Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

خیلی سبز!

۱۴۰۰

داخل کشور

دفترچه شماره ۲
آزمون اختصاصی

ویژه نظام آموزشی ۳-۳-۶

آزمون سراسری ورودی دانشگاه های کشور - ۱۴۰۰

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
آزمون اختصاصی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

• تعداد سؤال: ۱۳۵ • مدت پاسخگویی: ۱۷۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد، شمارهٔ سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۵۵	۱۰۱	۱۵۵	۸۵ دقیقه
۲	فیزیک	۴۵	۱۵۶	۲۰۰	۵۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۵	۲۰۱	۲۳۵	۳۵ دقیقه

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

ریاضیات

۱۰۱- اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴ - ۷x^۲ - ۵ = ۰$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $۲P^۲ - ۳SP + ۲S$، کدام است؟

۱) $۵۹ - ۷\sqrt{۶۹}$ ۲) $۷ + \sqrt{۶۹}$ ۳) ۵۰ ۴) $۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}$

۱۰۲- فرض کنید $\log_{\frac{۵}{۲}}(۳x - ۲) = ۱$. مقدار x کدام است؟ $\begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix}$

۱) ۹ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۰۳- حاصل عبارت $(\log_{۲۱}(۳))^۲ + \log_{۲۱}(۱۴۷)\log_{۲۱}(۱۳۲۳)$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴- فرض کنید مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲ - ۱)x^۲ - ۴mx + ۴)(x - ۳\sqrt{x} + ۲)}{۲x - ۳} < ۰$، به ازای $x > \frac{۳}{۲}$، بازهٔ $[۲, ۴]$ باشد. مقدار m، کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۵- اگر $\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۹۱}{۱۰۵}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۹۱}{۱۰۵}$

۱۰۶- اگر $f(\alpha) = ۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha) + ۲\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۰۷- فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۸\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در بازهٔ $[۰, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ ۲) $\frac{۶}{۷}\pi$ ۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ ۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

۱۰۸- تابع چندجمله‌ای درجه‌دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -۲ و $\frac{۱}{۲}x + ۱$ باشند، کم‌ترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۰۹- فرض کنید جملهٔ صدم دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = \frac{۱}{a_n} + ۱$ با شرط $a_۱ = ۱$، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جملهٔ نود و هشتم دنباله، کدام است؟

۱) $\frac{k - m}{۲m - k}$ ۲) $\frac{k - ۲m}{k - m}$ ۳) $\frac{k - m}{k - ۲m}$ ۴) $\frac{۲m - k}{k - m}$

۱۱۰- دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} ۲^k & ; n = ۳k \\ -۲k + ۴ & ; n = ۳k + ۱ \\ \left[\frac{n}{k+۲}\right] + a & ; n = ۳k + ۲ \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n، مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_۲ + a_۵ + a_۸ + \cdots + a_{۲۹}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۱۱۱- فرض کنید برد تابع $f(x) = ۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲(x) - ۱}} - ۲^{\sqrt[۳]{۱ - ۹\cos^۲(x)}}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۲۱}{۴}$

۱۱۲- دامنهٔ تغییرات تابع $f(x) = \log_۶ \frac{۱}{۶ + \sqrt{|x| - |x|}}$ کدام است؟

۱) $(-۹, ۹)$ ۲) $(-۴, ۹)$ ۳) $(۴, ۹)$ ۴) $(-۴, ۴)$

۱۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{۴ - x}$ را k واحد در راستای قائم و $k - ۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست‌آمده با محور xها، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

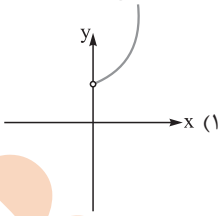
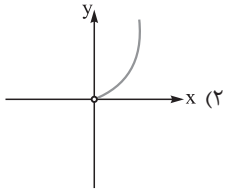
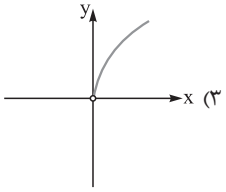
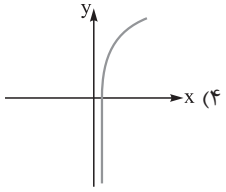
BISTAKHTAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۱۴- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۵- نمودار تابع $f(x)=9^{\log_3 x}$ کدام است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۱۶- فرض کنید $a=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan^2(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1)}{(1-\cos(\sqrt{2x}))^n}$. مقدار $a+n$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{15}{4}$ ۴) $\frac{17}{4}$

۱۱۷- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

۱۱۸- تابع $f(x)=\frac{ax^3-bx^2+2}{ax^3-bx+2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b کدام‌اند؟

۱) $a=0,b=2$ ۲) $a=8,b=10$ ۳) $a=-2,b=0$ ۴) $a=-8,b=-6$

۱۱۹- اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2-1)(a^4x^4-1)\cdots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{49}x^k-1}=-1$، آن‌گاه مقادیر a و k کدام‌اند؟

۱) $a=-1$ و $k=51$ ۲) $k=51,a=1$ ۳) $k=49,a=-1$ ۴) $k=49,a=1$

۱۲۰- فرض کنید $f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸-

۱۲۱- خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x)=|\sin(2x)|+1$ را در نقطه‌ای به طول $x=0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۲۲- کدام عبارت، برای تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ درست است؟

۱) تابع f در بازهٔ $(0,1)\cup(1,\infty)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(1,\infty)$ و $(0,1)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(0,1)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(0,1)$ صعودی است.

۱۲۳- بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$ در آن ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[3]{4}-1$ ۳) $2\sqrt[3]{4}$ ۴) $2(\sqrt[3]{4}-1)$

۱۲۴- فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۵- ارزش گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$، درست است. احتمال این‌که ارزش گزارهٔ r نادرست باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{2}{3}$

BISTAKETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۲۶- فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعهٔ مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$. اگر $((A' - B)' \cap C)' = B$، کدام عبارت درست است؟

۱) $B \subset A$ ۲) $A \cap B = \varnothing$ ۳) $A \subset B$ ۴) $A = B$

۱۲۷- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \cdots$. مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 20$، کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

۱۲۸- در جدول فراوانی داده‌های زیر، مقدار میانه برابر ۱۳/۵ و اختلاف چارک اول از سوم ۱۷ است. به هر یک از داده‌های جدول ۴ واحد اضافه می‌کنیم. واریانس جدول جدید، کدام است؟

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۲۸	۳۱	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۵	۱

۱) ۷۱ ۲) ۷۱/۵ ۳) ۷۲ ۴) ۷۲/۵

۱۲۹- برای دانش‌آموزان یک شهر از مقطع ابتدایی تا کلاس دوازدهم، یک عدد پنج‌رقمی به صورت زیر اختصاص می‌یابد: دو رقم اول سمت راست نمایش پایهٔ تحصیلی (از ۰۱ تا ۱۲)، دو رقم دوم نمایش سن (از ۰۷ تا ۱۸) و رقم پنجم جنسیت (پسر ۱ و دختر ۲). سپس اعداد را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می‌دهیم. سن صدمین عضو مجموعه کدام است؟ (ممکن است عدد پنج‌رقمی مورد نظر به هیچ فردی اختصاص نیابد، ولی در محاسبه شمرده شود.)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۳۰- هر یک از اعداد ۱ تا ۲۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس دو کارت به تصادف و به ترتیب از کیسه خارج کرده و کنار یکدیگر قرار می‌دهیم تا عدد جدیدی حاصل شود. اعداد تشکیل‌شده از همهٔ حالت‌های ممکن را در مجموعهٔ A قرار می‌دهیم، یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۸۴}$ ۲) $\frac{۶۵}{۴۱۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۷۰}$ ۴) $\frac{۶۷}{۴۱۷}$

۱۳۱- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ $(\sqrt{۱۰} \cong ۳/۱۶)$

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۱۳۲- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = 2^m \times 5^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{۴۰}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x، کدام است؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۸۰

۱۳۳- میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی به صورت $\overline{aba}$ که مضرب عدد ۱۲ باشند، کدام است؟

۱) ۳۴۸ ۲) ۵۴۰ ۳) ۵۷۰ ۴) ۵۷۴

۱۳۴- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > 9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد، احتمال این‌که عدد $a - 9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

۱۳۵- اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $(m - ۱۰)! \overset{۳۶}{\equiv} ۳۶$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^{۱۲۳}$ بر ۱۵، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۶- در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده بیشتر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵۷}{۲۷۰}$ ۲) $\frac{۱۶۵}{۲۷۰}$ ۳) $\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۸۰}{۲۷۰}$

۱۳۷- تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{۱۰}{x_4}$، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۹۶

۱۳۸- کوچک‌ترین اندازهٔ گراف سادهٔ همبند از مرتبهٔ ۷ که بزرگ‌ترین درجهٔ رئوس آن ۳ باشد، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۳۹- مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a, b)، کدام است؟

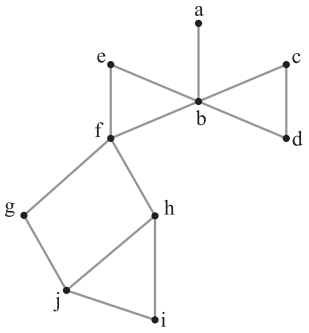
	a	۳		
	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
b				

۱) $(۵, ۳)$
۲) $(۱, ۴)$
۳) $(۲, ۱)$
۴) $(۴, ۱)$

BISTAKHFAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۴۰- در گراف زیر، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال کدام است؟



۱) $\{b,h\}$
۲) $\{b,g,i\}$
۳) $\{a,c,h\}$
۴) $\{a,c,f,j\}$

۱۴۱- بردار $\vec{a}=(-۱,\alpha,۱)$ با محور z در فضا زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ و زاویهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور zها، θ باشد، مقدار $\cos\theta$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۴۲- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۴۳- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۴۴- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\\۳&۱\end{bmatrix}$. اگر $BA^TA=۵۲I$ باشد، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۴۵- کدام عبارت درست است؟

۱) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در تعداد نامتناهی صفحه قرار می‌گیرند.
۲) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در صفحهٔ عمود بر آن دو خط قرار می‌گیرند.
۳) مجموعه نقاطی از فضا که از یک نقطه و یک خط که از آن نقطه نمی‌گذرد، به یک فاصله باشند، روی منحنی سهمی‌شکل قرار دارند.
۴) مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ آن از دو نقطهٔ ثابت در فضا، به یک‌اندازه باشند. روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

۱۴۶- سهمی $(x-۱)^۲-۱۲y=۶$ با رأس F و کانون F' مفروض است. یک بیضی با کانون‌های F و F' و خروج از مرکز ۰/۶ می‌سازیم. فاصلهٔ مرکز بیضی از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

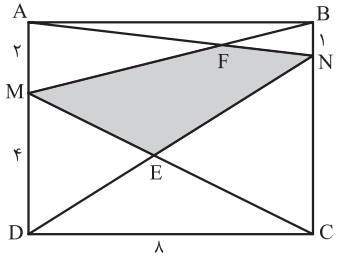
۱۴۷- مثلثی با طول اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازهٔ طول ضلع شش‌ضلعی محاط‌شده در این مثلث، کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۱۴۸- زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نقطهٔ M داخل زاویه با شرط $۲M\hat{O}y=x\hat{O}M$ باشد، مفروض است. از نقطهٔ M عمودهای MN و MP را به ترتیب بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$، کدام است؟

۱) $\frac{OP}{ON}$ ۲) $\frac{OP}{OM}$ ۳) $\frac{۲OP}{ON}$ ۴) $\frac{۲OP}{OM}$

۱۴۹- مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF، کدام است؟



۱) $\frac{۱۰۴}{۹}$
۲) ۱۳
۳) $\frac{۴۷}{۳}$
۴) ۱۶

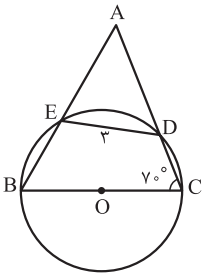
BISTAKETAB

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

۱۵۰- در یک مثلث با زاویهٔ ۱۳۸°، کوچک‌ترین زاویهٔ بین دو نیمساز خارجی به درجه، کدام است؟

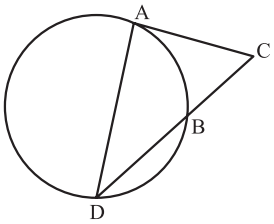
۱) ۲۱ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۳۴/۵ ۴) ۴۲

۱۵۱- در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EDC}$ به درجه، کدام است؟



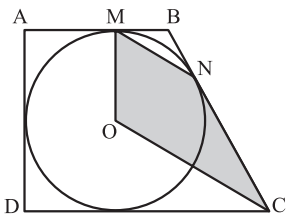
۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

۱۵۲- در شکل مقابل پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC}=\sqrt{۳}$، آن‌گاه نسبت $\frac{DB}{BC}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۵۳- مطابق شکل مقابل ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است. اگر زاویهٔ $M\hat{B}N=۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی OMNC، کدام است؟



۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۳}$

۱۵۴- فرض کنید خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x+۳y+۵=۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۴,-۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}-۲$

۱۵۵- فرض کنید طول خط‌المرکزین دو دایره با شعاع‌های $۶a-۱$ و $a^۲-۲$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس‌مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) ۶ ۴) ۷

BISTAKHETAB

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

پاسخ‌نامهٔ آزمون اختصاصی رشتهٔ ریاضی

ریاضیات

۱۰۱- گزینهٔ ۴ چون توان xهای استفاده‌شده در معادله، همگی زوج هستند، اگر α جواب این معادله باشد، $-\alpha$ هم حتماً جواب معادله است. در نتیجه مجموع جواب‌های این معادله، حتماً صفر است: $S=0$

الان باید حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله را حساب کنیم. با فرض $x^2=t$، داریم:

$$t^2-7t-5=0 \xrightarrow{\Delta=69} t=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2}$$

چون $x^2\geq 0$ است، پس جواب منفی برای t، قابل قبول نیست و در نتیجه فقط $t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$ قابل قبول است:

$$x^2=\frac{7+\sqrt{69}}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$$

پس: $P=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\times\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}$

مقدار عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$2P^2-\underbrace{3SP}_{0}+\underbrace{2S}_{0}=2\left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2=2\left(\frac{49+69+14\sqrt{69}}{4}\right)$$

$$=59+7\sqrt{69}$$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ دترمینان ماتریس 2×2 به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

اول مقدار دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$$

$$=(\log 10)(\log\frac{5}{2})=1\times\log\frac{5}{2}=\log\frac{5}{2}$$

از طرفی می‌دانیم $\log_b a$ و $\log_a b$، وارون یکدیگرند:

$$\log_b a\times\log_a b=1$$

چون ضرب $\log_{10}\frac{5}{2}$ و $\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)$ برابر با ۱ شده است، پس $3x-2$ باید ۱۰ باشد:

$$\log_{10}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1 \Rightarrow 3x-2=10 \Rightarrow x=4$$

۱۰۳- گزینهٔ ۴ دو عبارت لگاریتمی $\log_{21}147$ و $\log_{21}1323$ را برحسب $\log_{21}3$ می‌نویسیم:

به جای ۱۴۷، می‌توانیم $\frac{441}{3}$ بنویسیم که خود ۴۴۱ هم 21^2 است:

$$\log_{21}147=\log_{21}\frac{441}{3}=\log_{21}21^2-\log_{21}3=2-\log_{21}3$$

عدد ۱۳۲۳ هم 441×3 است:

$$\log_{21}1323=\log_{21}(21^2\times 3)=\log_{21}21^2+\log_{21}3$$

$$=2+\log_{21}3$$

پس:

$$(\log_{21}(3))^2+\log_{21}(147)\log_{21}(1323)$$

$$=(\log_{21}3)^2+(2-\log_{21}3)(2+\log_{21}3)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} =(\log_{21}3)^2+4-(\log_{21}3)^2=4$$

۱۰۴- گزینهٔ ۲ پرانتز دوم صورت را با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{((m^2-1)x^2-4mx+4)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{2x-3}>0$$

دو عبارت $\sqrt{x}-1$ و $2x-3$، به ازای $x>\frac{3}{2}$ مثبت‌اند، پس می‌توانیم حذفشان کنیم:

$$((m^2-1)x^2-4mx+4)(\sqrt{x}-2)>0$$

ریشهٔ پرانتز دوم را حساب می‌کنیم: $\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4$

جواب نامعادله به صورت $[2,4]$ بود. حالا که $x=4$ ریشهٔ پرانتز دوم است، پس $x=2$ باید ریشهٔ پرانتز اول باشد:

$$4(m^2-1)-8m+4=0 \Rightarrow 4m^2-8m=0$$

$$\Rightarrow 4m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$$

حالا به ازای هر دو مقدار m، نامعادلهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$((m^2-1)x^2-4mx+4)(\sqrt{x}-2)>0$$

(۱) به ازای $m=0$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$(-x^2+4)(\sqrt{x}-2)>0$$

(۲) به ازای $m=2$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$(3x^2-8x+4)(\sqrt{x}-2)>0$$

یک عدد در بازهٔ $[2,4]$، مثل $x=3$ را در نامعادله‌ها چک می‌کنیم. این عدد فقط در نامعادلهٔ (۱) صدق می‌کند، پس $m=0$ قابل قبول است.

۱۰۵- گزینهٔ ۲ از رابطهٔ زیر کمک می‌گیریم:

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

جای A، $\frac{\alpha}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}}=\frac{8}{15}$$

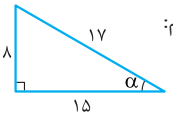
BISTAKHETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

حالا از مثلث قائم‌الزاویه کمک می‌گیریم:

$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۸}{۱۵}$

وتر را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:



$\text{وتر} = \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} = ۱۷$

مقدار نسبت‌ها را به دست می‌آوریم. چون $\tan\alpha$ عددی مثبت شد، پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ دو حالت دارند:

(۱) یا هر دو مثبت‌اند:

$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۸}{۱۷}$, $\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۱۵}{۱۷}$

(۲) یا هر دو منفی‌اند: $\sin\alpha = -\frac{۸}{۱۷}$, $\cos\alpha = -\frac{۱۵}{۱۷}$

مقدار عبارت خواسته‌شده را در هر دو حالت حساب می‌کنیم:

(۱) $\frac{\tan(\alpha)-\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)-\cos(\alpha)} = \frac{\frac{۸}{۱۵}-\frac{۸}{۱۷}}{\frac{۸}{۱۷}-\frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{\frac{۲\times۸}{۱۵\times۱۷}}{-\frac{۷}{۱۷}} = -\frac{۱۶}{۱۰۵}$

(۲) $\frac{\tan(\alpha)-\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)-\cos(\alpha)} = \frac{\frac{۸}{۱۵}+\frac{۸}{۱۷}}{-\frac{۸}{۱۷}+\frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{\frac{۳۲\times۸}{۱۵\times۱۷}}{\frac{۷}{۱۷}} = \frac{۳۲\times۸}{۱۵\times۷} = \frac{۲۵۶}{۱۰۵}$

هر دو جواب قابل قبول‌اند ولی فقط $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۰۶- گزینهٔ ۱ با عرض شرمندگی، باید این فرمول را بلد باشید!

$\sin۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$

اول از اتحاد $\cos۲\alpha = ۱-۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$f(\alpha) = ۴\sin\alpha(۱-۲\sin^۲\alpha) + ۲\sin\alpha$

$= ۶\sin\alpha - ۸\sin^۳\alpha$

$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از ۲ فاکتور}} f(\alpha) = ۲(\underbrace{۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha}_{\sin۳\alpha}) = ۲\sin۳\alpha$

پس:

$f(\frac{۴۱\pi}{۹}) = ۲\sin(\frac{۴۱\pi}{۳}) = ۲\sin(۱۴\pi - \frac{\pi}{۳}) = ۲(-\sin\frac{\pi}{۳})$

$= ۲\times\frac{-\sqrt{۳}}{۲} = -\sqrt{۳}$

۱۰۷- گزینهٔ ۴ در هر سه پرانتز از اتحاد $۱+\cos A = ۲\cos^۲\frac{A}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$(۱+\cos۲\alpha)(۱+\cos۴\alpha)(۱+\cos۸\alpha) = \frac{۱}{۸}$

$\Rightarrow (۲\cos^۲\alpha)(۲\cos^۲۲\alpha)(۲\cos^۲۴\alpha) = \frac{۱}{۸}$

$\Rightarrow \cos^۲\alpha\cos^۲۲\alpha\cos^۲۴\alpha = \frac{۱}{۶۴}$

$\xrightarrow{\text{جذر}} |\cos\alpha\cos۲\alpha\cos۴\alpha| = \frac{۱}{۸}$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $|\sin\alpha|$ ضرب می‌کنیم:

$|\sin\alpha\cos\alpha\cos۲\alpha\cos۴\alpha| = \frac{۱}{۸}|\sin\alpha|$

حالا از اتحاد $\sin A\cos A = \frac{۱}{۲}\sin۲A$، سه بار استفاده می‌کنیم:

$|\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha}\underbrace{\cos۲\alpha\cos۴\alpha}_{\frac{۱}{۴}\sin۴\alpha}| = \frac{۱}{۸}|\sin\alpha|$

$\Rightarrow |\sin۸\alpha| = |\sin\alpha| \Rightarrow \begin{cases}\sin۸\alpha = \sin\alpha \\ \sin۸\alpha = \sin(-\alpha)\end{cases}$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و بزرگ‌ترین جواب هر کدام در بازهٔ $(۰,\pi)$ را می‌نویسیم:

(۱) $\sin۸\alpha = \sin\alpha$

$\Rightarrow \begin{cases}۸\alpha = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi}{۷} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۶\pi}{۷} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi+\pi}{۹} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۷\pi}{۹}\end{cases}$

(۲) $\sin۸\alpha = \sin(-\alpha)$

$\Rightarrow \begin{cases}۸\alpha = ۲k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi}{۹} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۸\pi}{۹} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi+\pi}{۷} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۵\pi}{۷}\end{cases}$

پس بزرگ‌ترین جواب، $\frac{۸\pi}{۹}$ است.

