ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

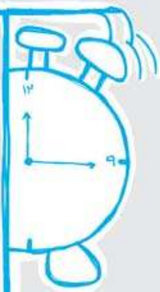
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد، شهریور، دی ۹۸ و دی ۹۹ است، طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰،خرداد و شهریور ۹۹ است.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

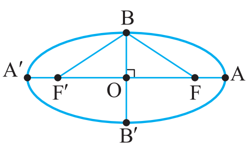
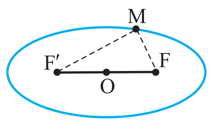


فهرست

بارم‌بندی درس هندسه (۳)

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول		۱۰	۴	۶
فصل دوم	تا صفحهٔ ۴۶	۱۰	۳	۸
	بعد از صفحهٔ ۴۶	–	۵	
فصل سوم		–	۸	۶
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره
	فصل اول		
۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه .... $= (A^{-۱})^{-۱}$.		۰/۲۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر A، B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$. ب) اتحادهای جبری دربارهٔ ماتریس‌ها برقرار هستند. پ) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است. ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $\lvert BA \rvert = \lvert AB \rvert = \lvert A \rvert \lvert B \rvert$.		۱
۳	ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij} = ۲i + ۳j$ را به صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی را بیابید.	با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی.	۱
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، نشان دهید: $A^۲ - ۴A - ۵I_۳ = \bar{O}$.	حواست باشه $I_۳$ یعنی $I_{۳\times۳}$.	۱/۵
۵	دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$.	دقت کن که باید تمام درایه‌های ماتریس AB، صفر شوند.	۱/۵
۶	اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۲×۲ باشد و $\lvert A \rvert = -۲$، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. $\lvert A^۴ \rvert - ۴\lvert A^{-۱} \rvert + ۳$	دقت کن ضریب ۴ بیرون از دترمینان است ولی توان ۴ داخل دترمینان.	۱
۷	اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $۵A^{-۱} + B^{-۱}$ را به دست آورید.	ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است.	۱/۲۵
۸	دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ -۲ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار برحسب ستون اول محاسبه کنید.	حواست باشه حاصل دترمینان از هر دو روش باید یکسان شود.	۱/۵
۹	مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} ۲x + ۳y = ۴ \\ ax - y = ۲a \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد.	بی‌شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق‌بودن دو خط.	۱
	فصل دوم		
۱۰	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر .... ب) رابطهٔ ضمنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر .... پ) اگر در معادلهٔ تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta > ۰$، آن‌گاه خط و دایره		۰/۷۵
۱۱	یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.	دقت کن که صفحهٔ P از رأس مفروط نگذشته.	۰/۷۵
۱۲	مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ ثابت ۱ واحد باشند.»	خط L از طرفین نامحدود است.	۰/۷۵
۱۳	خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ L واحد باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث کنید.)		۱/۵
۱۴	الف) دایره به معادلهٔ $۴(x-۱)^۲ + (۲y+۱)^۲ = ۱$ را رسم کنید. ب) مساحت این دایره چه‌قدر است؟	برای محاسبهٔ مساحت دایره فقط به شعاع نیاز داری.	۱/۵
۱۵	به روش مربع کامل کردن، شعاع و مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ را بیابید.	راه‌حل تشریحی لازمه نه استفاده از فرمول.	۱/۵
۱۶	مقدار a را چنان بیابید که خط $y + ۳x = a$ بر دایرهٔ $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + y = ۰$ مماس باشد.	به ضریب ۲ برای x^2 و y^2 دقت کن.	۱/۵
۱۷	وضعیت دو دایرهٔ روبه‌رو را نسبت به هم بررسی کنید.	$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۱ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y + ۱ = ۰ \end{cases}$	۱/۷۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۰	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر .... است. ب) اگر صفحهٔ P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل‌مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک .... است. پ) در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ بیضی به .... تبدیل می‌شود. ت) در فضای $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ $(-۳,۲,-۵)$ در ناحیه (کنج) .... دستگاه مختصات قرار دارد.	۱
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$ آن‌گاه داریم: $A = B$. ب) مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است. پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. ت) اگر زاویهٔ بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.	۱
۳	دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.	۱
۴	اگر $۲A=\begin{bmatrix} \|A\| & -۴ \\ ۱ & \|A\| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $\|A^{-۱}\|$ را بیابید.	۱/۵
۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$	۱
۶	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x+۴y=-۵$ مماس باشد.	۱
۷	وضعیت دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵
۸	در شکل مقابل اگر $OF=c, OB=b, OA=a$ باشد، ثابت کنید: $a^۲=b^۲+c^۲$  	۱
۹	نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.  الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. ب) طول MF را به دست آورید. (F' و F کانون‌های بیضی هستند و $MF < MF'$)	۱/۵
۱۰	اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادلهٔ خط هادی سهمی باشد: الف) معادلهٔ سهمی را به دست آورید. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.	۱/۲۵
۱۱	در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است. فاصلهٔ کانونی این دیش را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۲	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) اگر $y=b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد که از نقطهٔ $A=(۲,-۳,۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چه‌قدر است؟	۱/۵

هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	زمان آزمون: ۱۳۵ دقیقه	kheilisabz.com	

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۰	نمره
	ب) معادلات $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ است؟ پ) در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطهٔ A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحهٔ yoz و نقطهٔ $B=(-4,6,-3)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.	
۱۳	اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$، $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آن‌گاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب با طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$، مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.	۱/۲۵
۱۶	سه بردار $\vec{a}=(2,3,1)$، $\vec{b}=(-1,1,0)$ و $\vec{c}=(2,1,-2)$ مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $-2\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید. ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.	۲
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- A

۲- الف) درست. خاصیت توزیع‌پذیری در ماتریس‌ها برقرار است.

ب) نادرست. زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در نتیجه اتحادهای جبری برقرار نیستند.

پ) نادرست. زیرا $|A| = 12 - 12 = 0$. می‌دانیم شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq 0$ باشد.

ت) درست. دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

۳- i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون است. $1 \le i, j \le 3$.

$$a_{11} = 2(1) + 3(1) = 5$$
$$a_{12} = 2(1) + 3(2) = 8$$
$$a_{13} = 2(1) + 3(3) = 11$$
$$a_{21} = 2(2) + 3(1) = 7$$
$$a_{22} = 2(2) + 3(2) = 10$$
$$a_{23} = 2(2) + 3(3) = 13$$
$$a_{31} = 2(3) + 3(1) = 9$$
$$a_{32} = 2(3) + 3(2) = 12$$
$$a_{33} = 2(3) + 3(3) = 15$$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی یعنی:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 10 + 15 = 30$$

۴- A^2 یعنی A را دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$4A$ یعنی عدد ۴ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

I_3 ماتریس همانی مرتبهٔ 3×3، $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است و $5I_3$ برابر است با $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

در نتیجه:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

اگر عملیات تفریق را روی درایه‌های نظیر به نظیر انجام دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{o}$$

۵- برای دو ماتریس غیرصفر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$، حاصل‌ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{o}$$

یعنی ممکن است حاصل‌ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر بشود.

۶- می‌دانیم توان از دترمینان خارج می‌شود، یعنی $|A^4| = |A|^4$. همچنین $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در نتیجه:

$$|A^4| - 4|A^{-1}| + 3 = |A|^4 - 4 \times \frac{1}{|A|} + 3$$
$$= (-2)^4 - 4 \times \frac{1}{-2} + 3 = 16 + 2 + 3 = 21$$

۷-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - (-2) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 5A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{درایه‌ها}]{\text{جمع نظیربه‌نظیر}} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

۸- ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

$$= (+2 + 60 + 70) - (-28 + 15 - 20) = 132 - (-33) = 132 + 33 = 165$$

بسط ستون اول:

$$|A| = 1 \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = -13 + 90 + 88 = 165$$

۹- برای این‌که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند یعنی:

$$\underbrace{\frac{2}{a} = \frac{3}{-1}} = \frac{4}{2a}$$

از حل تناسب اول داریم:

$$3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

با جای‌گذاری $a = -\frac{2}{3}$، هر سه کسر با هم برابرند.

$$\frac{2}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2(-\frac{2}{3})} \Rightarrow -3 = -3 = -3$$

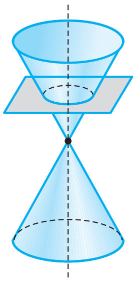
بنابراین به ازای $a = -\frac{2}{3}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (توجه کنید اگر تساوی بین کسرها برقرار نمی‌شد، آن‌گاه دستگاه به ازای هیچ مقدار a، دارای بی‌شمار جواب نبود.)

