\frac{131}{16}$

۶۰۱. زمین تنیسی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط زمین ۶۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را چه مقدار بگیریم تا مساحت قسمت مستطیلی شکل زمین حداکثر مقدار ممکن شود؟ $(\pi \simeq 3)$ (کتاب درسی)



۱) $\frac{400}{3}m\times 100m$
۲) $\frac{800}{3}m\times 60m$
۳) $150m\times 100m$
۴) $150m\times 60m$

برای ۱۰۰٪

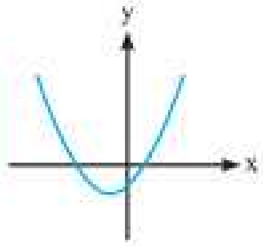
۶۰۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+1=0$ باشند، حاصل $\dfrac{1}{(3\beta-2)^2}+\dfrac{1}{(3\alpha-2)^2}$ کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $\dfrac{710}{289}$ ۲) $\dfrac{155}{289}$ ۳) $\dfrac{600}{289}$ ۴) $\dfrac{542}{289}$

۶۰۳. ریشه‌های کدام معادله اعداد $(1-\sqrt{3})^4$ و $(1+\sqrt{3})^4$ هستند؟

۱) $x^2+56x+16=0$ ۲) $x^2-56x+16=0$ ۳) $x^2+56x-16=0$ ۴) $x^2-56x-16=0$

۶۰۴. اگر شکل مقابل نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $bc<0$
۲) $bc>0$
۳) $bc=0$
۴) $bc\geq 0$

۶۰۵. فاصله‌ی بین دو ریشه‌ی یک سهمی برابر ۴ واحد است. اگر رأس سهمی نقطه‌ی $(1,1)$ باشد، معادله‌ی سهمی کدام است؟

۱) $y=-x^2+2x+3$ ۲) $y=(x-1)(x+3)+1$ ۳) $y=\dfrac{-1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ ۴) $y=\dfrac{-1}{4}(x-1)(x+3)$

۶۰۶. بین ضرایب معادله‌ی $ax^2-bx-c=0$ روابط $c=a+b$ و $2b=4a-c$ برقرار است. حاصل جمع توان سوم ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

۶۰۷. به ازای کدام مقادیر m از معادله‌ی $mx-2\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (کنکور ۸۸)

۱) $-\dfrac{3}{2}<m<2$ ۲) $0<m<2$ ۳) $\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{5}{2}$ ۴) $\dfrac{3}{2}<m<2$

۶۰۸. رابطه‌ی $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=56$ بین صفرهای تابع $f(x)=x^2-bx-3b^2$ برقرار است. نمودار تابع نسبت به کدام خط نمی‌تواند قرینه باشد؟

۱) $x=\dfrac{1}{2}$ ۲) $x=1$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=1$ و $x=-1$

۶۰۹. اگر مینیمم سهمی به معادله‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ بر ماکزیمم سهمی به معادله‌ی $g(x)=-x^2+6x-x$ منطبق بوده و فاصله‌ی بین نقاط تقاطع منحنی f با محور x ها، ۸ واحد باشد، در این‌صورت نمودار تابع f، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\dfrac{63}{16}$ ۲) $-\dfrac{45}{4}$ ۳) $-\dfrac{63}{8}$ ۴) $-\dfrac{45}{8}$

۶۱۰. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $(2m+1)x^2-4(m+\frac{1}{2})x+m+1=0$ باشند و بین آن‌ها رابطه‌ی $5\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=20$ برقرار باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۲−

آزمون فصل

زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

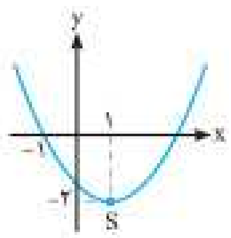
۶۱۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی است؟ (کنکور ۹۸)

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$

۶۱۲. حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-32(x^2+x)+240=0$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰− ۴) ۲۴۰−