تذکر

در جواب دوم هر دو معادله، $\alpha = \pi$ را به دلیل صدق‌نکردن در معادلهٔ اولیه ننوشتیم. چون ما طرفین معادله را در $\sin\alpha$ ضرب کردیم، در معادله جواب اضافی تولید شده بود که یکی از آن‌ها $\alpha = \pi$ بود.

۱۰۸- گزینهٔ ۳ تابع P به صورت زیر است:

$P(x) = ax^۲ + bx + c$

P' هم به صورت روبه‌رو است: $P'(x) = ۲ax + b$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج‌قسمت $\frac{x}{۲}+۱$ و باقی‌مانده -۲ است. اتحاد تقسیم را می‌نویسیم:

$P(x) = P'(x).(\frac{x}{۲}+۱) + (-۲)$

$\Rightarrow ax^۲ + bx + c = (۲ax+b)(\frac{x}{۲}+۱) - ۲$

$\Rightarrow ax^۲ + bx + c = ax^۲ + (۲a + \frac{b}{۲})x + (b-۲)$

ضرایب عبارات هم‌درجه را برابر قرار می‌دهیم:

ضرایب $x^۲$ها $\Rightarrow a = a$

ضرایب xها $\Rightarrow b = ۲a + \frac{b}{۲} \xrightarrow{\times۲} ۲b = ۴a + b$

$\Rightarrow b = ۴a$

جملات درجهٔ صفر $\Rightarrow c = b - ۲$

a، b و c، سه عدد طبیعی‌اند. چون می‌خواهیم کم‌ترین مقدار $a+b+c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطهٔ $b = ۴a$ و $a = ۱$، $b = ۴$ باشد، پس:

$c = b - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$

در نتیجه: $\min(a+b+c) = ۱+۴+۲ = ۷$

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۰۹- گزینهٔ ۱ اول جای nها، ۹۹ قرار می‌دهیم تا a_{99} به دست آید:

$$a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1 \Rightarrow \frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1 \Rightarrow \frac{k-m}{m}=\frac{1}{a_{99}}$$
$$\Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

الان جای nها، ۹۸ می‌گذاریم:

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1 \Rightarrow \frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1$$
$$\Rightarrow \frac{m-(k-m)}{k-m}=\frac{1}{a_{98}} \Rightarrow a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۱ اولاً باید حواستان باشد که مجموع ۱۰ جملهٔ اول یعنی مجموع جملات a_0 تا a_9!

- جملات a_0، a_3، a_6 و a_9 را از ضابطهٔ 2^k، حساب می‌کنیم:

باید جای k، اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ را در 2^k قرار دهیم:

$$\begin{cases} a_0=2^0=1 \\ a_3=2^1=2 \\ a_6=2^2=4 \\ a_9=2^3=8 \end{cases}$$

- جملات a_1، a_4 و a_7 را از ضابطهٔ $-2k+4$ حساب می‌کنیم.

جای k، اعداد ۰، ۱ و ۲ را در $-2k+4$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_1=0+4=4 \\ a_4=-2+4=2 \\ a_7=-4+4=0 \end{cases}$$

- جملات a_2، a_5 و a_8 را از ضابطهٔ $[\frac{n}{k+2}]+a$ حساب می‌کنیم.

جای n، $3k+2$ قرار می‌دهیم: $[\frac{3k+2}{k+2}]+a$

حالا جای k، اعداد ۰، ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_2=[\frac{2}{2}]+a=a+1 \\ a_5=[\frac{5}{3}]+a=a+1 \\ a_8=[\frac{8}{4}]+a=a+2 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جملهٔ اول (a_0 تا a_9)، ۱۹ شده، پس:

$$1+4+(a+1)+2+2+(a+1)+4+0+(a+2)+8=19$$
$$\Rightarrow 3a+25=19 \Rightarrow a=-2$$

جملات $a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{29}$، همگی در ضابطهٔ سوم یعنی $[\frac{3k+2}{k+2}]-2$ هستند. اول ضابطه را کمی ساده می‌کنیم:

$$[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[\frac{3k+2}{k+2}-2]=[\frac{k-2}{k+2}]$$

باید در $[\frac{k-2}{k+2}]$، جای k، اعداد صفر تا ۹ را قرار دهیم و مقدارهای به دست آمده را با هم جمع کنیم:

$$\underbrace{[-\frac{2}{2}]}_{-1}+\underbrace{[-\frac{1}{3}]}_{-1}+\underbrace{[0]+[\frac{1}{5}]+[\frac{2}{6}]+[\frac{3}{7}]+[\frac{4}{8}]+[\frac{5}{9}]+[\frac{6}{10}]+[\frac{7}{11}]}_{0}$$
$$=-2$$

۱۱۱- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}}-2^{-\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}}$$

توان منفی را اثر می‌دهیم:

$$f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}}-\frac{1}{2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}}}$$

محدودهٔ تغییرات عبارت $\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}$ را پیدا می‌کنیم:

$$-1\le \cos x\le 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 0\le \cos^2 x\le 1$$
$$\xrightarrow{\times 9} 0\le 9\cos^2 x\le 9 \xrightarrow{-1} -1\le 9\cos^2 x-1\le 8$$
$$\xrightarrow{\text{فرجهٔ ۳}} -1\le \sqrt[3]{9\cos^2 x-1}\le 2$$

با فرض $A=\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}$، می‌دانیم: $-1\le A\le 2$

توابع $y=2^A$ و $y=-\frac{1}{2^A}$، توابعی صعودی و پیوسته هستند، پس مجموعشان نیز صعودی و پیوسته است: $y=2^A+\frac{-1}{2^A}$

برای به دست آوردن برد این تابع، کافی است مقدار تابع را در نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه به دست آوریم:

$$\begin{cases} \text{ابتدای دامنه: } A=-1 \Rightarrow y=2^{-1}+\frac{-1}{2^{-1}}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2} \\ \text{انتهای دامنه: } A=2 \Rightarrow y=2^2+\frac{-1}{2^2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{برد}=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

پس: $b-a=\frac{15}{4}-(-\frac{3}{2})=\frac{21}{4}$

۱۱۲- گزینهٔ ۱

تذکر منظور طراح از دامنهٔ تغییرات، همان «دامنه» است!

می‌دانیم عبارت $\log_B A$، سه شرط زیر را باید داشته باشد:

$$\begin{cases} A>0 \\ B>0 \\ B\neq 1 \end{cases}$$

در این‌جا شرط ۲ و ۳ برقرارند، پس فقط شرط $A>0$ را باید بررسی کنیم:

$$\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0 \xrightarrow{\text{صورت مثبته}} 6+\sqrt{|x|}-|x|>0$$
$$\xrightarrow{\times(-1)} |x|-\sqrt{|x|}-6<0$$

جای $|x|$ می‌توانیم از $(\sqrt{|x|})^2$ استفاده کنیم و بعد عبارت سمت چپ را با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه کنیم:

$$(\sqrt{|x|})^2-\sqrt{|x|}-6<0 \Rightarrow (\sqrt{|x|}-3)(\sqrt{|x|}+2)<0$$

عبارت داخل پرانتز دوم، همواره مثبت است. پس می‌توانیم حذفش کنیم:

$$(\sqrt{|x|}-3)\underbrace{(\sqrt{|x|}+2)}_{\text{همواره مثبت}}<0 \Rightarrow \sqrt{|x|}-3<0$$
$$\Rightarrow \sqrt{|x|}<3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} |x|<9 \Rightarrow -9<x<9$$

۱۱۳- گزینهٔ ۳ احتمالاً طراح منظورش k واحد به بالا و $k-2$ واحد به راست بوده! چون اگر این موضوع را ندانیم، در ۴ حالت مختلف باید سؤال را حل کنیم!

BISTAKHTAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

$$y=\sqrt{۴-x} \xrightarrow{k\text{ واحد بالا}} y=\sqrt{۴-x}+k$$
$$\xrightarrow{k-۲\text{ واحد به راست}} y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k$$
$$=\sqrt{-x+k+۲}+k$$

این تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. مختصات این نقطه $(۱,۱)$ است که باید در ضابطه صدق کند:

$$y=\sqrt{-x+k+۲}+k \xrightarrow{(۱,۱)} ۱=\sqrt{k+۱}+k$$
$$\Rightarrow ۱-k=\sqrt{k+۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱-۲k+k^۲=k+۱$$
$$\Rightarrow k^۲-۳k=۰ \Rightarrow k(k-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=۰ & ✓ \\ k=۳ & ✗ \end{cases}$$

$k=۳$ در معادلهٔ گنگ اولیه صدق نمی‌کرد.

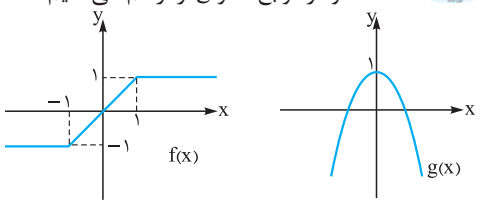
با جای‌گذاری $k=۰$، ضابطه به صورت $y=\sqrt{-x+۲}$ درمی‌آید.

این ضابطه را ۱ واحد به پایین می‌آوریم: $y=\sqrt{-x+۲}-۱$

منحنی به دست آمده را با محور xها قطع می‌دهیم (y را صفر می‌دهیم):

$$y=\sqrt{-x+۲}-۱ \Rightarrow ۰=\sqrt{-x+۲}-۱ \Rightarrow ۱=\sqrt{-x+۲}$$
$$\Rightarrow x=۱$$

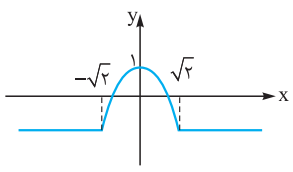
۱۱۴- گزینهٔ ۳ نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم:



۱) fog را تشکیل می‌دهیم. باید در f، جای تمام xها، $g(x)$ بنویسیم.

$$f(g(x))=\begin{cases} -۱ & g(x)<-۱ \\ g(x) & -۱\le g(x)\le ۱ \\ ۱ & g(x)>۱ \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -۱ & ۱-x^۲<-۱ \\ ۱-x^۲ & -۱\le ۱-x^۲\le ۱ \\ ۱ & ۱-x^۲>۱ \end{cases}=\begin{cases} -۱ & x^۲>۲ \\ ۱-x^۲ & ۰\le x^۲\le ۲ \\ ۱ & \underbrace{x^۲<۰}_{\text{همواره نادرست!}} \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -۱ & x>\sqrt{۲}, x<-\sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & -\sqrt{۲}\le x\le \sqrt{۲} \\ ۱ & \text{تهی!} \end{cases}$$

نمودار fog را رسم می‌کنیم:

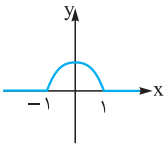


دو نقطه به طول‌های $\pm\sqrt{۲}$، نقطهٔ گوشه هستند و fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

۲) gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=۱-f^۲(x)=\begin{cases} ۱-(-۱)^۲ & x<-۱ \\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱ \\ ۱-۱^۲ & x>۱ \end{cases}$$
$$=\begin{cases} ۰ & x<-۱ \\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱ \\ ۰ & x>۱ \end{cases}$$

نمودار gof را رسم می‌کنیم:



دو نقطه به طول‌های ±۱، نقطهٔ گوشه هستند، پس gof در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست. پس دو تابع gof و fog، در کل در ۴ نقطه مشتق‌ناپذیرند.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ اول دامنهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

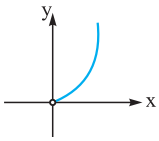
$$۹^{\log_۳ x} \Rightarrow x>۰ \Rightarrow D_f=(۰,+\infty)$$

(باید مثبت باشه)

حالا ضابطهٔ f را به کمک رابطهٔ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ ساده می‌کنیم:

$$f(x)=۹^{\log_۳ x} \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و ۹ را}} f(x)=x^{\log_۳ ۹}=x^۲$$

پس باید تابع $f(x)=x^۲$ با دامنهٔ $x>۰$ را رسم کنیم:



تذکر

در دفترچهٔ سؤالات، ۲ به شکل دیگری بود که ما خودمان آن را اصلاح کردیم. (مبدأ مختصاتش توپُر بود.)

۱۱۶- گزینهٔ ۴ اگر $u\to ۰$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} \tan u\sim u \\ \cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲} \end{cases}$$

چون کمان‌های tan و cos به سمت صفر می‌روند، پس از هر دو هم‌ارزی بالا می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\tan^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)}{(۱-\cos\sqrt{۲x})^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲}{(۱-(۱-\frac{(\sqrt{۲x})^۲}{۲}))^n}$$
$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{(۱-۱+\frac{۲x}{۲})^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}$$

عبارت داخل پرانتز را در مزدوج صورتش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۱+\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}+۱-x^۲})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{۲})^۲}{x^n}=\frac{x^۴}{۴x^n}$$

برای آن‌که کسر آخر در $x=۰$ حد داشته باشد، باید $n\le ۴$ باشد. با توجه به گزینه‌ها، طراح $n=۴$ را انتخاب کرده است! پس:

$$a=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۴}{۴x^۴}=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه: $a+n=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

۱۱۷- گزینهٔ ۱ اول در هر دو عبارت براکتی، $x=(-\frac{۱}{۲})^-$ را قرار می‌دهیم تا مقدار عددی براکت معلوم شود. حواستان باشد که $(-\frac{۱}{۲})^-$ یعنی $\frac{-۱}{۱/۹۹}$.

$$[\frac{۳}{x^۲}]=[\frac{۳}{(\frac{-۱}{۱/۹۹})^۲}]=[\frac{۳}{\frac{۱}{۴^-}}]=[۱۲^-]=۱۱$$

$$[\frac{-۲}{x^۲}]=[\frac{-۲}{(\frac{-۱}{۱/۹۹})^۲}]=[\frac{-۲}{\frac{۱}{۴^-}}]=[(-۸)^+]=-۸$$

حد داده‌شده، به شکل زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x-۵+۱۱}{۱۶x-(-۸)}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x+۶}{۱۶x+۸}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{۱۰x+۶}{۸(۲x+۱)}=\frac{-۵+۶}{۸\times ۰^-}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

۱۱۸- گزینهٔ ۴ تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج باید دو ریشه داشته باشد.

چون دو مجانب داریم، پس یکی از دو حالت زیر باید اتفاق بیافتد:

۱) تابع دو مجانب قائم داشته باشد، در این صورت تابع نباید مجانب افقی داشته باشد، یعنی باید $a=۰$ باشد. در این صورت ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\frac{-bx^۲+۲}{-bx+۲}$ درمی‌آید که مخرجش فقط یک ریشه دارد، پس این حالت رد می‌شود.

۲) تابع یک مجانب قائم و یک مجانب افقی داشته باشد. در این صورت چون مخرج دو ریشه داشت، پس یک ریشهٔ آن باید با صورت مشترک باشد. برای پیداکردن ریشهٔ مشترک صورت و مخرج، آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$ax^۳-bx^۲+۲=ax^۳-bx+۲\Rightarrow bx^۲-bx=۰$$

$$\Rightarrow bx(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}$$

بین دو جواب به دست آمده فقط $x=۱$ می‌تواند ریشهٔ صورت و مخرج باشد (چون $x=۰$، صورت و مخرج را صفر نمی‌کند).

$$a-b+۲=۰\Rightarrow b=a+۲$$

با جای‌گذاری تساوی بالا، ضابطهٔ f را فقط با پارامتر a می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{ax^۳-(a+۲)x^۲+۲}{ax^۳-(a+۲)x+۲}=\frac{ax^۳-ax^۲-۲x^۲+۲}{ax^۳-ax-۲x+۲}$$

$$=\frac{ax^۲(x-۱)-۲(x-۱)(x+۱)}{ax(x-۱)(x+۱)-۲(x-۱)}$$

$$\xrightarrow[\text{ساده می‌کنیم}]{\text{به }(x-۱)}f(x)=\frac{ax^۲-۲(x+۱)}{ax(x+۱)-۲}=\frac{ax^۲-۲x-۲}{ax^۲+ax-۲}$$

الان دو حالت داریم:

۱) مخرج f باید ریشهٔ $x=۱$ و یک ریشهٔ دیگر داشته باشد (که در کل می‌شود دو ریشه):

$$ax^۲+ax-۲=۰\xrightarrow{x=۱}a+a-۲=۰\Rightarrow a=۱$$

پس:

$$b=a+۲=۳$$

۲) مخرج تابع ساده‌شدهٔ f، ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta_{\text{مخرج}}=۰\Rightarrow a^۲-۴(a)(-۲)=۰\Rightarrow a^۲+۸a=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۰\ \text{✗}\\a=-۸\end{cases}$$

پس:

$$b=a+۲=-۶$$

هر دو حالت به دست آمده صحیح است ولی فقط حالت (۲) در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۱۹- گزینهٔ ۲ در صورت کسر، از ضرب تمام پرانتزها، جمله‌ای که بزرگ‌ترین توان را دارد، این است:

$$(a^۲x^۲)(a^۴x^۴)(a^۶x^۶)\dots(a^{۱۰۰}x^{۱۰۰})=(ax)^{(۲+۴+\dots+۱۰۰)}$$

مجموع اعداد زوج ۲ تا ۱۰۰ برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۵۰}{۲}(۲+۱۰۰)=۵۰\times ۵۱$$

پس در عبارت زیر رادیکال، فقط جملهٔ $(ax)^{۵۰\times ۵۱}$ و در مخرج هم فقط $a^{۴۹}x^k$ مهم است:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[۵۰]{(a^۲x^۲-۱)(a^۴x^۴-۱)\dots(a^{۱۰۰}x^{۱۰۰}-۱)}}{a^{۴۹}x^k\underbrace{-۱}_{\text{فداغظ}}}=-۱$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[۵۰]{(ax)^{۵۰\times ۵۱}}}{a^{۴۹}x^k}=-۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|^{۵۱}}{a^{۴۹}x^k}=-۱$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{|a|^{۵۱}(-x)^{۵۱}}{a^{۴۹}x^k}=-۱$$

پس باید $k=۵۱$ و $a=۱$ باشد.

۱۲۰- گزینهٔ ۲ چون $x\to ۰$، پس حق داریم از هم‌ارزی $\cos^n(u)\sim ۱-\frac{nu^۲}{۲}$ استفاده کنیم. ابتدا هم‌ارز تابع f را در $x=۰$ می‌نویسیم:

$$f(x)=\cos^۳(۲x)+ax^۲+b\sim(۱-\frac{۳(۲x)^۲}{۲})+ax^۲+b$$

$$=۱-۶x^۲+ax^۲+b=(a-۶)x^۲+b+۱$$

ضابطهٔ f' را هم حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=۲(a-۶)x$$

حالا از دو حد داده‌شده، کمک می‌گیریم:

$$۱)\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=۰\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{(a-۶)x^۲+(b+۱)}{x}=۰$$

$$\Rightarrow b+۱=۰\Rightarrow b=-۱$$

اگر $b+۱$ صفر نمی‌شد، حاصل حد، بی‌نهایت می‌شد.