۱۰- الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

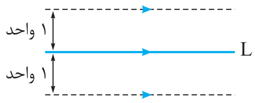
ب) $a^2 + b^2 > 4c$

پ) در دو نقطه متقاطع‌اند.

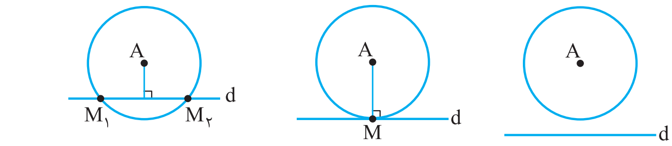
۱۱- دایره



۱۲- دو خط موازی با خط L و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن، که در دو طرف خط L هستند.



۱۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطهٔ تماس، نقطهٔ مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست.



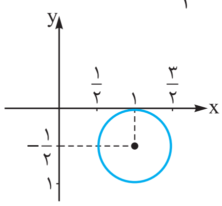
(مسئله جواب ندارد.) (M تنها جواب مسئله است.) (M_1 و M_2 دو جواب مسئله هستند.)

۱۴- الف) ابتدا معادلهٔ دایره را استاندارد می‌کنیم، در پرانتز دوم از ضریب y فاکتور می‌گیریم:

$$4(x-1)^2+4(y+\frac{1}{2})^2=1 \xrightarrow{\div 4} (x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

ریشهٔ داخل پرانتزها، مرکز دایره را تشکیل می‌دهند و جذر مقدار ثابت، همان شعاع دایره خواهد بود.

$$O(1,-\frac{1}{2}) \ , \ R=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$



ب) $S_{\text{دایره}}=\pi R^2=\pi(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{4}$

۱۵- xها را کنار هم و yها را کنار هم قرار می‌دهیم. سپس هر پرانتز را مربع کامل می‌کنیم:

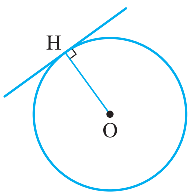
$$(x^2+2x)+(y^2-4y)=0 \Rightarrow (\underbrace{x^2+2x+1}_{\text{اتحاد}}-1)+(\underbrace{y^2-4y+4}_{\text{اتحاد}}-4)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5$$

ریشهٔ داخل پرانتزها مرکز و جذر مقدار ثابت، شعاع دایره است.

$$\left.\begin{matrix} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ y-2=0 \Rightarrow y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow O(-1,2) \ , \ R=\sqrt{5}$$

۱۶- برای این‌که خط بر دایره مماس شود، باید فاصلهٔ خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH=R$.



$$2x^2+2y^2-3x+y=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y=0$$

$$O=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})=(-\frac{-\frac{3}{2}}{2},-\frac{\frac{1}{2}}{2})=(\frac{3}{4},-\frac{1}{4})$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-0}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$OH=\text{فاصلهٔ مرکز دایره تا خط}=\frac{|3(\frac{3}{4})-\frac{1}{4}-a|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|2-a|}{\sqrt{10}}$$

باید $\frac{|2-a|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$، پس: $|2-a|=\frac{10}{4}$؛ در نتیجه $|2-a|=\frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a=\frac{5}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \\ 2-a=-\frac{5}{2} \Rightarrow a=\frac{9}{2} \end{cases}$$

۱۷- ابتدا باید مرکز و شعاع دو دایره را مشخص کنیم. در دایرهٔ اول:

$$x^2+y^2-2x+4y-1=0$$

قرینهٔ نصف ضریب x و ضریب y مرکز را تشکیل می‌دهند:

$$O=(-\frac{(-2)}{2},-\frac{4}{2})=(1,-2)$$

همچنین شعاع دایرهٔ اول برابر است با:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\sqrt{6}$$

برای دایرهٔ دوم نیز داریم:

$$O'(-\frac{4}{2},-\frac{2}{2})=(-2,-1)$$

$$R'=\frac{1}{2}\sqrt{16+4-4}=2$$

اکنون طول پاره‌خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

$$OO'=\sqrt{(1+2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{10}$$

چون $\sqrt{6}-2<\overset{\sqrt{10}}{OO'}<2+\sqrt{6}$ $(|R-R'|<OO'<R+R')$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

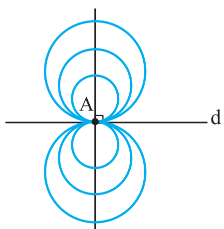
۱- الف) ۸، چون ماتریس اسکالر است پس $f=e=c=۰$ و $a=b=۲$:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}۲&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&۲\end{vmatrix}=۸$$