۶۱۳. معادله‌ی سهمی مقابل در کدام گزینه آمده است؟



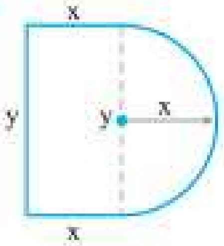
۱) $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$ ۲) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}$

۳) $y=2(x-1)^2-2$ ۴) $y=x^2-2x-1$

۶۱۴. در متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل مقابل، مجموع طول دو ضلع مجاور برابر با ۱۱ واحدِ طول است. حداکثر مقدار مساحت ممکن برای این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}\times ۱۲۱$ ۲) $\frac{۷}{۸}\times ۱۲۱$ ۳) $\frac{۱}{۸}\times ۱۲۱$ ۴) $\frac{۳}{۴}\times ۱۲۱$

۶۱۵. می‌خواهیم با طنابی به طول ۷۰ متر، سطحی متشکل از یک مستطیل و یک نیم‌دایره ایجاد کنیم. حداکثر مساحت ایجادشده برابر است با: $(\pi \simeq ۳)$



۱) $۱۰۵۰\ m^۲$ ۲) $۱۱۵۰\ m^۲$ ۳) $۱۲۲۵\ m^۲$ ۴) $۳۵۰\ m^۲$

۶۱۶. به ازای کدام مقدار a، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ - x + a = ۰$، مجموع معکوس ریشه‌ها برابر $\frac{۱}{۴}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۴− ۴) هیچ مقدار a

۶۱۷. اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^۲ - bx + ۳ = ۰$ به‌صورت $\{\frac{r}{\sqrt{r^۲+۱}}, \frac{r}{\sqrt{r^۲-۱}}\}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\pm ۲\sqrt{۶}$ ۲) $\pm ۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۶۱۸. ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $(۱+\sqrt{۲})x^۲ - \sqrt{۵}x + \sqrt{۲} = ۱$ چقدر از ریشه‌ی کوچک‌تر آن بیشتر است؟

۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۶۱۹. اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^۲ + bx - c = ۰$ باشند، ریشه‌های کدام معادله اعداد $\frac{-۱}{\alpha}$ و $\frac{-۱}{\beta}$ است؟

۱) $cx^۲ + bx - a = ۰$ ۲) $cx^۲ - bx - a = ۰$ ۳) $cx^۲ - bx + a = ۰$ ۴) $cx^۲ + bx + a = ۰$

۶۲۰. به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - ۲(a-۲)x + ۱۴ - a = ۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟ (کنکور ۹۶)

۱) $-۲ < a < ۲$ ۲) $۲ < a < ۵$ ۳) $۲ < a < ۱۴$ ۴) $۵ < a < ۱۴$

۶۲۱. اگر صفرهای تابع درجه‌ی دوم $y = ۳x^۲ + bx + c$ برابر ۳− و ۵ باشند، کمترین مقدار این سهمی کدام است؟

۱) ۳۶− ۲) ۴۸− ۳) ۴۲ ۴) ۵۴

۶۲۲. نمودار سهمی $y = (۲m+۳)x^۲ + ۶x + m$ همواره بالای محور xها است. حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲} < m < ۰$ ۲) $m > \frac{۳}{۲}$ ۳) $۰ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $m > -\frac{۳}{۲}$

۶۲۳. تابع درجه‌ی دوم $y = x^۲ + bx + ۸$ نسبت به خط $x = ۳$ متقارن است. این تابع محور xها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱− ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۶۲۴. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $-x^۲ + ۸x - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۴

۶۲۵. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^۲ + x - ۵ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{\alpha}{\beta} - ۱, \frac{\beta}{\alpha} - ۱\}$ است؟

۱) $۵x^۲ + x - ۲۱ = ۰$ ۲) $۵x^۲ - x - ۲۱ = ۰$ ۳) $۵x^۲ - ۲۱x + ۲۱ = ۰$ ۴) $۵x^۲ + ۲۱x + ۲۱ = ۰$