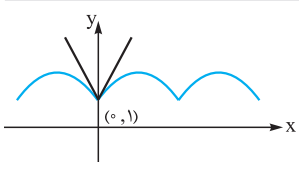
$$۲)\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=۲\Rightarrow\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲(a-۶)\cancel{x}}{\cancel{x}}=۲$$

$$\Rightarrow ۲(a-۶)=۲\Rightarrow a=۷$$

پس:

$$a+b=۷+(-۱)=۶$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=|\sin ۲x|+۱$ و خطوط مماس بر آن در $x=۰$، به صورت مقابل است:



BISTAKHETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

معادلهٔ نیم‌مماس‌های چپ و راست را می‌نویسیم و با نیمساز خواسته‌شده، قطع می‌دهیم:

۱) نیم‌مماس راست: ضابطهٔ f در 0^+: $f(x)=\sin(2x)+1$

$\Rightarrow f'(x)=2\cos(2x) \Rightarrow f'_+(0)=2$

پس شیب نیم‌مماس راست، $m=2$ و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$y-1=2(x-0) \Rightarrow y=2x+1$

۲) نیم‌مماس چپ: ضابطهٔ f در 0^-: $f(x)=-\sin(2x)+1$

$\Rightarrow f'(x)=-2\cos(2x) \Rightarrow f'_-(0)=-2$

پس شیب نیم‌مماس چپ، $m=-2$ و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$y-1=-2(x-0) \Rightarrow y=-2x+1$

دو نیم‌مماس را با خط $y=-x$ قطع می‌دهیم:

۱) $\left.\begin{matrix}y=2x+1\\ y=-x\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقاطع}} A=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

۲) $\left.\begin{matrix}y=-2x+1\\ y=-x\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقاطع}} B=(1,-1)$

طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(1+\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{1}{3})^2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

۱۲۲- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{x} \Rightarrow x\geq 0\\ \sqrt[3]{x^2-1} \xrightarrow{\text{مخرج}} x\neq \pm 1\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$$

در دو بازهٔ $[0,1)$ و $(1,+\infty)$، یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم.

۱) تابع $y=2\sqrt{x}$ در هر دو بازهٔ بالا صعودی اکید است.

۲) تابع $y=\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ را مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم:

$$\underbrace{y=x^2-1}_{\text{صعودی اکید}} \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} \underbrace{y=\sqrt[3]{x^2-1}}_{\text{صعودی اکید}}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \underbrace{y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}}_{\text{نزولی اکید}} \xrightarrow{\times\frac{-3}{2}} \underbrace{y=\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}}_{\text{صعودی اکید}}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است، پس تابع $f(x)$ صعودی اکید است.

$$f(x)=\underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}}_{\text{صعودی اکید}}$$

گزینه‌های ۱ و ۲ در این سؤال، خیلی شبیه هم هستند.

برای این‌که تکلیف این دو گزینه مشخص شود باید حد چپ و راست تابع $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ در $x=1$ بررسی کنیم:

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2+\frac{-3}{2\times 0^-}=2+(+\infty)=+\infty$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2+\frac{-3}{2\times 0^+}=2+(-\infty)=-\infty$

پس تابع در اطراف $x=1$، به صورت روبه‌رو است:

یعنی در کل این دو بازه (در اجتماعشان) صعودی نیست، بلکه در تک‌تک بازه‌ها صعودی است.

۱۲۳- گزینهٔ ۴ f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}$$

$$=\frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases}x=0 & \text{(ریشهٔ فرد)}\\ x=\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4} & \text{(ریشهٔ فرد)}\\ x=2 & \text{(ریشهٔ مرتبهٔ زوج مخرج)}\end{cases}$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم:

		0		2 (ریشهٔ زوج)		$2\sqrt[3]{4}$	
f'	+	0	−	ت ن	−	0	+
f	↗		↘		↘		↗
			نزولی		نزولی		

طول دو بازه‌ای که تابع f در آن نزولی است را حساب می‌کنیم:

بازهٔ اول: $(0,2) \Rightarrow$ طول بازه $=2-0=2$

بازهٔ دوم: $(2,2\sqrt[3]{4}) \Rightarrow$ طول بازه $=2\sqrt[3]{4}-2=2(\sqrt[3]{4}-1)$

طول بازهٔ کوچک‌تر $2(\sqrt[3]{4}-1)$ است.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ ریشه‌های f' در تابع درجهٔ سوم، طول نقاط اکسترمم تابع f هستند:

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x-12=0$

$$\xrightarrow{\div 6} x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=2\end{cases}$$

مختصات کامل نقاط را پیدا می‌کنیم:

$f(-1)=-2-3+12+1=8 \Rightarrow A(-1,8)$

$f(2)=16-12-24+1=-19 \Rightarrow B(2,-19)$

شیب پاره‌خط AB را حساب می‌کنیم: $m_{AB}=\frac{-19-8}{2-(-1)}=-9$

حالا f' را با -9 برابر قرار می‌دهیم:

$f'(x)=-9 \Rightarrow 6x^2-6x-12=-9$

$\Rightarrow 6x^2-6x-3=0 \xrightarrow{\div 3} 2x^2-2x-1=0$

$\xrightarrow{\Delta>0}$ ۲ جواب دارد.

پس دو نقطه روی f وجود دارند که شیب خط مماسشان -9 باشد.

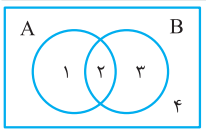
۱۲۵- گزینهٔ ۱ جدول ارزش گزاره‌ها را برای $p \Rightarrow (q \vee r)$ تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن ✓	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن ✓	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن ✓	ن	ن

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

همان‌طور که در جدول می‌بینیم در ۷ حالت گزارهٔ $p \Rightarrow (q \vee r)$ ارزش درست دارد که در سه حالت آن ارزش r نادرست است. بنابراین به احتمال $\frac{۳}{۷}$ ارزش آن نادرست است.

۱۲۶- گزینهٔ ۱ روش ۱ از آن‌جایی که $U = A \cup B$ است؛ یعنی ناحیهٔ ۴ در شکل مقابل برابر تهی است: $\varnothing = ۴$



از طرفی: $C = (A - B) \cup (B - A) = ۱,۳$

حالا رابطهٔ $((A' - B)' \cap C)' = B$ را برحسب ناحیه‌ها بازنویسی می‌کنیم:

$((۳ - ۲,۳)' \cap ۱,۳)' = ۲,۳$

$\Rightarrow (۱,۲,۳ \cap ۱,۳)' = ۲,۳ \Rightarrow (۱,۳)' = ۲,۳ \Rightarrow ۲ = ۲,۳$

اگر بخواهیم این رابطه برقرار باشد، باید ناحیهٔ ۳ نیز برابر تهی باشد.

بنابراین: $B \subseteq A$

روش ۲

$((A' - B)' \cap C)' = ((A' \cap B')' \cap C)'$

$= ((A \cup B) \cap C)' = (U \cap C)' = C' = A \cap B$

دقت کنید متمم C همان $A \cap B$ است. حالا:

$A \cap B = B \Rightarrow B \subseteq A$

۱۲۷- گزینهٔ ۳ روش ۱ عبارت $۲۰!$ را تجزیه می‌کنیم:

$۲۰! = (۲^۴) \times (۳ \times ۵) \times ۱۹ \times (۲ \times ۳^۲) \times ۱۷ \times (۲^۴) \times (۳ \times ۵)$
$\times (۲ \times ۷) \times ۱۳ \times (۲^۲ \times ۳) \times ۱۱ \times (۲ \times ۵) \times (۳)^۲ \times (۲^۳) \times ۷$
$\times (۲ \times ۳) \times ۵ \times (۲^۲) \times ۳ \times ۲ = ۲^{۱۸} \times ۳^۸ \times ۵^۴ \times ۷^۲ \times ۱۱ \times ۱۳$
$\times ۱۷ \times ۱۹$

بنابراین مجموع توان‌ها یا $\sum_{i=۱} a_i$ برابر است با:

$۱۸ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۳۶$

روش ۲ برای پیداکردن توان عدد اول p در تجزیهٔ $n!$ از رابطهٔ زیر می‌توان استفاده کرد:

$[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^۲}] + [\frac{n}{p^۳}] + \cdots$

با این روش می‌توان توان عدد ۲ و ۳ را در تجزیهٔ $۲۰!$ سریع‌تر به دست آورد.

$[\frac{۲۰}{۲}] + [\frac{۲۰}{۴}] + [\frac{۲۰}{۸}] + [\frac{۲۰}{۱۶}] = ۱۰ + ۵ + ۲ + ۱ = ۱۸$

$[\frac{۲۰}{۳}] + [\frac{۲۰}{۹}] = ۶ + ۲ = ۸$

پیداکردن توان بقیهٔ عددهای اول هم که ساده است.

۱۲۸- گزینهٔ ۳ تعداد داده‌ها ۲۲ تاست؛ بنابراین میانه برابر است با میانگین داده‌های یازدهم و دوازدهم که همان‌طور که از داده‌ها مشخص است دادهٔ یازدهم ۱۳ و دادهٔ دوازدهم ۱۴ و در نتیجه میانه ۱۳/۵ است.

هم‌چنین چارک اول میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها یعنی دادهٔ ششم یعنی عدد ۱۳ و چارک سوم میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها یعنی دادهٔ هفدهم است.

اگر $a > ۳۱$ باشد دادهٔ هفدهم برابر ۳۱ می‌شود. در این صورت اختلاف چارک اول از سوم برابر می‌شود با $۳۱ - ۱۳ = ۱۸$.

اما از آن‌جایی که در سؤال گفته شده این اختلاف برابر ۱۷ است، بنابراین دادهٔ هفدهم باید برابر a باشد، داریم:

$a - ۱۳ = ۱۷ \Rightarrow a = ۳۰$

حالا واریانس داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$\bar{x} = \frac{۱۱ \times ۳ + ۱۲ \times ۲ + ۱۳ \times ۶ + ۱۴ \times ۳ + ۲۸ \times ۲ + ۳۱ \times ۵ + ۳۰}{۲۲}$
$= ۱۹$

$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^۲}{n}$

$= \frac{۳ \times ۶۴ + ۲ \times ۴۹ + ۶ \times ۳۶ + ۳ \times ۲۵ + ۲ \times ۸۱ + ۵ \times ۱۴۴ + ۱۲۱}{۲۲}$

$= \frac{۱۹۲ + ۹۸ + ۲۱۶ + ۷۵ + ۱۶۲ + ۷۲۰ + ۱۲۱}{۲۲} = \frac{۱۵۸۴}{۲۲} = ۷۲$

احتیاط

توجه کنید اضافه‌کردن یک عدد ثابت به همهٔ داده‌ها تأثیری در واریانس آن‌ها ندارد.

۱۲۹- گزینهٔ ۳ اولین عدد ۱ (پایه) ۷ (سن) ۱ (جنسیت)، دومین عدد تحصیلی ۱۰۷۰۲ و به همین ترتیب دوازدهمین عدد ۱۰۷۱۲ است. در عدد بعدی ۰۷ به ۰۸ تبدیل می‌شود و دوازده عدد نیز با ۱۰۸ شروع می‌شوند. حالا ما صدمین عدد را می‌خواهیم. با توجه به این‌که $۱۰۰ = ۸ \times ۱۲ + ۴$ یعنی این‌که ۸ دستهٔ ۱۲تایی کامل می‌شود و عدد چهارم از دستهٔ پنجم را می‌خواهیم. رقم سمت چپ که ۱ است، اگر هشت دسته برویم جلو یعنی همهٔ عددهایی که دو رقم وسطشان ۰۷، ۰۸، ۰۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ است کامل می‌شوند (تا این‌جا ۹۶ عدد) و عددهای بعدی دو رقم وسطشان ۱۵ است.

پاسخ که مشخص شد، اما برای محکم‌کاری این عددها را می‌نویسیم:

۱۱۵۰۱, ۱۱۵۰۲, ۱۱۵۰۳, ۱۱۵۰۴

۱۳۰- گزینهٔ ۴ دو کارت از ۲۱ کارت را به تصادف خارج می‌کنیم، دو کارت را به دو حالت می‌توانیم کنار هم قرار دهیم. (برای مثال اگر شماره‌های کارت‌ها ۵ و ۱۲ باشند، دو عدد ۱۲۵ و ۵۱۲ به دست می‌آید.) بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $\binom{۲۱}{۲} \times ۲! = ۴۲۰$

اما دقت کنید که در حالت‌های زیر عددها تکراری می‌شوند.

الف) ترکیب دو دسته کارت $(\boxed{۲۱}, \boxed{x})$ و $(\boxed{۲}, \boxed{۱x})$ هر دو عدد $۲۱x$ را تولید می‌کند. (به ازای $x = ۱,۲,\ldots,۹$) یعنی ۹ حالت.

ت) ترکیب دو دسته کارت $(\boxed{۱}, \boxed{۱x})$ و $(\boxed{۱۱}, \boxed{x})$ هر دو عدد $۱۱x$ را تولید می‌کنند. (به ازای $x = ۱,۲,\ldots,۹$) یعنی ۹ حالت.

پ) ترکیب دو دسته کارت $(\boxed{۱}, \boxed{۱۲})$ و $(\boxed{۱}, \boxed{۲۱})$ عدد ۱۲۱ را تولید می‌کند؛ بنابراین در ۱۹ حالت عددهای تکراری داریم، در نتیجه تعداد کل اعضای مجموعهٔ A برابر است با: $۴۲۰ - ۱۹ = ۴۰۱$

حالا اگر بخواهیم عدد مضرب ۶ باشد، باید یکان آن زوج و مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد. در عددهایی که یکان‌ها زوج‌اند اما مضرب ۳ نیستند، (یعنی حالت‌های ۲۰,۱۶,۱۴,۱۰,۸,۴,۲) برای هر کدام ۷ حالت قابل قبول وجود دارد. برای درک بهتر همهٔ حالت‌هایی که یکان عدد ۲ است و حالت‌های مطلوب را ببینید:

۱۲✓	۳۲	۴۲✓	۵۲	۶۲	۷۲✓	۸۲
۹۲	۱۰۲✓	۱۱۲	۱۲۲	۱۳۲✓	۱۴۲	۱۵۲
۱۶۲✓	۱۷۲	۱۸۲	۱۹۲✓	۲۰۲	۲۱۲	

BISTAKETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

اما در مورد عددهایی که یکان آن‌ها مضرب ۶ است؛ یعنی ۱۲،۶ و ۱۸ شش حالت مطلوب وجود دارد. برای درک بهتر همهٔ حالت‌های یکان ۶ و حالت‌های مطلوب را ببینید:

۱۶	۲۶	۳۶✓	۴۶	۵۶	۷۶	۸۶
۹۶✓	۱۰۶	۱۱۶	۱۲۶✓	۱۳۶	۱۴۶	۱۵۶✓
۱۶۶	۱۷۶	۱۸۶✓	۱۹۶	۲۰۶	۲۱۶✓	

بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$۷\times۷+۳\times۶=۶۷$$

ولی این هنوز همهٔ ماجرا نیست. صورت نیز حالت‌های تکراری دارد. دو عدد ۱۱۴ و ۲۱۶ هر کدام به دو صورت قابل نوشتن و تکراری‌اند.

$$\left.\begin{matrix}\boxed{۲},\boxed{۱۶}\\ \boxed{۲۱},\boxed{۶}\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲۱۶ \qquad \left.\begin{matrix}\boxed{۱۱},\boxed{۴}\\ \boxed{۱},\boxed{۱۴}\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۱۱۴$$

بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $۶۷-۲=۶۵$

و در نتیجه احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با: $\frac{۶۵}{۴۰۱}$

همان‌طور که می‌بینید پاسخ درست در گزینه‌ها نیست و البته این سؤال هم بیشتر سؤال المپیاد ریاضی است تا کنکور!

۱۳۱- گزینهٔ ۲ عدد را $x^۲$ می‌نامیم. داریم:

$$۱۸\mid x^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲\times۳^۲}\in\mathbb{Z}$$

اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد، x حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین: $x=۶q \Rightarrow x^۲=۳۶q^۲$

از طرفی عدد پنج‌رقمی است، بنابراین:

$$۱۰۰۰۰\le ۳۶q^۲<۱۰۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} ۱۰۰\le ۶q<۱۰۰\sqrt{۱۰}$$

$$۱۰۰\le ۶q<۳۱۶ \Rightarrow ۱۶/۶<q<۵۲/۶$$

بنابراین $q\in\{۱۷,۱۸,\dots,۵۲\}$ و در نتیجه به‌ازای $۵۲-۱۷+۱=۳۶$ عدد رابطه برقرار است.

۱۳۲- گزینهٔ ۲ *این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است اما متأسفانه در کنکور سراسری آمده است.*

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم خوب است بدانید اگر عدد n به صورت $n=p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد برابر است با: $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$

بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $x=۲^m\times۵^n$ برابر است با: $(m+۱)(n+۱)$

حالا با توجه به این‌که: $\frac{x}{۴۰}=\frac{۲^m\times۵^n}{۲^۳\times۵}=۲^{m-۳}\times۵^{n-۱}$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $\frac{x}{۴۰}$ برابر است با: $(m-۲)\times n$

اختلاف تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۱۲تاست، بنابراین:

$$(m+۱)(n+۱)-n(m-۲)=۱۲$$

$$\Rightarrow mn+m+n+۱-nm+۲n=۱۲$$

$$\Rightarrow m+۳n=۱۱$$

دقت کنید که $m\ge ۳$ و $n\ge ۱$ است وگرنه $\frac{x}{۴۰}$ عددی طبیعی نمی‌شود.

دو حالت برای n و m وجود دارد:

الف) $m=۸, n=۱ \Rightarrow x=۲^۸\times۵=۱۲۸۰$

ب) $m=۵, n=۲ \Rightarrow x=۲^۵\times۵^۲=۸۰۰$

و چون حداقل مقدار x خواسته‌شده همین ۸۰۰ را در نظر می‌گیریم.

۱۳۳- گزینهٔ ۳ عدد $\overline{aba}$ مضرب ۱۲ است، بنابراین:

$$\overline{aba}=۱۰۰a+۱۰b+a=۱۰۱a+۱۰b\overset{۱۲}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{۹۶a}_{\text{مضرب ۱۲}}+۵a+\underbrace{۱۲b}_{\text{مضرب ۱۲}}-۲b\overset{۱۲}{\equiv}۰ \Rightarrow ۵a\overset{۱۲}{\equiv}۲b$$

واضح است که اگر بخواهیم عدد بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد، a باید زوج باشد. برای آن‌که حداقل تعداد عدد را پیدا کنیم، a را برابر ۲ و برای پیداکردن حداکثر مقدار عدد a را برابر ۸ فرض می‌کنیم:

الف) $a=۲$

$$\Rightarrow ۲b\overset{۱۲}{\equiv}۱۰ \xrightarrow{\div ۲} b\overset{۶}{\equiv}۵ \Rightarrow b=۵ \Rightarrow \text{عدد}=۲۵۲$$

ب) $a=۸$

$$\Rightarrow ۲b\overset{۱۲}{\equiv}۴۰\overset{۱۲}{\equiv}۴ \xrightarrow{\div ۲} b\overset{۶}{\equiv}۲ \Rightarrow b=۲,۸$$

و چون می‌خواهیم عدد بزرگ‌تر شود، b را برابر ۸ فرض می‌کنیم. در این صورت عدد برابر ۸۸۸ می‌شود. میانگین دو عدد برابر است با:

$$\frac{۲۵۲+۸۸۸}{۲}=۵۷۰$$

۱۳۴- گزینهٔ ۲ خارج قسمت عدد سه واحد بیشتر از باقی‌مانده است، بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} a & ۱۱ \\ \hline r & r+۳ \end{array}$$

$$a=۱۱(r+۳)+r, \quad ۰\le r<۱۱$$

$$\Rightarrow a=۱۱r+۳۳+r=۱۲r+۳۳ \Rightarrow a-۹=۱۲r+۲۴$$

واضح است که اگر r زوج باشد $a-۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر و اگر r فرد باشد، $a-۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست.

مقادیر زوج r عبارت‌اند از: ۰،۲،۴،۶،۸،۱۰

و تعداد کل مقادیر r نیز ۱۱تاست، بنابراین احتمال آن‌که r زوج باشد، برابر است با: $\frac{۶}{۱۱}$

۱۳۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $(۱۰-m)!\overset{۳۶}{\equiv}۳۶\overset{۳۶}{\equiv}۰$.

بنابراین $(۱۰-m)!$ باید بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد. اگر بخواهیم m بیشترین مقدار خود را داشته باشد، $(۱۰-m)$ باید تا حد امکان کوچک باشد.

کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی بخش‌پذیر بر ۳۶ عدد $۷۲۰=۶!$ است، بنابراین: $۱۰-m=۶ \Rightarrow m=۴$

حالا باقی‌ماندهٔ $۴^{۱۲۳}$ را بر ۱۵ به دست می‌آوریم:

$$۴^۲\overset{۱۵}{\equiv}۱ \xrightarrow{\text{به توان ۶۱}} ۴^{۱۲۲}\overset{۱۵}{\equiv}۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۱۲۳}\overset{۱۵}{\equiv}۴$$

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۳۶- گزینهٔ ۳ قبل از هر کار بررسی می‌کنیم احتمال این‌که در پرتاب دو تاس مجموع اعداد روشده بیشتر از ۹ باشد، چه‌قدر است. از جدول مربوط به پرتاب دو تاس استفاده می‌کنیم:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						✓
۵					✓	✓
۶				✓	✓	✓

$$P=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

حالا از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:

الف) در این حالت در ظرف دوم، ۱۰ مهره و در ظرف اول ۸ مهره است.

ب) در این حالت در ظرف اول ۱۰ مهره و در ظرف دوم ۸ مهره است.

الف) احتمال این‌که مهرهٔ خارج‌شده از ظرف دوم قرمز باشد:

$$\underbrace{\frac{۱}{۶}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۶}{۱۰}}_{\substack{\text{حالتی که یک مهرهٔ قرمز}\\ \text{به ظرف دوم اضافه شده}\\ \text{(دقت کنید در این حالت ۴ مهرهٔ آبی}\\ \text{و ۶ مهرهٔ قرمز در ظرف دوم است.)}}}+\underbrace{\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۵}{۱۰}}_{\substack{\text{حالتی که یک مهرهٔ آبی}\\ \text{به ظرف دوم اضافه شده}\\ \text{(دقت کنید در این حالت ۵ مهرهٔ آبی}\\ \text{و ۵ مهرهٔ قرمز در ظرف دوم است.)}}}$$

$$=\frac{۱۵}{۵۴۰}+\frac{۳۶}{۵۴۰}=\frac{۵۱}{۵۴۰}$$

ب) احتمال این‌که مهرهٔ خارج‌شده از ظرف اول قرمز باشد:

$$\underbrace{\frac{۵}{۶}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۰}}_{\substack{\text{حالتی که یک مهرهٔ قرمز}\\ \text{به ظرف اول اضافه شود}\\ \text{(دقت کنید در این حالت ۷ مهرهٔ قرمز}\\ \text{و ۳ مهرهٔ آبی در ظرف اول است.)}}}+\underbrace{\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۱۰}}_{\substack{\text{حالتی که یک مهرهٔ آبی}\\ \text{به ظرف اول اضافه شود}\\ \text{(دقت کنید در این حالت ۴ مهرهٔ آبی}\\ \text{و ۶ مهرهٔ قرمز در ظرف اول است.)}}}$$

$$=\frac{۱۲۰}{۵۴۰}+\frac{۱۷۵}{۵۴۰}=\frac{۲۹۵}{۵۴۰}\Rightarrow\frac{۵۱}{۵۴۰}+\frac{۲۹۵}{۵۴۰}=\frac{۳۴۶}{۵۴۰}=\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$$

۱۳۷- گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که $\frac{۱۰}{x_۴}$ باید عددی طبیعی باشد، $x_۴$ می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۵ یا ۱۰ باشد. در هر کدام از این حالت‌ها تعداد جواب‌ها را پیدا کرده، با هم جمع می‌کنیم:

$$x_۴=۱\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$$

$$\begin{cases}k=۳\\ n=۱۰\end{cases}\Rightarrow\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۲}{۲}=۶۶$$

$$x_۴=۲\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۵$$

$$\begin{cases}k=۳\\ n=۵\end{cases}\Rightarrow\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

$$x_۴=۵\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۲$$

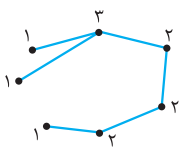
$$\begin{cases}k=۳\\ n=۲\end{cases}\Rightarrow\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۴}{۲}=۶$$

$$x_۴=۱۰\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۱$$

$$\begin{cases}k=۳\\ n=۱\end{cases}\Rightarrow\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۳}{۲}=۳$$

$$\xrightarrow{+}\ ۶۶+۲۱+۶+۳=۹۶$$

۱۳۸- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در یک گراف همبند از مرتبهٔ n حداقل تعداد یال‌ها برابر $n-۱$ است. در این سؤال هم می‌توان گرافی با حداقل یال طوری رسم کرد که درجهٔ بزرگ‌ترین رأس آن برابر ۳ باشد. برای مثال به گراف مقابل نگاه کنید:



در کل خوب است بدانید حداقل تعداد یال‌های یک گراف همبند از مرتبهٔ n به بزرگ‌ترین درجهٔ یک رأس ربطی ندارد و همواره $n-۱$ است.

۱۳۹- گزینهٔ ۴ سطر و ستون سوم را که به راحتی می‌توان تکمیل کرد.

	a	۳		
	۳	۱	۴	
۴	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
b		۲		

حالا به ستون چهارم نگاه کنید. عدد بالایی نمی‌تواند ۳ باشد (چون در سطر اول ۳ داریم.) بنابراین عدد بالایی این ستون ۵ و عدد پایینی آن ۳ است.

	a	۳	۵	
	۳	۱	۴	
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
b		۲	۳	

حالا جای چهارتا ۳ در جدول مشخص شده و بنابراین جای پنجمین ۳ در جدول، چهارمین عدد ستون اول است. حالا سطر چهارم را نیز می‌توان تکمیل کرد و به مربع مقابل رسید:

	۴	۳	۵	
۵	۳	۱	۴	
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
b	۵	۲	۳	

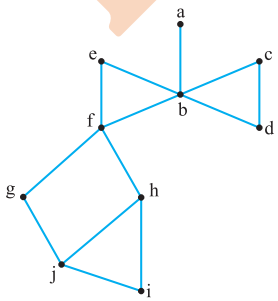
مشخص است که a برابر ۵،۳،۲،۱ نمی‌تواند باشد، پس $a=۴$ و در نتیجه در سطر پنجم دومین عدد برابر ۵ است. حالا جای چهار عدد ۵ در مربع مشخص است و به ناچار عدد ۵ پنجم در دومین جایگاه سطر اول قرار می‌گیرد. حالا مشخص است که b نمی‌تواند ۲،۳،۵،۴ باشد بنابراین: $b=۱$

پس زوج مرتب (a,b) برابر $(۴,۱)$ است.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ و ۴ ۱) نادرست است

زیرا $\{b,h\}$ احاطه‌گر نیست چون رأس g در آن احاطه نمی‌شود.

۲) $\{b,g,i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است زیرا همهٔ رأس‌ها را احاطه می‌کند و هیچ‌کدام از این سه رأس را نیز نمی‌توان حذف کرد. چون با حذف هر کدام از این سه رأس خود آن رأس دیگر احاطه نمی‌شود.



۳) $\{a,c,h\}$ نیز احاطه‌گر نیست چون برای مثال رأس g در آن احاطه نمی‌شود.

DANESHGAHI TAKHTAKETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۴ رأس‌هایی که هر کدام از رأس‌های مجموعهٔ داده‌شده احاطه می‌کنند را زیر آن‌ها می‌نویسیم:

$$\underset{b}{\{a,}\ \underset{b\ b}{c,}\ \underset{d}{f,}\ \underset{e\ g}{j\}}\ \underset{h}{b}\ \underset{g\ i}{g}\ \underset{h}{h}$$

همان‌طور که می‌بینید همهٔ رأس‌ها احاطه می‌شوند. هم‌چنین هیچ‌کدام از این رأس‌ها را نمی‌توان حذف کرد. چون با حذف هر کدام از آن‌ها خود آن رأس‌ها احاطه نمی‌شود. بنابراین این مجموعه نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

۱۴۱- گزینهٔ ۱ زاویه‌ای که بردار $\vec{a}$ با محور zها می‌سازد، زاویهٔ بردار $\vec{a}$ با بردار یکّهٔ محور zها یعنی $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ است. بنابراین:

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|} = \frac{(-۱,\alpha,۱).(۰,۰,۱)}{\sqrt{۱+\alpha^۲+۱}\times ۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۲+۲}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{\alpha^۲+۲}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+۲=۲ \Rightarrow \alpha^۲=۰ \Rightarrow \alpha=۰$$

حالا که α پیدا شد، بردار $\vec{a}$ مشخص است و می‌توانیم $\vec{a}\times\vec{b}$ را محاسبه کنیم.

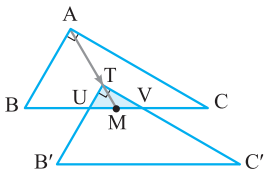
$$\vec{u}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ \frac{-۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۲ \end{vmatrix} = \frac{-۲}{۳}i+\frac{۲}{۳}j-\frac{۲}{۳}k$$

سؤال از ما زاویهٔ بین $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور zها را خواسته!
اگر زاویهٔ بین $\vec{u}$ و $\vec{k}$ را پیدا کنیم، کار تمام است.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{k}}{|\vec{u}||\vec{k}|} = \frac{(\frac{-۲}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{-۲}{۳}).(۰,۰,۱)}{\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}}\times ۱}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{-۲}{۳}}{\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل، مساحت مثلث TUV، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC است، بنا به ویژگی‌های انتقال، TU و TV به ترتیب با AB و AC موازی هستند، پس مثلث TUV با مثلث ABC متشابه است. می‌دانیم نسبت تشابه دو مثلث برابر با نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها است و نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها است، پس داریم:



$$\frac{S(TUV)}{S(ABC)}=k^۲ \text{ (نسبت مساحتی)} \Rightarrow k^۲=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{TM}{AM}=k \text{ (نسبت میانه‌های متناظر)} \Rightarrow \frac{TM}{AM}=\frac{۱}{۴} \quad (*)$$

AM میانهٔ وارد بر وتر است، پس طول آن، نصف طول وتر است، یعنی:

$$AM=\frac{۱}{۲}BC=۴$$

پس:

$$(*) \Rightarrow \frac{TM}{۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow TM=۱$$

$$\Rightarrow AT=AM-TM=۴-۱=۳$$

۱۴۳- گزینهٔ ۱ یک راه این است که دو ماتریس اول را ضرب کنیم و سپس حاصل را در ماتریس سوم ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A مشخص شود. اما ساده‌تر این است که سطر سوم ماتریس اول را در دو ماتریس بعدی ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A (مستقیم) به دست آید.

$$\text{سطر سوم ماتریس A} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{سطر سوم ماتریس A} = \begin{bmatrix} ۳ & ۷ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{سطر سوم ماتریس A} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر با $۳=۵-۱+۷$ است.

۱۴۴- گزینهٔ ۴ *این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی هندسه ۳ است.*

A^T را ترانهادهٔ ماتریس A گویند که از تعویض جای سطر اول با ستون اول، سطر دوم با ستون دوم و... ایجاد می‌شود. یعنی اگر درایه‌های ستون اول ماتریس A را در سطر اول و درایه‌های ستون دوم ماتریس A را در سطر دوم بنویسیم، A^T ایجاد می‌شود. بنابراین:

$$A^T=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

با جایگزین‌کردن A^T در رابطهٔ $BA^TA=۵۲I$ و به کمک قواعد وارون ماتریس‌ها می‌توانیم به ماتریس B برسیم.

$$B\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=۵۲I$$

$$\Rightarrow B\times\begin{bmatrix} ۱۴ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}=۵۲I \Rightarrow B=۵۲\begin{bmatrix} ۱۴ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}I$$

$$\Rightarrow B=۵۲(\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۴ & ۱۴ \end{bmatrix})$$

$$\Rightarrow B=۲\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۴ & ۱۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & -۸ \\ -۸ & ۲۸ \end{bmatrix}$$

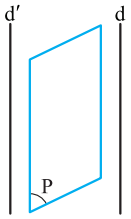
همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B برابر با ۲۸ است.

دقت کنید

تعریف ترانهاده، در کتاب درسی هندسه ۳ وجود ندارد و مربوط به کتاب‌های نظام آموزشی قبلی است.

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

۱۴۵- گزینهٔ ؟ مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله باشند روی صفحهٔ p قرار دارند که با دو خط d و d' موازی است و دقیقاً در وسط دو خط قرار دارد. ضمناً صفحهٔ p بر صفحهٔ گذرنده از d و d'، عمود است.



بنابراین (۱) و (۲) نادرست هستند. اگر در (۲) گفته بود: «در صفحهٔ عمود بر **صفحهٔ گذرا از** آن دو خط قرار می‌گیرند»، این گزینه را می‌توانستیم به عنوان پاسخ انتخاب کنیم!

مجموعه نقاطی **از صفحه** که از یک نقطه و یک خط که از آن نقطه نمی‌گذرد، به یک فاصله باشند، روی منحنی سهمی‌شکل قرار دارند. چون گفته **فضا**، این گزینه نادرست است.

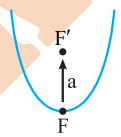
مجموعه نقاطی از **صفحه** که مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ آن از دو نقطهٔ ثابت در **صفحه**، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند. چون گفته **فضا**، این گزینه نادرست است.

۱۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا باید مختصات کانون و رأس سهمی را پیدا کنیم.

$$(x-1)^2-12y=6 \Rightarrow (x-1)^2=12y+6$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=12(y+\frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \text{رأس سهمی}: F=(1,\frac{-1}{2}) \\ 4a=12 \Rightarrow a=3 \end{cases}$$

سهمی قائم است و دهانهٔ سهمی به سمت yهای مثبت باز می‌شود، بنابراین:



کانون‌های سهمی: $F'=(1,\frac{-1}{2}+3)=(1,\frac{5}{2})$

با توجه به این‌که F و F' کانون‌های بیضی هستند، مرکز بیضی (W) وسط F و F' قرار دارد. پس:

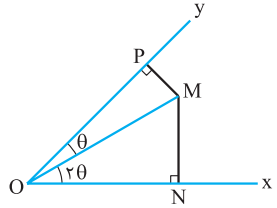
$$W=\frac{F+F'}{2}=\frac{(1,\frac{-1}{2})+(1,\frac{5}{2})}{2}=(1,1)$$

سؤال از ما فاصلهٔ مرکز بیضی (W) را از مبدأ مختصات خواسته، بنابراین:

$$OW=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

۱۴۷- گزینهٔ ؟ از این‌که گفته «اندازهٔ طول شش‌ضلعی محاط‌شده» می‌توانیم نتیجه بگیریم که شش‌ضلعی منتظم مدّ نظر بوده، چون در غیر این صورت معلوم نیست طول کدام ضلع شش‌ضلعی را می‌خواهد؛ اما مشکل این است که شش‌ضلعی منتظم را نمی‌توان درون مثلث مختلف‌الاضلاع محاط کرد! سؤال قابل حل نیست.

۱۴۸- گزینهٔ ۴ از این‌که $2M\hat{O}y=x\hat{O}M$، در نظر می‌گیریم $M\hat{O}y=\theta$ و $x\hat{O}M=2\theta$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ MON داریم:

$$\frac{MN}{OM}=\sin 2\theta \Rightarrow MN=OM.\sin 2\theta$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MOP داریم:

$$\frac{MP}{OM}=\sin\theta \Rightarrow MP=OM.\sin\theta$$

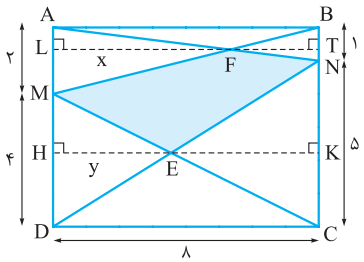
حالا از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{MN}{MP}=\frac{OM.\sin 2\theta}{OM.\sin\theta}=\frac{OM(2\sin\theta\cos\theta)}{OM\sin\theta}=2\cos\theta$$

$$=2(\frac{OP}{OM})=\frac{2OP}{OM}$$

درست است که سؤال را لابه‌لای سؤال‌های هندسه آورده‌اند، اما بیشتر سؤال حسابان (مبحث مثلثات) است تا هندسه!

۱۴۹- گزینهٔ ۱ مطابق شکل در دو مثلث متشابه FAM و FNB، نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر با نسبت تشابه است:



$$\frac{FL}{FT}=\frac{AM}{BN}\Rightarrow\frac{x}{8-x}=\frac{2}{1}\Rightarrow x=16-2x\Rightarrow x=\frac{16}{3}$$

با همین استدلال در دو مثلث متشابه EMD و ECN هم داریم:

$$\frac{EH}{EK}=\frac{MD}{NC}\Rightarrow\frac{y}{8-y}=\frac{4}{5}\Rightarrow 5y=32-4y\Rightarrow y=\frac{32}{9}$$

در نهایت داریم:

$$S(MENF)=S(AND)-S(AFM)-S(DEM)$$

$$=\frac{6\times 8}{2}-\frac{\frac{16}{3}\times 2}{2}-\frac{\frac{32}{9}\times 4}{2}=24-\frac{16}{3}-\frac{64}{9}$$

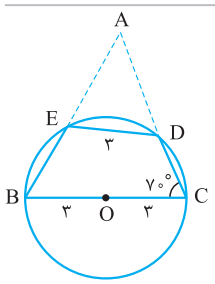
$$=\frac{216}{9}-\frac{48}{9}-\frac{64}{9}=\frac{104}{9}$$

۱۵۰- گزینهٔ ۱ زاویهٔ حادهٔ بین هر دو نیمساز خارجی یک مثلث، برابر است با 90° منهای نصف زاویهٔ سوم مثلث. با این توضیح، هر کدام از زاویه‌های مثلث که بزرگ‌تر باشد، زاویهٔ بین نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ دیگر آن از همه کوچک‌تر است.

هر مثلث می‌تواند حداکثر یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد که حتماً بزرگ‌ترین زاویهٔ آن هم هست. پس کوچک‌ترین زاویهٔ بین دو نیمساز خارجی در مثلثی که زاویهٔ 138° دارد، برابر است با:

$$90^\circ-\frac{138^\circ}{2}=21^\circ$$

۱۵۱- گزینهٔ ۳ اگر طول یک وتر برابر با شعاع دایره باشد، کمان نظیر آن وتر 60° است. با این توضیح، در شکل روبه‌رو داریم $\overset{\frown}{ED}=60^\circ$، از طرفی:



زاویهٔ محاطی $\hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BED}\Rightarrow 70^\circ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BED}$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BED}=140^\circ$$

BISTAKHTAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

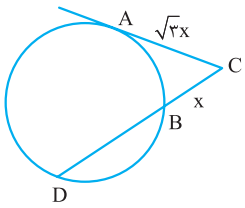
از آن‌جا که BC قطر دایره است، داریم:

$$\overset{\frown}{BED}+\overset{\frown}{DC}=180^\circ \Rightarrow 140^\circ+\overset{\frown}{DC}=180^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{DC}=40^\circ$$

و در نهایت: $\overset{\frown}{EDC}=\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{DC}=60^\circ+40^\circ=100^\circ$

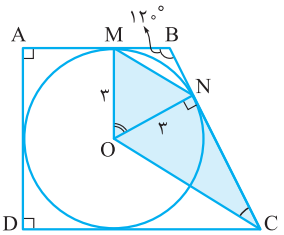
دیدید که متقاطع‌بودن امتداد وترهای BE و CD در نقطهٔ A، در حل مسأله بی‌تأثیر است.

۱۵۲- گزینهٔ ۳ طبق فرض سوال $\frac{AC}{BC}=\sqrt{3}$، پس در نظر می‌گیریم $BC=x$ و $AC=\sqrt{3}x$؛ با استفاده از روابط طولی داریم:



$$CA^2=CB.CD \Rightarrow (\sqrt{3}x)^2=x.CD$$
$$\Rightarrow 3x^2=x.CD \Rightarrow CD=3x$$
$$\Rightarrow DB=CD-CB=2x \Rightarrow \frac{DB}{BC}=\frac{2x}{x}=2$$

۱۵۳- گزینهٔ ۱ از نقطهٔ O به N وصل می‌کنیم، ON بر BC عمود است (همان‌طور که OM بر AB عمود است) و طول ON برابر است با طول شعاع دایره، یعنی $ON=3$. مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است، پس در چهارضلعی BMON داریم $M\hat{O}N=60^\circ$، یعنی مثلث $\overset{\Delta}{MON}$ مثلث متساوی‌الساقینی است که یک زاویهٔ 60° دارد، پس متساوی‌الاضلاع است و داریم:



$$S(\overset{\Delta}{MON})=\frac{\sqrt{3}}{4}OM^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 9=\frac{9}{4}\sqrt{3}$$

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD هم 360° است، پس $B\hat{C}D=60^\circ$ و از آن‌جا که O مرکز دایرهٔ محاطی ABCD است، پس CO نیمساز زاویهٔ C است، یعنی $O\hat{C}N=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{CON}:\cot 30^\circ=\frac{CN}{ON} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{CN}{3} \Rightarrow CN=3\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow S(\overset{\Delta}{CON})=\frac{1}{2}ON.CN=\frac{1}{2}(3)(3\sqrt{3})=\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

در نهایت داریم:

$$S(OMNC)=S(\overset{\Delta}{MON})+S(\overset{\Delta}{CON})=\frac{9}{4}\sqrt{3}+\frac{9}{2}\sqrt{3}$$
$$=\frac{9}{4}\sqrt{3}+\frac{18}{4}\sqrt{3}=\frac{27}{4}\sqrt{3}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم محل برخورد دو قطر دایره، مرکز دایره است. بنابراین:

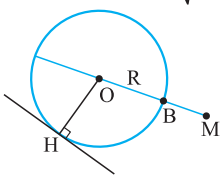
$$\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}\xrightarrow{+} 2x=4 \Rightarrow x=2, y=-1$$

مرکز دایره، نقطهٔ $O(2,-1)$ است.