ب) خط پ) دایره ت) ششم

۲- الف) درست

ب) نادرست



یک خط عمود به‌جز خود A

پ) درست

ت) نادرست

$$۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos\theta<۰$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\underbrace{|\vec{a}|}_{+}\underbrace{|\vec{b}|}_{+}\underbrace{\cos\theta}_{-}<۰ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}<۰$$

۳- چون A قطری است پس درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \qquad n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱$$

$$AB=\begin{bmatrix}۲&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\۲&۰&-۱\\۳&-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲&۲\\۶&۰&-۳\\۹&-۳&۶\end{bmatrix}$$

۴- $$۲A=\begin{bmatrix}|A|&-۴\\۱&|A|\end{bmatrix}\Rightarrow |۲A|=|A|^۲+۴$$

$$\xrightarrow{A_{۲\times۲}} ۲^۲|A|=|A|^۲+۴ \Rightarrow |A|^۲-۴|A|+۴=۰$$

$$\Rightarrow (|A|-۲)^۲=۰ \Rightarrow |A|=۲ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{۲}$$

۵- $$\begin{cases}۳x-۴y=۷\\۲x+y=۱\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}۳&-۴\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۳+۸=۱۱\neq ۰$$

پس دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-۱}\times\begin{bmatrix}۷\\۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱&۴\\-۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷\\۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱۱\\-۱۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\y=-۱\end{cases}$$

۶- فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است. $O=(۲,۱)$

$۳x+۴y+۵=۰$ (خط مماس)

$$R=\frac{|۶+۴+۵|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$$

۷- مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ برابر است با:

$$O(\frac{۶}{۲},\frac{۲}{۲})=(۳,۱)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۳۶}=۱$$

مرکز و شعاع دایرهٔ دوم:

$O'(۰,۰)$

$R'=۱$

$OO'=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$

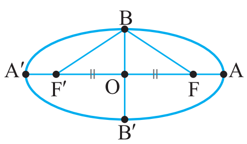
$R+R'=۲$

$R-R'=۰$

$OO'>R+R'$ $(\sqrt{۱۰}>۲)$ پس دو دایره متخارج‌اند.

۸- نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' است پس فاصلهٔ B از دو سر پاره‌خط $F'F$ یکسان است.

$\Rightarrow BF=BF'$



از طرفی B روی بیضی است پس طبق تعریف بیضی: $BF+BF'=۲a$

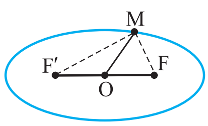
در نتیجه $BF=BF'=a$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{BOF}$ داریم:

$$\begin{aligned}OB&=b\\OF&=c \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BF^۲=OB^۲+OF^۲ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\\BF&=a\end{aligned}$$

۹- الف) $۲a=۱۰=$ قطر بزرگ $\Rightarrow a=۵$

$۲b=۶=$ قطر کوچک $\Rightarrow b=۳$



در بیضی $a^۲=b^۲+c^۲$ پس:

$$c^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow c=۴$$

یعنی $OF=OF'=۴$.

از طرفی طبق فرض $OM = ۴$ در نتیجه: $OM = OF = OF' = ۴$

پس OM نقش میانهٔ وارد بر FF' را دارد و نصف آن طول دارد. پس مثلث در رأس M قائمه است.

ب) $MF + MF' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow MF' = ۱۰ - MF$

$$\xrightarrow[\text{مثلث}]{\text{فیثاغورس در}} FF'^{۲} = MF^{۲} + MF'^{۲} \Rightarrow ۸^{۲} = MF^{۲} + (۱۰ - MF)^{۲}$$

قرار می‌دهیم: $MF = x$

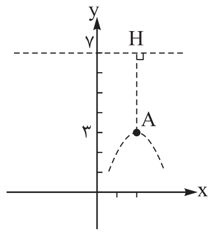
$$\Rightarrow ۶۴ = x^{۲} + (۱۰ - x)^{۲} \Rightarrow ۶۴ = x^{۲} + ۱۰۰ - ۲۰x + x^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۲۰x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۱۰x + ۱۸ = ۰$$

$$\Delta = ۱۰۰ - ۷۲ = ۲۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$

$$x = \frac{۱۰ \pm ۲\sqrt{۷}}{۲} = ۵ \pm \sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases} MF = ۵ - \sqrt{۷} \\ MF' = ۵ + \sqrt{۷} \end{cases}$$

۱۰- الف) رأس سهمی $A(۲,۳)$ و خط هادی $y = ۷$ را رسم می‌کنیم.