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر با طول شعاع دایره است.

$$R=OH=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

به شکل دقت کنید!



نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره از نقطهٔ M، نقطهٔ B است.

(نقطهٔ M روی امتداد قطر گذرنده از B واقع است.)

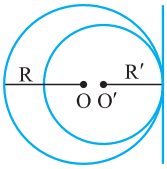
اگر فاصلهٔ O تا M را منهای طول شعاع دایره کنیم، فاصلهٔ M تا B به دست می‌آید.

$$OM=\sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$$

بنابراین:

$$MB=OM-R=\sqrt{5}-2$$

۱۵۵- گزینهٔ ۳ از این‌که دو دایره **فقط یک مماس‌مشترک** دارند نتیجه می‌گیریم دو دایره **مماس‌داخل**‌اند.



طول خط‌المرکزین (فاصلهٔ مرکز دو دایره) برابر با $|R-R'|$ است. بنابراین:

$$|(a^2-2)-(6a-1)|=6$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(1)\ a^2-2-6a+1=6 \Rightarrow a^2-6a-7=0\\ \Rightarrow (a+1)(a-7)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=-1 & \text{غ ق ق}\\ a=7\end{cases}\\ (2)\ a^2-2-6a+1=-6 \Rightarrow a^2-6a+5=0\\ \Rightarrow (a-1)(a-5)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=1 & \text{غ ق ق}\\ a=5\end{cases}\end{cases}$$

دقت کنید

طول شعاع دایره، مقداری مثبت است. اگر $a=-1$ باشد طول شعاع دو دایره منفی می‌شود و اگر $a=1$ باشد، طول شعاع یک دایره، منفی می‌شود که غیرممکن است.

میانگین مقادیر ممکن برای $a=\frac{5+7}{2}=6$

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

خیلی سبز!

۱۴۰۰

خارج از کشور

دفترچه شماره ۲
آزمون اختصاصی

ویژه نظام آموزشی ۳-۳-۶

آزمون سراسری ورودی دانشگاه های کشور - ۱۴۰۰

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
آزمون اختصاصی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

• تعداد سؤال: ۱۳۵ • مدت پاسخگویی: ۱۷۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شمارهٔ سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۵۵	۱۰۱	۱۵۵	۸۵ دقیقه
۲	فیزیک	۴۵	۱۵۶	۲۰۰	۵۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۵	۲۰۱	۲۳۵	۳۵ دقیقه

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

ریاضیات

۱۰۱- اگر به ازای اعداد مثبت و مخالف یک a، b و c، تساوی $\log_a c + \log_b c = ۱$ برقرار باشد، آن‌گاه $\log_c a.\log_c b$، کدام است؟

۱) $\log_c(ab)$ ۲) $۲\log_c(ab)$ ۳) $\log_c(a+b)$ ۴) $۲\log_c(a+b)$

۱۰۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\log_۲(۴^x + ۱۵) = x + ۳$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) $\log_۲ ۱۵$ ۴) $\log_۴ ۱۵$

۱۰۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^۲ + \sqrt{-x^۲ + ۶x - ۸}} + \sqrt{x + \sqrt{-x^۳ + ۴x^۲ + ۲۵x - ۱۰۰}} = x + ۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۰۴- فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲-۱)x^۲ - ۴mx + ۴)(۲x-۳)}{x - ۳\sqrt{x} + ۲} \geq ۰$ فقط یک بازه باشد. مقدار m، کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۰۵- ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)} + \frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$، کدام است؟

۱) $\cos(\frac{\theta}{۲})$ ۲) $\sin(\frac{\theta}{۲})$ ۳) $۲\cot(\frac{\theta}{۲})$ ۴) $۲\tan(\frac{\theta}{۲})$

۱۰۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(x)\cos(۲x) + \sin(x) = ۱$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

۱۰۷- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۰۸- باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲ + ۲x$ به ترتیب $۳x + ۱$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-۲) = ۳$، آن‌گاه مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x + ۲$، کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

۱۰۹- دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = ۲ - \frac{۱}{a_n}$ با شرط $a_۱ = -۱$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله، کدام است؟

۱) -۲۰۱ ۲) -۱۹۹ ۳) -۱۹۷ ۴) ۱۹۷

۱۱۰- دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} ۲^k & ; n = ۳k \\ -۲k + ۴ & ; n = ۳k+۱ \\ [\frac{n}{k+۲}] + a & ; n = ۳k+۲ \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، میانگین جملات بیست‌ونهم و سی‌ام دنباله، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{-۴۳}{۶}$ ۲) -۷ ۳) ۵۰۵ ۴) ۱۰۲۴

۱۱۱- فرض کنید $[a,b]$ برد تابع $f(x) = ۲^{-\sqrt{۵\sin^۲(x)-۱}}$ باشد. مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۱۲- اگر برد تابع $f(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۱۲ + \sqrt{[x]-[x]}} - ۱)$، برابر $(\log_۲ ۳, \log_۲ ۵)$ باشد، دامنهٔ تابع f، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $[۳,۹)$ ۲) $[۳,۸]$ ۳) $[۲,۹)$ ۴) $[۲,۸]$

۱۱۳- نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + ۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

۱) $(۱-\sqrt{۵}, ۰)$ ۲) $(-\sqrt{۵}, ۰)$ ۳) $(۰, ۱-\sqrt{۵})$ ۴) $(۰, -\sqrt{۵})$

۱۱۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -۱ & x < -۱ \\ x & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۱ & x > ۱ \end{cases}$ و $g(x) = ۱ - x^۲$. ماکزیمم مقدار تابع $gof - fog$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

BISTAKETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۱۵- فرض کنید تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x=1$ و $x=3$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟

۱) f تابعی فرد است.
۲) f تابعی زوج است.
۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.
۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

۱۱۶- فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos(\sqrt{3x}))} = a$ باشد. مقدار a^n کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{9}$
۲) $\frac{2}{9}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۷- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{16x-[-\frac{2}{x^2}]}{24x+[\frac{3}{x^2}]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$
۲) $+\infty$
۳) صفر
۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۸- اگر تابع $f(x)=\frac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}$، فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

۱۱۹- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^{2n}(x)$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۱۲۰- فرض کنید $f(x)=\sin^n(x^2)$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos(x))^m} = 32\sqrt{2}$. مقدار $2m+n$، کدام است؟

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

۱۲۱- از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}+2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{15}$
۲) $\frac{8}{15}$
۳) $\frac{225}{289}$
۴) $\frac{240}{289}$

۱۲۲- مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x)=3\sqrt[3]{x}+|x|$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $[-1,\infty)$
۲) $(-\infty,\infty)$
۳) $(-1,0)\cup(0,\infty)$
۴) $[-3\sqrt{3},0]$

۱۲۳- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2}; x\in(-2,2)$، در آن ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۲۴- فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^4-6x^2+5$ باشند. زاویهٔ بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

۱۲۵- ارزش گزارهٔ $(p\vee q)\Rightarrow r$، نادرست است. احتمال این‌که q نادرست باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{3}{8}$
۴) $\frac{1}{2}$

۱۲۶- فرض کنید $C=(A-B)\cup(B-A)$. حاصل $(A'\cap B')'\cap C'$، کدام است؟

۱) $A\cap B$
۲) $A\cup B$
۳) C
۴) C'

۱۲۷- حاصل عبارت $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$، کدام است؟

۱) $n2^{n-1}$
۲) $n2^n$
۳) $(n-1)2^{n-1}$
۴) $(n-1)2^n$

۱۲۸- جدول فراوانی داده‌های زیر مفروض است. اگر مقدار میانه برابر ۱۳ باشد، واریانس داده‌ها، کدام است؟

داده	a	۲۸	۲۷	۲۶	۱۴	۱۳	۱۲	۸
فراوانی	۱	۵	۱	۱	۳	۶	۲	۳

۱) ۵۴/۸۶
۲) ۵۵/۰۳
۳) ۵۵/۳۶
۴) ۵۵/۶۳

۱۲۹- برای یک مجموعهٔ ۱۰۰ نفری از شهروندان یک شهر یک کد شش‌رقمی به صورت زیر ساخته می‌شود: دو رقم سمت راست، سن شهروند (۰۱ تا ۸۵)، سه رقم بعدی تعداد افراد هم‌سن (۱۰۰ ـ ۰۰۰) و رقم ششم جنسیت (مرد ۱، زن ۲) اختصاص می‌یابد. سپس کدهای به دست آمده را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می‌دهیم، سن مورد انتظار برای ده هزارمین عضو مجموعه، کدام است؟ (اگرچه ممکن است شهروندی به آن اختصاص نیابد.)

۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۵۴
۴) ۵۵

BISTAKETAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۳۰- روی هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ را نوشته و سپس در یک کیسه قرار می‌دهیم. سپس به دلخواه یک کارت از کیسه بیرون می‌آوریم. اگر عدد زوج باشد، یک عدد دیگر از کیسه بیرون می‌آوریم و در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم. اگر عدد فرد باشد یک تاس پرتاب کرده و عدد روشده را در سمت راست عدد اول قرار می‌دهیم، سپس از اعداد ساخته‌شده، در همهٔ حالت‌های ممکن، مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهیم. یک عدد از مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۹}{۳۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۳۱- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۰} \cong ۲/۱)$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۲- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x = ۶^m \times ۱۰^n$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۵x$ کم‌تر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x، کدام است؟

۱) ۱۲۹۶ ۲) ۲۳۰۴ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۸۷۰۴

۱۳۳- تعداد اعداد شش‌رقمی به صورت $\overline{abaaba}$ که مضرب ۸۸ باشند، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۴- مجموع باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-۸$ بر ۳۶، برابر ۲۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۳}$ ۴) $\frac{۳}{۱۳}$

۱۳۵- اگر m کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $m!$ بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^{۳۳۲}$ بر ۳۱، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۲۵

۱۳۶- در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره آبی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۱۳۷- تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه معادلات $\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۹ \\ x_۴ + x_۵ = ۷ \end{cases}$، کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۳۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۶۸

۱۳۸- اگر درجهٔ دو رأس یک درخت مرتبهٔ ۸، برابر ۳ و ۵ باشد، تعداد رئوس با درجهٔ ۲ از درخت مورد نظر، کدام است؟

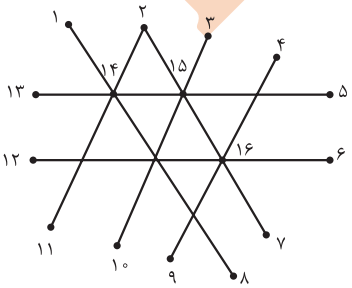
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۹- مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a,b)، کدام است؟

		۳		
b	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
				a

۱) $(۴,۵)$
۲) $(۴,۲)$
۳) $(۱,۵)$
۴) $(۱,۲)$

۱۴۰- برای گراف زیر، عدد احاطه‌گری مینیمال کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۴۱- بردارهای $\vec{a} = (-۱, \alpha, ۲)$ و $\vec{b} = (-\frac{۴}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۲)$ در فضا مفروض‌اند. اگر بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ موازی بردار $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ باشد، مقدار α، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۳ ۴) هیچ مقداری برای α به دست نمی‌آید.

DISTAKTAB

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

۱۴۲- اگر ماتریس ناصفر $B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix}5&-2\\4&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a، کدام است؟

۱) -4
۲) صفر
۳) 4
۴) 12

۱۴۳- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

۱) 12
۲) 17
۳) 19
۴) 21

۱۴۴- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&a&3\\-1&1&1\end{bmatrix}$ و $AA^TB=52I$. اگر $|B|=104$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) -2
۲) صفر
۳) 1
۴) 2

۱۴۵- کدام عبارت زیر درست است؟

۱) مجموعهٔ خطوط عمود بر یک خط در فضا، بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.
۲) مجموعهٔ نقاطی که از یک خط مفروض در فضا، متساوی‌الفاصله‌اند، روی سطح یک کره قرار می‌گیرند.
۳) مجموعهٔ نقاطی که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت در فضا، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.
۴) مجموعهٔ خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه، زاویهٔ یکسان می‌سازند، روی سطح یک مخروط قرار می‌گیرند.

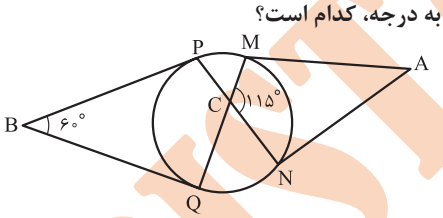
۱۴۶- بیضی با معادلهٔ $16(y+1)^2+25(x-1)^2=100$ با کانون‌های F و F' مفروض است. اگر طول پاره‌خط OF کوتاه‌تر از OF' باشد، معادلهٔ سهمی با رأس F و کانون F'، کدام است؟

۱) $(x-1)^2=12y+6$
۲) $(y+1)^2=12x+6$
۳) $(x-1)^2=-12y+6$
۴) $(y+1)^2=-12x+6$

۱۴۷- رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر قرار دارد، به طوری که اضلاع آن بر یکدیگر عمودند. نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر، کدام است؟

۱) 3
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $3/5$
۴) 4

۱۴۸- پاره‌خط‌های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویهٔ MAN، به درجه، کدام است؟



۱) 60
۲) 65
۳) 70
۴) 75

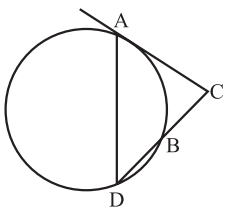
۱۴۹- در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱، طول یکی از ارتفاع‌ها برابر $AH=8$ است. اگر M، N و P وسط اضلاع باشند، مساحت چهارضلعی که M، N، P و H رأس‌های آن هستند، کدام است؟

۱) 27
۲) 28
۳) 29
۴) 30

۱۵۰- مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ B در نقطهٔ M در خارج مثلث متقاطع‌اند، کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{A}>\hat{B}$
۲) $\hat{B}<\hat{A}$
۳) $\hat{B}>2\hat{C}$
۴) $\hat{B}<2\hat{C}$

۱۵۱- در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $DB=BC$ آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$، کدام است؟

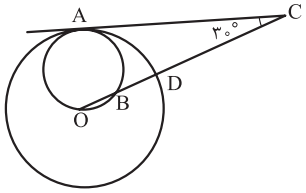


۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
۳) 1
۴) $\sqrt{2}$

BISTAKHTAB

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

۱۵۲- در شکل زیر، پاره‌خط AC و دایرهٔ کوچک، در نقطهٔ A، بر دایرهٔ بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایرهٔ کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD، کدام است؟



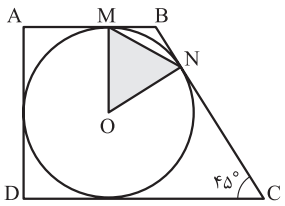
۱) ۴

۲) ۳

۳) $\sqrt{۶}$

۴) ۲

۱۵۳- مطابق شکل زیر، در ذوزنقهٔ ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$

۴) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$

۱۵۴- اگر $A=(-۱,۲,۰)$، $B=(۱,۰,-۱)$ و $C=(۰,-۱,۱)$، سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH، کدام است؟

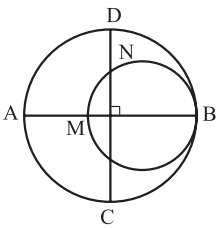
۱) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۴}$

۲) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۵۵- در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM=۱۶$، $DN=۱۰$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۱۷

۴) ۲۵

BISTAKHETAB

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

پاسخ‌نامهٔ آزمون اختصاصی رشتهٔ ریاضی

ریاضیات

۱۰۱- گزینهٔ ۱

نکته

اگر در عبارت $\log_B A$، جای A و B را عوض کنیم، حاصل عبارت، برابر با معکوس عبارت اولیه است: $\log_A B = \frac{1}{\log_B A}$

از نکتهٔ بالا استفاده می‌کنیم:

$$\log_a c + \log_b c = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\log_c b + \log_c a}{\log_c a . \log_c b} = 1 \Rightarrow \frac{\log_c (ba)}{\log_c a . \log_c b} = 1$$

$$\Rightarrow \log_c a . \log_c b = \log_c (ba)$$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $\log_b a = c$، آن‌گاه $b^c = a$.

پس معادلهٔ $\log_2 (4^x + 15) = x + 3$ را می‌توانیم به شکل $2^{x+3} = 4^x + 15$ بنویسیم.

جای 4^x و 2^{x+3}، به ترتیب $(2^x)^2$ و $2^x \times 2^3$ می‌نویسیم:

$$2^x \times 8 = (2^x)^2 + 15 \Rightarrow (2^x)^2 - 8(2^x) + 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (2^x - 3)(2^x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \Rightarrow x_1 = \log_2 3 \\ 2^x = 5 \Rightarrow x_2 = \log_2 5 \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

۱۰۳- گزینهٔ ۳ اول دامنهٔ دو رادیکال را به طور جداگانه حساب می‌کنیم:

(۱) عبارت داخل $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$$

(۲) عبارت داخل $\sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}$ نیز باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$-x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} x^3 - 4x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} x^2(x-4) - 25(x-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x^2 - 25) \leq 0 \Rightarrow (x-4)(x-5)(x+5) \leq 0$$

از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم:

		-5		4		5	
کل عبارت	$-$	∄	$+$	∄	$-$	∄	$+$

ما قسمت‌های کوچک‌تر یا مساوی صفر را می‌خواستیم، پس:

$x \leq -5$ یا $4 \leq x \leq 5$

اشتراک دو محدودهٔ $[2,4]$ و $(-\infty,-5] \cup [4,5]$، فقط عدد $x = 4$ است.

پس اگر قرار باشد این معادله، جوابی داشته باشد، آن جواب فقط **می‌تواند** $x = 4$ باشد.

آن را در معادله چک می‌کنیم:

$$\sqrt{4 + \sqrt{0}} + \sqrt{16 + \sqrt{0}} \overset{?}{=} 4 + 2 \quad \checkmark$$

چون تساوی برقرار می‌شود، پس معادله فقط یک جواب $x = 4$ دارد.

۱۰۴- گزینهٔ ۳ عبارت را بدون پرانتزی که m دارد، می‌نویسیم و مخرج را با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$A = \frac{2x - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}$$

این عبارت را به ازای $x \geq 0$ (به خاطر دامنه)، تعیین علامت می‌کنیم:

	0		1		$\frac{3}{2}$		4	
	∄	$-$	ت‌ن	$+$	∄	$-$	ت‌ن	$+$

برای آن‌که بازه‌های مثبت عبارت $A \times \underbrace{((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)}_{B}$، یکی باشد، باید یکی از دو اتفاق زیر رخ دهد:

(۱) B یک عبارت درجه‌اول باشد و ریشه‌اش یکی از همان ریشه‌های A (یعنی $1, \frac{3}{2}$ یا 4) باشد. اگر بخواهیم B درجه‌اول باشد باید ضریب x^2، صفر باشد:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

به ازای هر دو مقدار به دست آمده برای m، عبارت $\frac{(-4mx + 4)(2x - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}$ را می‌نویسیم:

الف) $m = 1$: عبارت این شکلی می‌شود: $\frac{(-4x + 4)(2x - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}$

الان پرانتز $-4x + 4$ و $\sqrt{x} - 1$، ریشهٔ مشترک دارند، پس به احتمال زیاد جواب همین $m = 1$ است.

ریشهٔ مرتبهٔ زوج

	0		1		$\frac{3}{2}$		4	
	∄	$-$	ت‌ن	$-$	∄	$+$	ت‌ن	$-$

قسمت‌های مثبت $\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 4$

BISTAKHTAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

ب) $m=-1$: نیازی به بررسی ندارد!

۲) B باید یه یک عبارت درجه‌دوم باشد و هر دو ریشه‌اش از ریشه‌های A باشد، این حالت هم دیگر نیازی به بررسی ندارد!

۱۰۵- گزینهٔ ۳ مخرج‌مشترک می‌گیریم و جلو می‌رویم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+(1-\cos^2\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{2\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

صورت و مخرج را به $\sin\theta$، ساده می‌کنیم: $\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}$

در صورت و مخرج به ترتیب از اتحادهای $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ و $1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}$، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

۱۰۶- گزینهٔ ۲ جای $\cos 2x$، عبارت $1-2\sin^2 x$، قرار می‌دهیم:

$$2\sin x(1-2\sin^2 x)+\sin x=1$$

$$\Rightarrow 2\sin x-4\sin^3 x+\sin x=1$$

$$\Rightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=1$$

الان باید از اتحاد $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ استفاده کنیم (البته این اتحاد در کتاب درسی نیست!):

$$\sin 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{4k\pi+\pi}{6}$$

جواب‌های در بازهٔ $[0,2\pi]$، به ازای $k=0$ تا $k=2$ به دست می‌آیند:

$$\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{6}$$

مجموع این ۳ جواب، برابر است با: $\frac{15\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$

۱۰۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد $1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$ در هر سه پرانتز استفاده می‌کنیم:

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow (2\cos^2\frac{\alpha}{2})(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha=\frac{1}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \left|\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\right|=\frac{1}{8}$$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ ضرب می‌کنیم:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos 2\alpha\right|=\frac{1}{8}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

حالا از اتحاد $\sin A\cos A=\frac{1}{2}\sin 2A$، سه بار استفاده می‌کنیم:

$$\left|\underbrace{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}_{\frac{1}{2}\sin\alpha}\cos\alpha\cos 2\alpha\right|=\frac{1}{8}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{1}{4}\sin 2\alpha}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{1}{8}\sin 4\alpha}$$

$$\Rightarrow |\sin 4\alpha|=\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\Rightarrow\begin{cases}\sin 4\alpha=\sin\frac{\alpha}{2}\\ \sin 4\alpha=-\sin\frac{\alpha}{2}\end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم:

۱) $\sin 4\alpha=\sin\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases}4\alpha=2k\pi+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{4k}{7}\pi\\ 4\alpha=2k\pi+\pi-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{2(2k+1)}{9}\pi\end{cases}$$

۲) $\sin 4\alpha=\sin(-\frac{\alpha}{2})$

$$\Rightarrow\begin{cases}4\alpha=2k\pi-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{4k}{9}\pi\\ 4\alpha=2k\pi+\pi+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{2(2k+1)}{7}\pi\end{cases}$$

جواب‌های بازهٔ $[0,2\pi]$ را می‌نویسیم:

۱) $\begin{cases}\alpha=0,\frac{4\pi}{7},\frac{8\pi}{7},\frac{12\pi}{7}\\ \alpha=\frac{2\pi}{9},\frac{2\pi}{3},\frac{10\pi}{9},\frac{14\pi}{9},2\pi\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\alpha=0,\frac{4\pi}{9},\frac{8\pi}{9},\frac{4\pi}{3},\frac{16\pi}{9}\\ \alpha=\frac{2\pi}{7},\frac{6\pi}{7},\frac{10\pi}{7},2\pi\end{cases}$

از جواب‌های به دست آمده $\alpha=0$ و $\alpha=2\pi$، جواب‌هایی هستند که به خاطر ضرب $\sin\frac{\alpha}{2}$ در معادله، به شکل اضافه تولید شدند (چون الان در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کنند.) با حذف این ۲ جواب، معادله دارای ۱۴ جواب است.

متأسفانه جواب درست این سؤال، در گزینه‌ها نیست! *البته عادی شده دیگه برامون!*

۱۰۸- گزینهٔ ۴ باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر x^2+2x، به ترتیب $3x+1$ و $Q(x)$ است. اتحاد تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x)=(x^2+2x)Q(x)+3x+1$$

از طرفین تساوی بالا، مشتق می‌گیریم:

$$P'(x)=(2x+2)Q(x)+(x^2+2x)Q'(x)+3$$

$x=-2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P'(-2)=(-2)\underbrace{Q(-2)}_{3}+0\times\underbrace{Q'(2)}_{0}+3$$

$$\Rightarrow P'(-2)=-2(3)+3=-3$$

باقی‌ماندهٔ $P'(x)$ بر $x+2$، همان $P'(-2)$ است که می‌شود -3.

BISTAKFAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۰۹- گزینهٔ ۲ با جای‌گذاری $n=1$ تا $n=99$، جملات دنبالهٔ $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$ را می‌نویسیم:

$$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{-1}=3 \qquad a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5} \qquad a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{5}{7}=\frac{9}{7}$$

الگوی جملات درآمد! صورت a_n، nاُمین عدد فرد و مخرج ۲تا کم‌تر از صورتش است. یعنی جملهٔ عمومی این دنباله به صورت روبه‌رو است:

$$a_n=\frac{2n-1}{2n-1-2}=\frac{2n-1}{2n-3}$$

صد جملهٔ اول به صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{-1},\frac{3}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{5},\frac{9}{7},\cdots,\frac{197}{195},\frac{199}{197}$$

اگر این صد جمله را در هم ضرب کنیم، فقط -1 از مخرج کسر اول و ۱۹۹ از صورت کسر آخر می‌مانند:

$$-\frac{1}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\cdots\times\frac{197}{195}\times\frac{199}{197}=-\frac{199}{1}$$
$$=-199$$

۱۱۰- گزینهٔ ۲ اولاً باید حواستان باشد که مجموع ۱۰ جملهٔ اول یعنی مجموع جملات a_0 تا a_9!

- جملات a_0، a_3، a_6 و a_9 را از ضابطهٔ 2^k، حساب کنیم:

باید جای k، اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ را در 2^k قرار دهیم:

$$\begin{cases} a_0=2^0=1 \\ a_3=2^1=2 \\ a_6=2^2=4 \\ a_9=2^3=8 \end{cases}$$

- جملات a_1، a_4 و a_7 را از ضابطهٔ $-2k+4$، حساب می‌کنیم.

جای k، اعداد ۰، ۱ و ۲ را در $-2k+4$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_1=0+4=4 \\ a_4=-2+4=2 \\ a_7=-4+4=0 \end{cases}$$

- جملات a_2، a_5 و a_8 را از ضابطهٔ $[\frac{n}{k+2}]+a$ حساب می‌کنیم.

جای n، $3k+2$ قرار می‌دهیم: $[\frac{3k+2}{k+2}]+a$

بعد جای k، اعداد ۰، ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_2=[\frac{2}{0+2}]+a=a+1 \\ a_5=[\frac{5}{3}]+a=a+1 \\ a_8=[\frac{8}{4}]+a=a+2 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جملهٔ اول، ۱۹ شده، پس:

$$1+4+(a+1)+2+2+(a+1)+4+0+(a+2)+8=19$$
$$\Rightarrow 3a+25=19 \Rightarrow a=-2$$

- جملهٔ ۲۹اُم این دنباله یعنی a_{28} که از ضابطهٔ $a_{3k+1}=-2k+4$ به دست می‌آید. باید $k=9$ را قرار دهیم: $a_{28}=-2(9)+4=-14$

- جملهٔ ۳۰اُم این دنباله یعنی a_{29} که از ضابطهٔ $a_{3k+2}=[\frac{3k+2}{k+2}]-2$ به دست می‌آید. باید $k=9$ را قرار دهیم: $a_{29}=[\frac{29}{11}]-2=0$

میانگین این دو جمله، برابر است با:

$$\frac{a_{28}+a_{29}}{2}=\frac{-14+0}{2}=-7$$

۱۱۱- گزینهٔ ۴ از $-1\le\sin x\le 1$، شروع می‌کنیم و محدودهٔ $-\sqrt{5\sin^2 x-1}$ را پیدا می‌کنیم:

$$-1\le\sin x\le 1 \Rightarrow 0\le\sin^2 x\le 1$$
$$\xrightarrow{\times 5} 0\le 5\sin^2 x\le 5 \xrightarrow{-1} -1\le 5\sin^2 x-1\le 4$$

می‌خواهیم از عددی که بین -1 و ۴ است، جذر بگیریم. قسمت‌های منفی‌اش را حذف می‌کنیم. می‌ماند صفر تا ۴:

$$0\le 5\sin^2 x-1\le 4 \xrightarrow{\text{جذر}} 0\le\sqrt{5\sin^2 x-1}\le 2$$
$$\xrightarrow{\times(-1)} -2\le-\sqrt{5\sin^2 x-1}\le 0$$

حالا برای هر ۳ عبارت، پایهٔ ۲، قرار می‌دهیم:

$$2^{-2}\le 2^{-\sqrt{5\sin^2 x-1}}\le 2^0 \Rightarrow \frac{1}{4}\le 2^{-\sqrt{5\sin^2 x-1}}\le 1$$

پس برد f، بازهٔ $[\frac{1}{4},1]$ است. در نتیجه: $a+b=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

۱۱۲- گزینهٔ ۴ اول از رابطهٔ $\log_{B^m} A^n=\frac{n}{m}\log_B A$، کمک می‌گیریم:

$$f(x)=\log_{2^{-1}}(12+\sqrt{[x]}-[x])^{-1}-1$$
$$=\frac{-1}{-1}\log_2(12+\sqrt{[x]}-[x])-1$$
$$\Rightarrow f(x)=\log_2(-[x]+\sqrt{[x]}+12)-1$$

جای عدد ۱، عبارت $\log_2 2$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\log_2(-[x]+\sqrt{[x]}+12)-\log_2 2$$
$$=\log_2(\frac{-[x]+\sqrt{[x]}+12}{2})$$

برد f، بازهٔ $(\log_2 3,\log_2 5)$ است، پس عبارت جلوی لگاریتم را بین ۳ و ۵ قرار می‌دهیم:

$$3<\frac{-[x]+\sqrt{[x]}+12}{2}<5$$
$$\xrightarrow{\times 2} 6<-[x]+\sqrt{[x]}+12<10$$
$$\xrightarrow{-12} -6<-[x]+\sqrt{[x]}<-2$$
$$\xrightarrow{\times(-1)} 2<[x]-\sqrt{[x]}<6$$

نامعادلهٔ آخر را به ۲ نامعادله تفکیک می‌کنیم:

۱) $2<[x]-\sqrt{[x]} \Rightarrow [x]-\sqrt{[x]}-2>0$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (\sqrt{[x]}-2)\underbrace{(\sqrt{[x]}+1)}_{\text{مثبت}}>0$$

$$\Rightarrow \sqrt{[x]}-2>0 \Rightarrow \sqrt{[x]}>2 \Rightarrow [x]>4 \Rightarrow x\ge 5$$

۲) $[x]-\sqrt{[x]}<6 \Rightarrow [x]-\sqrt{[x]}-6<0$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (\sqrt{[x]}-3)\underbrace{(\sqrt{[x]}+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$\Rightarrow \sqrt{[x]}-3<0 \Rightarrow \sqrt{[x]}<3 \Rightarrow [x]<9 \Rightarrow x<9$$

از اشتراک ۲ محدودهٔ بالا، داریم:

$$D_f=[5,+\infty)\cap(-\infty,9)=[5,9)$$

متأسفانه جواب در گزینه‌ها نیست! *البته می‌دونیم که عادیه! خداروشکر!*

BISTAKHFAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۱۳- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=\sqrt{\sqrt{x+3}}$ را k واحد در راستای عمودی حرکت می‌دهیم. ضابطه‌اش به صورت $y=\sqrt{\sqrt{x+3}}+k$ درمی‌آید.

چون این تابع، صعودی اکید است، پس وارونش را حتماً روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌کند.

سؤال عرض نقطهٔ تقاطع y و y^{-1} را ۱ داده، پس مختصات این نقطه به صورت $(1,1)$ است.

یعنی تابع $y=\sqrt{\sqrt{x+3}}+k$ از نقطهٔ $(1,1)$ می‌گذرد:

$$1=\sqrt{\sqrt{1+3}}+k \Rightarrow k=-1$$

تا این‌جا، ضابطه به شکل $y=\sqrt{\sqrt{x+3}}-1$ شد.

کارهایی که سؤال گفته را روی آن انجام می‌دهیم:

$$y=\sqrt{\sqrt{x+3}}-1 \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\sqrt{\sqrt{x+3}}+1$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

از بین نقاط داده‌شده، نقطهٔ $(0,-\sqrt{5}+1)$ روی این منحنی قرار دارد.

۱۱۴- گزینهٔ ۴ تابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

۱) fog: جای تمام xهای f، باید $g(x)$ قرار دهیم:

$$f(g(x))=\begin{cases}-1 & g(x)<-1\\ g(x) & -1\le g(x)\le 1\\ 1 & g(x)>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & \underbrace{x^2<0}_{\text{غیرممکن!}}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2} \text{ یا } x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\\ 1 & \text{تهی!}\end{cases}$$

۲) gof: جای تمام xهای g، باید $f(x)$ قرار دهیم:

$$g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

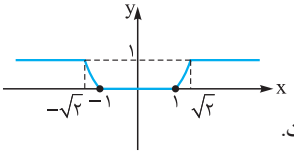
۳) محور اعداد را با اعداد $\pm\sqrt{2}$ و ±1، تفکیک می‌کنیم و ضابطهٔ توابع fog و gof را در هر قسمت می‌نویسیم:

	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	
gof	0	0	$1-x^2$	0	0
fog	-1	$1-x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$	-1
gof − fog	1	x^2-1	0	x^2-1	1

ضابطهٔ gof − fog به شکل زیر است:

$$y=\begin{cases}1 & x>\sqrt{2} \text{ یا } x<-\sqrt{2}\\ 0 & -1\le x\le 1\\ x^2-1 & 1<|x|\le\sqrt{2}\end{cases}$$

تابع را رسم می‌کنیم:



پس ماکزیمم این تابع برابر ۱ است.

۱۱۵- گزینهٔ ۳

نکته

اگر تابع f نسبت به خط $x=k$ متقارن باشد، آن‌گاه:
$f(x)=f(k-x)$

- f نسبت به خط $x=1$ متقارن است: $f(x)=f(1-x)$
- f نسبت به خط $x=3$ متقارن است: $f(x)=f(3-x)$

از تساوی اول، نتیجه می‌گیریم $f(A)=f(1-A)$، پس حق داریم با فرض $A=3-x$، تساوی دوم را این‌جوری بنویسیم:

$$f(x)=f(3-x)=f(1-(3-x))=f(x-2)$$

از $f(x)=f(x-2)$ نتیجه می‌گیریم، تابع f، در بازه‌هایی به طول ۲ تکرار می‌شود، یعنی f تابعی متناوب با $T=2$ است.

۱۱۶- گزینهٔ ۱ جای عبارت براکتی، باید عدد بگذاریم:

$$\tan[0^+]=\tan 0=0$$

پس حدمان به شکل مقابل درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}$$

- کمان سینوس (یعنی $\sqrt{1-x^3}-1$) به سمت صفر می‌رود، پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin u\sim u$، استفاده کنیم:

$$\sin(\sqrt{1-x^3}-1)\sim\sqrt{1-x^3}-1$$

- کمان کسینوس (یعنی $\sqrt{3x}$) نیز به سمت صفر می‌رود، پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}$ استفاده کنیم:

$$\cos\sqrt{3x}=1-\frac{(\sqrt{3x})^2}{2}=1-\frac{3x}{2}$$

- قیافهٔ جدید حدمان، این‌جوری می‌شود:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(1-(1-\frac{3x}{2}))}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(\frac{3}{2}x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}$$

هوپیتال می‌زنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}}{\frac{3}{2}(n+1)x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{(n+1)x^n\sqrt{1-x^3}}$$

برای آن‌که حاصل حد بالا، یک عدد شود، باید $n\le 2$ باشد (اگر $n>2$ باشد، حاصل حد، بی‌نهایت می‌شود)

BISTAKHTAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱) اگر $n=۲$ باشد:

$$a=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-x^{۲}}{۳x^{۲}\sqrt{۱-x^{۳}}}=-\frac{۱}{۳}$$

پس:

$$a^n=(-\frac{۱}{۳})^{۲}=\frac{۱}{۹}$$

۲) اگر $n<۲$ باشد:

$$a=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-x^{۲}}{(n+۱)x^n\sqrt{۱-x^{۳}}}=۰$$

پس:

$a^n=۰^n=$ تعریف‌نشده یا صفر

۱۱۷- گزینهٔ ۲ اول در هر دو عبارت براکتی، $x=(-\frac{۱}{۲})^+$ را قرار می‌دهیم تا مقدار عددی براکت معلوم شود. حواستان باشد که $(-\frac{۱}{۲})^+$ یعنی $-\frac{۱}{۲/۰۱}$.

- $[\frac{-۲}{x^{۲}}]=[\frac{-۲}{(-\frac{۱}{۲/۰۱})^{۲}}]=[\frac{-۲}{\frac{۱}{۴^+}}]=[(-۸)^-]=-۹$
- $[\frac{۳}{x^{۲}}]=[\frac{۳}{(\frac{-۱}{۲/۰۱})^{۲}}]=[\frac{۳}{\frac{۱}{۴^+}}]=[۱۲^+]=۱۲$

حد داده‌شده به شکل زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}\frac{۱۶x-(-۹)}{۲۴x+۱۲}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}\frac{۱۶x+۹}{۱۲(۲x+۱)}=\frac{-۸+۹}{۱۲(۰^+)}$$
$$=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۱۱۸- گزینهٔ ۱ صورت و مخرج تابع را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-۱)(x^{۲}+x-۴)}{(x-a)(۲x-۱)^{۲}}=\frac{(x-۱)(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-a)(۲x-۱)^{۲}}$$

- حد تابع f در $\pm\infty$ برابر است با:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}-۵x+۴}{(x-a)(۴x^{۲}-۴x+۱)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}}{۴x^{۳}}=\frac{۱}{۴}$$

پس تابع یک مجانب افقی به معادلهٔ $y=\frac{۱}{۴}$ دارد.

- ضمناً عبارت $(۲x-۱)^{۲}$ که در مخرج آمده است، با صورت کسر ساده نمی شود و مخرج حتماً ریشهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ دارد. یعنی یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ هم داریم.
- پس تابع مجانب قائم دیگری (به جز $x=\frac{۱}{۲}$) نباید داشته باشد که این اتفاق ۲ جور ممکن است رخ دهد:

۱) پرانتز $x-a$، همان ریشهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ بدهد: $a=\frac{۱}{۲}$

۲) پرانتز $x-a$، با یکی از پرانتزهای صورت ساده شود، یعنی a می‌تواند ۱ یا α یا β باشد.

مجموع مقادیر a برابر است با: $\frac{۱}{۲}+۱+\alpha+\beta$

α و β، ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+x-۴=۰$ هستند که مجموعشان $S=-۱$ می‌شود، پس:

$$\frac{۱}{۲}+۱+\underbrace{\alpha+\beta}_{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱۹- گزینهٔ ۲ قبل از هر چیز، طراح باید قید می‌کرد که n عدد طبیعی است.

ضابطهٔ f را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $f(x)=\lim_{n\to+\infty}(\sin^{۲}x)^n$

محدودهٔ $\sin^{۲}x$ به صورت $۰\le\sin^{۲}x\le۱$ است.

در ۲ قسمت، f را بررسی می‌کنیم:

۱) به ازای تمام اعداد بازه $[۰,۲\pi]$ به جز $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$، داریم:

$$۰\le\sin^{۲}x<۱$$

اعدادی که در محدودهٔ $[۰,۱)$ هستند، اگر به توان $+\infty$ برسند، حدشان صفر می‌شود.

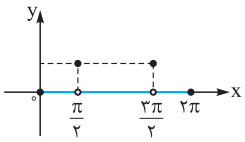
۲) به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$، داریم: $\sin^{۲}x=۱$

عدد ۱ اگر به توان $+\infty$ برسد، حاصل ۱ می‌شود.

- پس ضابطهٔ f در این محدوده به صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}۰ & ۰\le x\le۲\pi\,,\ x\neq\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ ۱ & x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

نمودار f به صورت روبه‌رو است:



تابع f در این بازه، در ۲ نقطه به طول‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

۱۲۰- گزینهٔ ۳ چون $x\to۰$، پس حق داریم از هم‌ارزی‌های $\sin u\sim u$ و $\cos u\sim۱-\frac{u^{۲}}{۲}$ استفاده کنیم. *(پقد آفه هم‌ارزی!)*

ابتدا هم‌ارز تابع f را در $x=۰$ می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^n(x^{۲})\sim(x^{۲})^n=x^{۲n}$$

ضابطهٔ هم‌ارز با f' را هم حساب می‌کنیم: $f'(x)=۲n.x^{۲n-۱}$

حد داده‌شده به شکل زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to۰}\frac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲n}(۲nx^{۲n-۱})}{(۱-(۱-\frac{x^{۲}}{۲}))^m}$$
$$=\lim_{x\to۰}\frac{۲n.x^{۴n-۱}}{(\frac{x^{۲}}{۲})^m}=\lim_{x\to۰}\frac{۲n.x^{۴n-۱}}{\frac{x^{۲m}}{۲^m}}$$
$$=\lim_{x\to۰}\frac{(۲n)(۲^m)x^{۴n-۱}}{x^{۲m}}$$

برای آن‌که حاصل حد بالا، برابر با $۳۲\sqrt{۲}$ باشد، باید:

۱) درجهٔ x در صورت و مخرج یکسان باشد: $۴n-۱=۲m$

۲) ضریب عددی، $۳۲\sqrt{۲}$ باشد:

$$(۲n)(۲^m)=۳۲\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ n\times۲^m=۱۶\sqrt{۲}$$

از معادلهٔ اول، به $m=\frac{۴n-۱}{۲}$ می‌رسیم. آن را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$n\times۲^{\frac{۴n-۱}{۲}}=۱۶\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ n\times۲^{(۲n-\frac{۱}{۲})}=۱۶\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow\ n\times\frac{۴^n}{\sqrt{۲}}=۱۶\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ n\times۴^n=۳۲$$

از معادلهٔ بالا می‌توانیم، حدس بزنیم $n=۲$ است.

BISTAKFAR

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

پس m برابر است با: $m=\frac{۴(۲)-۱}{۲}=۳/۵$

در نتیجه: $۲m+n=۲(۳/۵)+۲=۹$

۱۲۱- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ صعودی اکید است. پس تقاطع f و $f^{-۱}$، روی خط $y=x$ است.

پس کافی است f را با این خط قطع دهیم:

$$f(x)=x \Rightarrow \sqrt{x}+۲=x \xrightarrow{\text{حدس}} x=۴$$

پس نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$، نقطهٔ $A(۴,۴)$ است.

- شیب خط مماس بر f در $x=۴$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴} \Rightarrow m=\frac{۱}{۴}$$

- ضابطهٔ $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x}+۲ \Rightarrow \sqrt{x}=y-۲ \Rightarrow x=(y-۲)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y=(x-۲)^۲$$

حالا شیب خط مماس بر $f^{-۱}$ در $x=۴$ را حساب می‌کنیم:

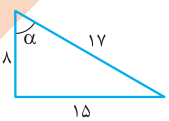
$$f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲ \Rightarrow (f^{-۱})'(x)=۲(x-۲)$$

$$\Rightarrow (f^{-۱})'(۴)=۴ \Rightarrow m'=۴$$

- تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های $m=\frac{۱}{۴}$ و $m'=۴$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|=\left|\frac{\frac{۱}{۴}-۴}{۱+\frac{۱}{۴}(۴)}\right|=\frac{۱۵}{۸}$$

- به کمک مثلث قائم‌الزاویه، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۱۵}{۸}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۸}{۱۷}$$

$$\sin\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۱۵}{۱۷}$$

پس: $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۱۵}{۱۷})(\frac{۸}{۱۷})=\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$

۱۲۲- گزینهٔ ۱ به ازای $x\geq ۰$، ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+x$ درمی‌آید.

توابع $y=۳\sqrt[۳]{x}$ و $y=x$، هر دو صعودی اکید هستند، پس جمعشان نیز صعودی اکید است.

به ازای $x<۰$، ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x$ درمی‌آید.

f' را حساب کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{\cancel{۳}\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=\frac{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

مخرج f' که مثبت است، پس کافی است نامعادلهٔ $۱-\sqrt[۳]{x^۲}\geq ۰$ را حل کنیم:

$$۱-\sqrt[۳]{x^۲}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}\leq ۱ \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۲\leq ۱$$

$$\xrightarrow{x\leq ۰} -۱\leq x<۰$$

اجتماع دو محدودهٔ $x\geq ۰$ و $-۱\leq x<۰$، بازهٔ $[-۱,+\infty)$ می‌شود.

۱۲۳- گزینهٔ ۳ f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$=\frac{۴x^۵-۸x^۳-۲x^۵+۶x}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x^۵-۸x^۳+۶x}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

صورت کسر به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌شود:

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

حالا هر سه پرانتز را با اتحاد مزدوج، تجزیه می‌کنیم:

$$=\frac{۲x(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۳})(x+\sqrt{۳})}{(x-\sqrt{۲})^۲(x+\sqrt{۲})^۲}$$

(۰, ۱, -۱, $\sqrt{۳}$, $-\sqrt{۳}$ در صورت؛ $\sqrt{۲}$, $-\sqrt{۲}$ در مخرج)

تمام ریشه‌های صورت و مخرج در دامنهٔ $x\in(-۲,۲)$ قرار دارند.

f' را در محدودهٔ $x\in(-۲,۲)$ تعیین علامت می‌کنیم:

تغییر علامت نمی‌دهد

	-۲		$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۲}$		$\sqrt{۳}$		۲
f'	‖	$-$	۰	$+$	تن	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	تن	$-$	۰	$+$	
f	‖	↘		↗		↗		↘		↗		↘		↘		↗	

پس f در ۴ بازهٔ $(-۲,-\sqrt{۳})$، $(-۱,۰)$، $(۱,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$، نزولی اکید است.

۱۲۴- گزینهٔ ۱ f' را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x=۴x(x^۲-۳)=۴x(x-\sqrt{۳})(x+\sqrt{۳})$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم:

		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
f'	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↘	min	↗	max	↘	min	↗

مختصات نقاط min نسبی به صورت زیر است:

$$A=(-\sqrt{۳},-۴) \text{ و } B=(\sqrt{۳},-۴)$$

- f'' را حساب می‌کنیم: $f''(x)=۱۲x^۲-۱۲=۱۲(x^۲-۱)$

f'' در $x=\pm ۱$ تغییر علامت می‌دهد، پس این دو عدد، طول نقاط عطف f هستند.

مختصات نقاط عطف به صورت زیر است:

$$C=(۱,۰) \text{ و } D=(-۱,۰)$$

- شیب خط‌های AB و CD را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB}=\frac{-۴-(-۴)}{\sqrt{۳}-(-\sqrt{۳})}=۰ \qquad m_{CD}=\frac{۰-۰}{-۱-۱}=۰$$

چون شیب هر دو خط، صفر شد، پس دو خط با هم موازی‌اند و زاویهٔ بینشان صفر است.

BISTAKHTAB

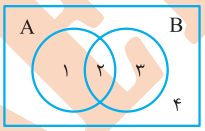
Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۲۵- گزینهٔ ۲ جدول ارزش گزاره‌ها را برای $(p \vee q) \Rightarrow r$ تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

همان‌طور که در جدول دیده می‌شود در سه حالت ارزش گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است که از این سه حالت فقط در یک حالت ارزش q نادرست است؛ بنابراین احتمال نادرست‌بودن q برابر است با $\frac{1}{3}$.

۱۲۶- گزینهٔ ۱ از روش شماره‌گذاری استفاده می‌کنیم.



می‌دانیم:

$$C = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3\}$$

حالا عبارت داده‌شده را برحسب ناحیه‌ها جای‌گذاری کرده، حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$(A' \cap B')' \cap C' = (\{3,4\} \cap \{1,4\})' \cap \{1,3\}'$$
$$= 4' \cap \{2,4\} = \{1,2,3\} \cap \{2,4\} = \{2\} = A \cap B$$

۱۲۷- گزینهٔ ۱ روش ۱ راه سریع پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها عددگذاری است. اگر $n = 3$ باشد، داریم:

$$\sum_{k=1}^{3} k\binom{3}{k} = \binom{3}{1} + 2\times\binom{3}{2} + 3\times\binom{3}{3} = 3 + 6 + 3 = 12$$

حالا گزینه‌ها را به ازای $n = 3$ بررسی می‌کنیم:

۱) $n2^{n-1} = 3\times 2^2 = 12$ ✓

۲) $n\times 2^n = 3\times 2^3 = 24$ ×

۳) $(n-1)2^{n-1} = 2\times 2^2 = 8$ ×

۴) $(n-1)2^n = 2\times 2^3 = 16$ ×

همان‌طور که می‌بینید پاسخ ۱ است.

روش ۲ اثبات ریاضی رابطه نیز به صورت زیر است:

اول این را نگاه کنید:

$$k\binom{n}{k} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

حالا k را ساده می‌کنیم:

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

حالا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\left(\underbrace{\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}}_{\text{این مقدار برابر است با تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ } n-1 \text{عضوی. یعنی تعداد زیرمجموعه‌های صفرعضوی یا تهی به اضافهٔ تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی به علاوهٔ تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی و ... . به همین ترتیب تعداد زیرمجموعه‌های } n-1 \text{عضوی که می‌شود کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ } (n-1) \text{عضوی}}\right) = n\times 2^{n-1}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۳ تعداد داده‌ها یا همان مجموع فراوانی‌ها ۲۲ تاست؛ بنابراین میانه می‌شود میانگین داده‌های یازدهم و دوازدهم.

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	۱

مقدار a را نمی‌دانیم اما اگر $a > 14$ باشد، دادهٔ یازدهم عدد ۱۳ و دادهٔ دوازدهم عدد ۱۴ و در نتیجه میانه برابر $\frac{13+14}{2} = 13/5$ می‌شود.

حالا با توجه به این‌که گفته شده میانه برابر ۱۳ است، a نیز حتماً باید برابر ۱۳ باشد تا میانه نیز ۱۳ شود.

با پیداکردن a می‌توانیم میانگین و واریانس داده‌ها را پیدا کنیم. (دقت کنید با توجه به این‌که $a = 13$ شده، فراوانی دادهٔ ۱۳ برابر ۷ است.)

$$\bar{x} = \frac{3\times 8 + 2\times 12 + 7\times 13 + 3\times 14 + 1\times 26 + 1\times 27 + 5\times 28}{3+2+7+3+1+1+5+1}$$
$$= \frac{374}{22} = 17$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}$$
$$= \frac{3\times(-9)^2 + 2\times(-5)^2 + 7\times(-4)^2 + 3\times(-3)^2 + 9^2 + 10^2 + 5\times 11^2}{22}$$
$$= \frac{243 + 50 + 112 + 27 + 81 + 100 + 605}{22} = \frac{1218}{22} = 55/36$$

۱۲۹- گزینهٔ ۴ کوچک‌ترین عدد به صورت زیر است:

۱ ۰۰۰ ۱۰

جنسیت (مرد) — تعداد افراد هم‌سن — سن شهروند

با توجه به این‌که سن از ۰۱ تا ۰۸۵ تغییر می‌کند، پس تا ۸۵ عدد، سه رقم وسط ۰۰۰ است و در ۸۵ عدد بعدی، سه رقم وسط می‌شود ۰۰۱ و به همین ترتیب. بررسی می‌کنیم ۱۰۰۰۰ شامل چند دستهٔ ۸۵تایی می‌شود و چندتا باقی می‌ماند. با توجه به این‌که:

$$\begin{array}{r|l} 10000 & 85 \\ \hline 9945 & 117 \\ \hline 55 & \end{array}$$

یعنی ۱۱۷ دسته تکمیل می‌شود و از دستهٔ صدوهجدهم باید ۵۵ اُمین عدد را در نظر بگیریم. یعنی ۱۱۱۷۵۵ و بنابراین سن فرد مورد نظر ۵۵ سال است.

۱۳۰- گزینهٔ ۱ برای انتخاب کارت اول ۱۲ انتخاب داریم. در حالت‌هایی که عدد زوج باشد (یعنی ۶ حالت ۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲) یک کارت دیگر انتخاب می‌کنیم که به ۱۱ روش می‌توان این کار را انجام داد. اما اگر عدد فرد باشد، یک تاس پرتاب می‌کنیم که ۶ حالت دارد.

BISTAKHTAB

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

بنابراین تعداد حالت‌ها یا عددهای به وجودآمده به صورت زیر است:

۱۱	۲۱	۳۱	۴۱	...	۱۱۱	۱۲۱
۱۲	۲۳	۳۲	۴۲		۱۱۲	۱۲۲
⋮	⋮	⋮	۴۳		۱۱۳	⋮
۱۶ (۶حالت)	۲۱۰	۳۶ (۶حالت)	۴۵		⋮	۱۲۱۱ (۱۱حالت)
	۲۱۱		⋮		۱۱۶ (۶حالت)	
	۲۱۲ (۱۱حالت)		۴۱۲ (۱۱حالت)			

$$\Rightarrow n(S)=6\times6+6\times11=102$$

حالا بررسی می‌کنیم چندتا از این عددها مضرب ۴ است. می‌دانیم اگر عددی بخواهد مضرب ۴ باشد، باید دو رقم سمت راست آن مضرب ۴ باشد. در حالت‌هایی که عدد اول فرد آمده و تاس انداخته‌ایم، عددهای دوم و آخر مضرب ۴ هستند (یعنی ۱۲، ۱۶، ۳۲، ۳۶، ... ۱۱۲ و ۱۱۶) که تعداد آن‌ها برابر است با: $6\times2=12$

بقیهٔ حالت‌های مطلوب را بنویسیم کارمان راحت‌تر است:

۲۴	۴۸	۶۴	۸۴	۱۰۴	۱۲۴
۲۸	۴۱۲	۶۸		۱۰۸	۱۲۸
۲۱۲		۶۱۲	۸۱۲	۱۰۱۲	

۱۵ عدد هم این‌جا داریم، بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n(S)=12+15=27 \Rightarrow P(A)=\frac{27}{102}=\frac{9}{34}$$

۱۳۱- گزینهٔ ۳ فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت x^3 است. اگر x^3 بر ۹ بخش‌پذیر باشد، x باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:

$$x=3q \Rightarrow x^3=27q^3$$

حالا مقادیر سه و چهار رقمی x^3 را پیدا می‌کنیم:

$$100\le x^3<10000 \Rightarrow 100\le 27q^3<10000$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم می‌گیریم}} \sqrt[3]{100}\le 3q<\sqrt[3]{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}}\le 3q\le 10\sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2/1}\le 3q\le 10\times2/1$$

$$\Rightarrow 4/76\le 3q\le 21 \Rightarrow 1/5\le q\le 7$$

$$\Rightarrow q=2,3,4,5,6,7$$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.

۱۳۲- گزینهٔ ۴ اگر عدد n به صورت $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد برابر است با:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$$

بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های عبارت زیر:

$$x=6^m\times10^n=2^m\times3^m\times2^n\times5^n=2^{m+n}\times3^m\times5^n$$

برابر است با: $(m+n+1)(m+1)(n+1)$

از طرفی:

$$15x=3\times5\times2^{m+n}\times3^m\times5^n=2^{m+n}\times3^{m+1}\times5^{n+1}$$

$\Rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $15x$

$$=(m+n+1)(m+2)(n+2)$$

اختلاف دو عدد برابر ۳۵ است، در نتیجه:

$$(m+n+1)(m+2)(n+2)-(m+n+1)(m+1)(n+1)=35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)\Big(\underbrace{(m+2)(n+2)}_{mn+2m+2n+4}-\underbrace{(m+1)(n+1)}_{mn+m+n+1}\Big)=35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+n+3)=35$$

ضرب دو عدد برابر ۳۵ شده است پس یکی ۵ و دیگری ۷ است.

$$m+n+1=5 \Rightarrow m+n=4$$

اگر بخواهیم عدد، کوچک‌ترین مقدار را داشته باشد، توان بزرگ‌تر را به ۶ و اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، توان ۱۰ را ماکزیمم می‌کنیم:

کوچک‌ترین عدد: $\begin{cases}m=4\\n=0\end{cases} \Rightarrow x_{min}=6^4=1296$

بزرگ‌ترین عدد: $\begin{cases}m=0\\n=4\end{cases} \Rightarrow x_{max}=10^4=10000$

$$\Rightarrow \text{اختلاف دو عدد}=10000-1296=8704$$

این سؤال از مباحث کتاب درسی نیست ولی در کنکور آمده است.

۱۳۳- گزینهٔ ۴ عددی که مضرب ۸۸ است یعنی بر ۸ و ۱۱ بخش‌پذیر است، مشخص است که عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$\overline{abaaba}\overset{11}{\equiv}a-b+a-a+b-a=0$$

پس فقط باید بررسی کنیم که این عدد در چه شرایطی بر ۸ بخش‌پذیر است. اگر عدد را باز کنیم، داریم:

$$\overline{abaaba}=a+10b+100a+\underbrace{1000a+10000b+100000a}_{\text{مضرب ۸}}\overset{8}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow a+10b+100a\overset{8}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow a+2b+8b+4a+96a\overset{8}{\equiv}0 \Rightarrow 5a+2b\overset{8}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow 8a-3a+2b\overset{8}{\equiv}0 \Rightarrow 2b\overset{8}{\equiv}3a$$

اگر عدد بخواهد مضرب ۸ باشد، واضح است که a باید زوج باشد و چون عدد شش‌رقمی است، پس $a\neq0$. در چهار حالت دیگر مقادیر b را پیدا می‌کنیم:

$$a=2 \Rightarrow 2b\overset{8}{\equiv}6 \Rightarrow b\overset{4}{\equiv}3 \Rightarrow b=3,7$$

$$a=4 \Rightarrow 2b\overset{8}{\equiv}12 \Rightarrow b\overset{4}{\equiv}6\overset{4}{\equiv}2 \Rightarrow b=2,6$$

$$a=6 \Rightarrow 2b\overset{8}{\equiv}18 \Rightarrow b\overset{4}{\equiv}9\overset{4}{\equiv}1 \Rightarrow b=1,5,9$$

$$a=8 \Rightarrow 2b\overset{8}{\equiv}24 \Rightarrow b\overset{4}{\equiv}0 \Rightarrow b=0,4,8$$

بنابراین ۱۰ عدد با این مشخصات وجود دارد: ۲۳۲۲۳۲, ۲۷۲۲۷۲

۴۲۴۴۲۴, ۴۶۴۴۶۴

۶۱۶۶۱۶, ۶۵۶۶۵۶, ۶۹۶۶۹۶

۸۰۸۸۰۸, ۸۴۸۸۴۸, ۸۸۸۸۸۸

۱۳۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $q+r=17$ است. داریم:

$$\begin{array}{c|c}a & 13\\ \hline r & q\end{array} \Rightarrow a=13q+r \Rightarrow a=12q+q+r$$

$$=12q+17 \Rightarrow a-8=12q+17-8=12q+9$$

اگر فرض کنیم باقی‌ماندهٔ $a-8$ بر ۳۶ برابر ۲۱ است، داریم:

$$12q+9\overset{36}{\equiv}21 \Rightarrow 12q\overset{36}{\equiv}12 \xrightarrow{\div12} q\overset{3}{\equiv}1$$

حالا دقت کنید که: $0\le r<13$ (I)

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

یعنی r سیزده حالت مختلف دارد. با توجه به این‌که $q+r=17$ است، داریم:

$$q=17-r \Rightarrow 17-r\overset{3}{\equiv}1 \Rightarrow r\overset{3}{\equiv}16\overset{3}{\equiv}1$$
$$\Rightarrow r=3k+1 \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) مقادیر قابل قبول برای r عبارت‌اند از:

$r=1,4,7,10$

پس احتمال این‌که r این چهار مقدار را داشته باشد، برابر است با:

$\frac{4}{13}$

۱۳۵- گزینهٔ ۴ کوچک‌ترین عدد $m!$ که بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد ۵! است. باقی‌ماندهٔ 5^{332} را بر ۳۱ به دست می‌آوریم:

$$5^3\overset{31}{\equiv}1 \xrightarrow{\text{به توان }110} 5^{330}\overset{31}{\equiv}1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{332}\overset{31}{\equiv}25$$

۱۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا بررسی می‌کنیم احتمال این‌که در پرتاب دو تاس مجموع عددهای روشده ۷ یا ۱۰ باشد، چه‌قدر است:

حالت‌های مجموع ۷: $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

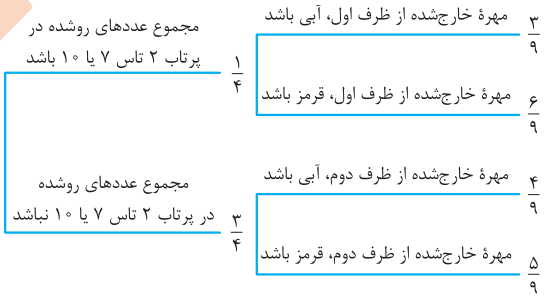
حالت‌های مجموع ۱۰: $(4,6),(5,5),(6,4)$

$$\Rightarrow n(A)=9 \Rightarrow P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

در دو حالت داده‌شده احتمال مورد نظر را بررسی می‌کنیم:

الف) در این حالت در ظرف اول ۸ مهره و در ظرف دوم ۱۰ مهره است.

ب) در این حالت در ظرف اول ۱۰ مهره و در ظرف دوم ۸ مهره است.



حالا در دو حالت «الف» و «ب» احتمال مورد نظر را پیدا کرده، حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

الف) $\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}\times\frac{5}{10}$ + $\frac{1}{4}\times\frac{6}{9}\times\frac{4}{10}$

وقتی یک مهرهٔ قرمز به ظرف دوم اضافه شود، در این ظرف ۶ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی است.

وقتی یک مهرهٔ آبی به ظرف دوم اضافه شود تعداد مهره‌های آبی در ظرف دوم ۵ و تعداد مهره‌های قرمز در این ظرف ۵تاست.

$$=\frac{15}{360}+\frac{24}{360}=\frac{39}{360}$$

ب) $\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{10}$ + $\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{10}$

اگر یک مهرهٔ آبی از ظرف دوم به ظرف اول اضافه شود، تعداد مهره‌های آبی ظرف اول ۴ و تعداد مهره‌های قرمز این ظرف ۶تا می‌شود.

اگر یک مهرهٔ قرمز از ظرف دوم داخل ظرف اول بیندازیم تعداد مهره‌های قرمز در این ظرف ۷تا و تعداد مهره‌های آبی ۳تا می شود.

$$=\frac{48}{360}+\frac{45}{360}=\frac{93}{360}$$

$$\xrightarrow{+} P=\frac{39+93}{360}=\frac{132}{360}=\frac{11}{30}$$

۱۳۷- گزینهٔ ۴ دو معادله متغیر مشترک ندارند و مستقل از یکدیگرند. تعداد جواب‌های طبیعی هر کدام را پیدا کرده، در هم ضرب می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3=9 \quad \begin{cases}k=3\\n=9\end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{8}{2}=28$$

$$x_4+x_5=7 \quad \begin{cases}k=2\\n=7\end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{6}{1}=6$$

$$\Rightarrow 28\times 6=168$$

۱۳۸- گزینهٔ ۱ *این سؤال از مباحث خارج از کتاب درسی طرح شده است.*

خوب است بدانید درخت، گرافی همبند است که دور ندارد و در یک درخت مرتبهٔ n بین رأس‌ها و یال‌ها رابطهٔ $q=n-1$ برقرار است.

با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، یک درخت مرتبهٔ ۸ دارای ۷ یال است و مجموع درجه‌های رأس‌های آن برابر ۱۴ است. درجهٔ دو رأس درخت که ۳ و ۵ است، بنابراین مجموع درجه‌های ۶ رأس دیگر برابر است با:

$14-8=6$

بنابراین هر ۶ رأس دیگر درخت از درجهٔ ۱ هستند و درخت رأسی از درجهٔ ۲ ندارد.

۱۳۹- گزینهٔ ۱ ستون سوم و سطر سوم را می‌شود به راحتی پر کرد. حالا اگر عدد چهارم سطر اول را در نظر بگیرید، می‌بینید که این عدد نمی‌تواند ۳ یا ۴ یا ۱ یا ۲ باشد پس ۵ است.

		۳	۵	
b	۳	۱	۴	
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
		۲	۳	a

همچنین اگر عدد پنجم سطر چهارم را در نظر بگیرید، می‌بینید این عدد نمی‌تواند ۱ یا ۴ یا ۲ یا ۳ باشد، پس این عدد نیز ۵ است. پس تا این‌جای کار، مربع به صورت مقابل درمی‌آید:

پرکردن بقیهٔ مربع خیلی ساده است. عدد پنجم سطر دوم نمی‌تواند ۳ یا ۱ یا ۴ یا ۵ باشد، پس ۲ است و در نتیجه $b=5$.

حالا به دومین عدد سطر اول نگاه کنید. این عدد نمی‌تواند ۳ یا ۵ یا ۲ یا ۱ باشد پس ۴ است. ستون دوم را تکمیل می‌کنیم. حالا به اولین عدد سطر پنجم نگاه کنید. این عدد نمی‌تواند ۳ یا ۲ یا ۵ یا ۴ باشد پس حتماً برابر ۱ و در نتیجه a برابر ۴ و زوج‌مرتب (a,b) به صورت $(4,5)$ است.

۲	۴	۳	۵	۱
b=۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	a=۴

۱۴۰- گزینهٔ ۲ گراف دارای ۱۶ رأس است و درجهٔ بزرگ‌ترین رأس آن یعنی رأس‌های شمارهٔ ۱۴، ۱۵ و ۱۶ برابر ۶ است. می‌دانیم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$$

بنابراین:

$$\gamma(G)\ge\left\lceil \frac{16}{7} \right\rceil=3$$

یعنی با کم‌تر از ۳ رأس نمی‌توان همهٔ رأس‌ها را احاطه کرد. حالا اگر همین ۳ رأس را در نظر بگیرید، می‌بینید که با انتخاب این ۳ رأس، همهٔ رأس‌های گراف احاطه می‌شود و در نتیجه عدد احاطه‌گری گراف برابر ۳ و $\{14,15,16\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

۱۴۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم حاصل $\vec{a}.\vec{b}$، عدد است. بنابراین بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$، برداری هم‌راستا با $\vec{a}\times\vec{b}$ است.

Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

ابتدا $\vec{a}\times\vec{b}$ را به دست می‌آوریم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & \alpha & 2 \\ \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix}=(2\alpha-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3})$$

با توجه به این‌که بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ با بردار $\vec{c}$ موازی است، نتیجه می‌گیریم $\vec{a}\times\vec{b}$ باید با $\vec{c}$ موازی باشد یعنی باید $\vec{a}\times\vec{b}$ مضربی از $\vec{c}$ باشد.

$$\vec{a}\times\vec{b}\parallel\vec{c}\Rightarrow(2\alpha-\frac{4}{3},\frac{-2}{3},\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3})\parallel(-1,1,-1)$$

$$\Rightarrow\frac{2\alpha-\frac{4}{3}}{-1}=\frac{-\frac{2}{3}}{1}=\frac{\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3}}{-1}$$

بنابراین:

$$(1)\ \frac{2\alpha-\frac{4}{3}}{-1}=\frac{\frac{-2}{3}}{1}\Rightarrow 2\alpha-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2\alpha=\frac{6}{3}\Rightarrow\alpha=1$$

$$(2)\ \frac{\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3}}{-1}=\frac{-\frac{2}{3}}{1}\Rightarrow\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{4}{3}\alpha=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\alpha=1$$

به ازای $\alpha=1$، دو بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

۱۴۲- گزینهٔ ۱ کافی است دو ماتریسِ طرف چپ‌تساوی را در هم ضرب کنیم و برابر با ماتریس طرف راستِ تساوی قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix}5 & -2\\ 4 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\ 4b_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5b_1-2b_2\\ 4b_1+ab_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\ 4b_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5b_1-2b_2=4b_1\Rightarrow b_1=2b_2\\ 4b_1+ab_2=4b_2\xrightarrow{b_1=2b_2}8b_2+ab_2=4b_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow ab_2=-4b_2\Rightarrow a=-4$$

۱۴۳- گزینهٔ ۴ راهی نداریم جز این‌که ضرب سه ماتریس را به دست آوریم.

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9 & 3\\ 7 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

حالا که ضرب دو ماتریس اول را به دست آوردیم، حاصل را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم تا ماتریس A مشخص شود.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 9 & 3\\ 7 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\textcircled{9} & 6 & 3\\ 8 & \textcircled{7} & 4\\ 2 & 3 & \textcircled{5}\end{bmatrix}$$

مجموع عناصر (درایه‌های) روی قطر اصلی ماتریس A برابر با $9+7+5=21$ است.

۱۴۴- گزینهٔ ۴ *این سؤال خارج از کتاب درسی هندسه ۳ است.*

A^T را ترانهادهٔ ماتریس A گویند که از قراردادن درایه‌های سطر اول در ستون اول، درایه‌های سطر دوم در ستون دوم و ... به دست می‌آید.

با داشتن $A^T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$، AA^T به راحتی به دست می‌آید.

$$AA^T=\begin{bmatrix}1 & a & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+10 & a+2\\ a+2 & 3\end{bmatrix}$$

حالا از طرفین رابطهٔ $AA^TB=52I$، دترمینان می‌گیریم.

$$|AA^TB|=|52I|\Rightarrow|AA^T||B|=52^2\underbrace{|I|}_{1}$$

$$\Rightarrow(3(a^2+10)-(a+2)^2)\times 104=52^2$$

$$\Rightarrow 2a^2-4a+26=\frac{52^2}{104}$$

$$\Rightarrow 2a^2-4a+26=26\Rightarrow 2a^2-4a=0$$

$$\Rightarrow 2a(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=2\end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای a، برابر با ۲ است.

دقت کنید

تعریف ترانهاده، در کتاب درسی هندسه ۳ وجود ندارد و مربوط به کتاب‌های آموزشی نظام قبلی است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ مجموعه نقاطی که از یک خط در فضا، متساوی‌الفاصله باشند، روی سطح یک استوانه قرار دارند. بنابراین ۲ نادرست است.

مجموعه نقاطی **در صفحه** که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت به یک اندازه باشد، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

بنابراین ۳ نادرست است زیرا گفته در فضا

مجموعهٔ خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه، زاویهٔ یکسانی می‌سازند، روی دو مخروط قرار می‌گیرند. (در واقع این خطوط یک رویهٔ مخروطی ایجاد می‌کنند.) بنابراین ۴ نادرست است.

دقت کنید

بر یک خط در فضا، بی‌شمار صفحهٔ عمود می‌توان رسم کرد. هر خط موجود در هر یک از این صفحات بر خط موردنظر ما عمود است. بنابراین مجموعهٔ خطوط عمود بر یک خط در فضا، **بی‌شمار** صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ *این سؤال خارج از کتاب درسی هندسه ۳ است.*

معادلهٔ استاندارد بیضی قائم به شکل $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ است.

طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم تا شکل استاندارد پیدا کند.

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=\frac{25}{4}\\ b^2=4\end{cases}$$

به کمک رابطهٔ $a^2-b^2=c^2$ در بیضی، داریم:

$$c^2=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

مرکز این بیضیِ قائم، نقطهٔ $O'(1,-1)$ است. با توجه به این‌که $c=\frac{3}{2}$ است، مختصات F و F' عبارت است از:

$$F=(1,-1+\frac{3}{2})=(1,\frac{1}{2}) \quad و \quad F'=(1,-1-\frac{3}{2})=(1,\frac{-5}{2})$$

باید معادلهٔ سهمی‌ای را بنویسیم که رأس آن $F(1,\frac{1}{2})$ باشد و کانون آن $F'(1,\frac{-5}{2})$ باشد.

با توجه به مختصات رأس و کانون سهمی، سهمی قائم است و دهانهٔ آن به سمت yهای منفی باز می‌شود. $a=FF'=3$

بنابراین معادلهٔ سهمی عبارت است از:

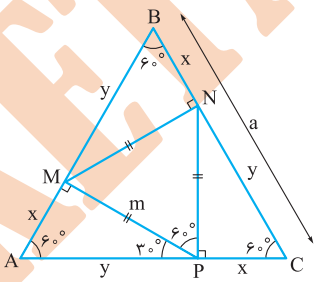
$$(x-1)^2=-12(y-\frac{1}{2}) \Rightarrow (x-1)^2=-12y+6$$

دقت کنید

معادلهٔ بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ وجود ندارد!

۱۴۷- گزینهٔ ۱

طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع MNP را برابر با m در نظر می‌گیریم. سه مثلث قائم‌الزاویهٔ AMP، BMN و CNP بنا به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند.



مطابق شکل داریم:

$$AP=BM=CN=y \quad و \quad AM=BN=CP=x$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMP داریم:

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{x}{m} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{m} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}m$$

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{m}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{m}{y} \Rightarrow y=\frac{2}{\sqrt{3}}m=\frac{2\sqrt{3}}{3}m$$

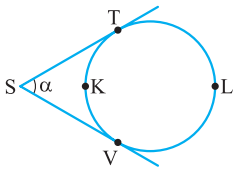
$$\Rightarrow a=x+y=\frac{\sqrt{3}}{3}m+\frac{2\sqrt{3}}{3}m=\sqrt{3}m$$

$$\Rightarrow \frac{a}{m}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(MNP)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}m^2}=(\frac{a}{m})^2=(\sqrt{3})^2=3$$

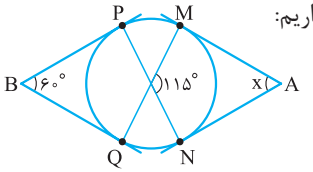
۱۴۸- گزینهٔ ۳

اول به شکل زیر نگاه کنید. می‌دانیم:



$$\begin{cases} \alpha=\frac{\overset{\frown}{TLV}-\overset{\frown}{TKV}}{2} \\ \overset{\frown}{TLV}+\overset{\frown}{TKV}=360^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{TKV}=180^\circ-\alpha \\ \overset{\frown}{TLV}=180^\circ+\alpha \end{cases}$$

با توضیح بالا، در شکل سؤال، داریم:



$$\overset{\frown}{PQ}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

$$115^\circ=\frac{\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{PQ}}{2} \Rightarrow 115^\circ=\frac{\overset{\frown}{MN}+120^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{MN}=110^\circ$$

$$\overset{\frown}{MN}=180^\circ-x \Rightarrow x=180^\circ-110^\circ=70^\circ$$

۱۴۹- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ هرون، مساحت مثلثی به طول اضلاع ۱۷، ۱۰ و ۲۱ را محاسبه می‌کنیم:

$$2p=21+17+10 \Rightarrow p=24$$

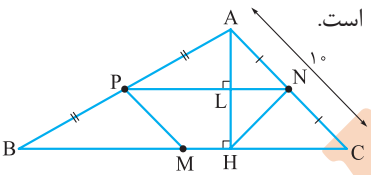
$$\Rightarrow S=\sqrt{24\times(24-21)\times(24-17)\times(24-10)}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{24\times3\times7\times14}=\sqrt{3^2\times2^4\times7^2}$$

$$=3\times4\times7=84$$

$$AH=\frac{2S}{a} \Rightarrow 8=\frac{2\times84}{a} \Rightarrow a=21$$

یعنی AH، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع است. اگر از N به P وصل کنیم، با توجه به عکس قضیهٔ تالس PN موازی با BC و طول آن نصف طول BC است.



پس $HMPN$ یک ذوزنقه است که طول قاعدهٔ بزرگ آن $PN=\frac{21}{2}=10/5$ است.

از طرفی AHC یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر $AC=10$ و یک ضلع قائمهٔ $AH=8$ است، پس بنا به قضیهٔ فیثاغورس $CH=6$ و داریم:

$$MH=MC-CH=\frac{21}{2}-6=4/5$$

با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ACH داریم:

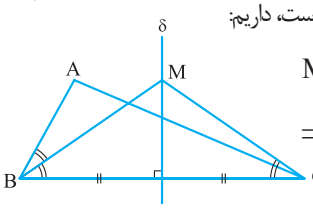
$$LH=AL=\frac{1}{2}AH=4$$

پس:

$$S(HMPN)=\frac{1}{2}(PN+MH)\times LH$$

$$=\frac{1}{2}\times(10/5+4/5)\times4=30$$

۱۵۰- گزینهٔ ۳ از M به C وصل می‌کنیم از آن‌جا که M نقطه‌ای واقع بر عمود منصف BC است، از B و C به یک فاصله است $(MB=MC)$، پس مثلث MBC متساوی‌الساقین است و $\hat{B}=M\hat{B}C=M\hat{C}B=\frac{1}{2}$. از آن‌جا که M بیرون مثلث ABC است، داریم:



$$M\hat{C}B>A\hat{C}B \Rightarrow \frac{1}{2}\hat{B}>\hat{C}$$

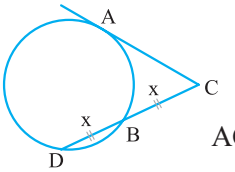
$$\Rightarrow \hat{B}>2\hat{C}$$

گزینه‌های ۱ و ۲ یکی است.

BISTAKETAB

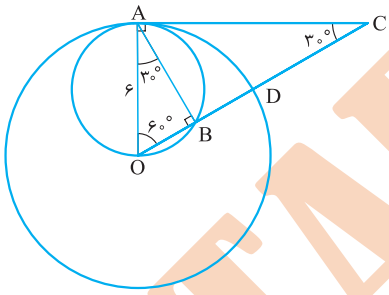
Edited with the trial version of Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit: www.foxitsoftware.com/shopping

۱۵۱- گزینهٔ ۴ در نظر می‌گیریم $DB = BC = x$؛ با استفاده از روابط طولی، داریم:



$$AC^2 = CB.CD \Rightarrow AC^2 = x(2x)$$
$$\Rightarrow AC = x\sqrt{2} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

۱۵۲- گزینهٔ ۲ از A به O و B وصل می‌کنیم، داریم:



$O\hat{A}C = 90^\circ$ (زاویهٔ بین مماس و شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس)

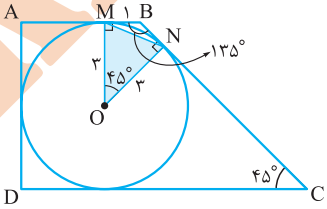
$A\hat{B}O = 90^\circ$ (محاطی روبه‌روی قطر در دایرهٔ کوچک)

یعنی در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC، ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است، پس $O\hat{A}B = \hat{C} = 30^\circ$ و داریم:

$\overset{\Delta}{OAB}: OB = \frac{6}{2} = 3$ (ضلع روبه‌روی زاویهٔ 30°)

$$\Rightarrow BD = \underbrace{OD}_{\text{شعاع دایرهٔ بزرگ}} - OB = 6 - 3 = 3$$

۱۵۳- گزینهٔ ۳



چهارضلعی ABCD ذوزنقه است، پس $AB \parallel CD$ و با استفاده از قضیهٔ موازی مورب، داریم: $\hat{B} = 135^\circ$.

M و N نقاط تماس اضلاع ذوزنقه با دایره هستند، پس اگر از مرکز دایره (O) به M و N وصل کنیم، داریم:

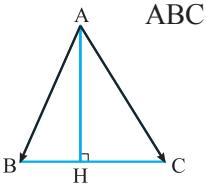
$OM = ON = 3$ (شعاع دایره)

OM و ON به ترتیب بر AB و BC عمود هستند و در چهارضلعی BMON، مجموع زاویه‌های داخلی 360° است، پس $M\hat{O}N = 45^\circ$.

در نهایت داریم: $S(OMN) = \frac{1}{2}OM.ON.\sin(M\hat{O}N)$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۲ می‌توانیم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی به دست آوریم.



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,-1) - (-1,2,0) = (2,-2,-1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,1) - (-1,2,0) = (1,-3,1)$$

بنابراین:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5i - 3j - 4k$$

با توجه به این‌که $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ است، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

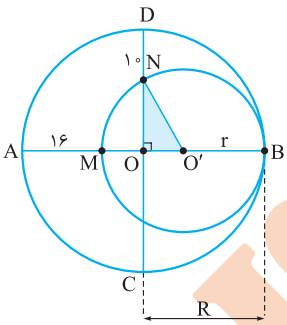
با داشتن طول ضلع BC می‌توانیم طول ارتفاع AH را به راحتی به دست آوریم.

$$|BC| = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{6}$$

از آن‌جا که $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}AH \times BC$ است، پس:

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

۱۵۵- گزینهٔ ۳



AB و CD قطرهای دایرهٔ بزرگ هستند، پس محل برخورد آن‌ها مرکز دایرهٔ بزرگ است اگر دایرهٔ کوچک را $C'(O', r)$ و دایرهٔ بزرگ $C(O, R)$ بنامیم، داریم:

$$AB = 2R \Rightarrow 16 + 2r = 2R \Rightarrow R - r = 8 \quad (*)$$

از O' به N وصل می‌کنیم با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ONO' داریم:

$$O'N^2 = O'O^2 + ON^2 \Rightarrow r^2 = (R-r)^2 + (R-10)^2$$
$$\xrightarrow{(*)} r^2 = 8^2 + (r-2)^2 \Rightarrow r^2 = 64 + r^2 - 4r + 4$$
$$\Rightarrow 4r = 68 \Rightarrow r = 17$$

BIANKETAB