طبق شکل سهمی قائم و دهانهٔ سهمی رو به پایین است.

فاصلهٔ رأس تا خط هادی ۴ واحد است پس $a = -۴$.

$$(x - ۲)^{۲} = ۴(-۴)(y - ۳)$$

ب) $F(۲, ۳ - ۴) = (۲, -۱)$

۱۱- اگر قطر دهانهٔ دیش را با $۲b$ و گودی را با h نمایش دهیم فاصلهٔ کانونی برابر $a = \frac{۴b^{۲}}{۱۶h}$ است.

$$\begin{matrix} h = ۹ \\ ۲b = ۶۰ \end{matrix} \Rightarrow a = \frac{(۶۰)^{۲}}{۱۶(۹)} = ۲۵$$

۱۲- الف) $b = -۳$ ب) محور z ها

پ) در صفحهٔ yoz ، $x = ۰$ است پس:

$$A(۰,۲,۳)$$
$$B(-۴,۶,-۳)$$

$$AB \text{ مختصات وسط} = (\frac{۰-۴}{۲}, \frac{۲+۶}{۲}, \frac{۳-۳}{۲}) = (-۲,۴,۰)$$

۱۳- $$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{b}+\vec{c}|^{۲}}(\vec{b}+\vec{c})$$

$$(\vec{b}+\vec{c}) = (۲,-۳,۶)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = (۱,-۳,۴).(۲,-۳,۶) = ۲ + ۹ + ۲۴ = ۳۵$$

$$|\vec{b}+\vec{c}|^{۲} = (\sqrt{۴+۹+۳۶})^{۲} = ۴۹$$

$$\vec{a}' = \frac{۳۵}{۴۹}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{۵}{۷}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶) = (\frac{۱۰}{۷}, \frac{-۱۵}{۷}, \frac{۳۰}{۷})$$

۱۴- $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{o} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = ۰ \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = ۰$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^{۲} + |\vec{b}|^{۲} + |\vec{c}|^{۲} + ۲(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ + ۴ + ۹ + ۲(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = ۰ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = -\frac{۱۴}{۲} = -۷$$

۱۵- $$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ۰$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = ۰ \xleftrightarrow{|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq ۰} \sin\theta = ۰$$

$$\Leftrightarrow \theta = ۰ \text{ یا } \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۱۶- الف) بردار عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با ضرب خارجی آن‌ها:

$$(-۲\vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = (۴,۴,۶)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|$$

اولاً: $$\vec{b} \times \vec{c} = -\frac{۱}{۲}(-۲\vec{b}) \times \vec{c} = -\frac{۱}{۲}(۴,۴,۶) = (-۲,-۲,-۳)$$

ثانیاً: $$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = -۴ - ۶ - ۳ = -۱۳ \Rightarrow V = |-۱۳| = ۱۳$$

فصل ۱: ماتریس و کاربرد

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ \sqrt{۲} & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

تعریف مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم «A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ است». مثلاً ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \\ ۵ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳ سطری و ۲ ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش ۳×۲ است.

تذکر: نمایش کلی ماتریس A به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij} ها درایهٔ واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً:

$$A_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$$A_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \qquad A_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

مثال: **ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=۲i-j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.**

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

برای درایهٔ $a_{۱۱}$ داریم: $i=۱, j=۱$ پس: $a_{۱۱}=۲(۱)-۱=۱$

برای درایهٔ $a_{۱۲}$ داریم: $i=۱, j=۲$ پس: $a_{۱۲}=۲(۱)-۲=۰$

و به همین ترتیب: $a_{۲۱}=۲(۲)-۱=۳$ ، $a_{۱۳}=۲(۱)-۳=-۱$

$a_{۲۳}=۲(۲)-۳=۱$ ، $a_{۲۲}=۲(۲)-۲=۲$

در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است: $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$.

۲) **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A=\begin{bmatrix} -\sqrt{۲} \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$.

۳) **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرهای آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس مربعی مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. مانند: $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$ یا $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$.

نکته: در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شمارهٔ سطر و ستون برابر دارند ($a_{۱۱}, a_{۲۲}, a_{۳۳}, \ldots$) را درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های مربعی بالا، به‌ترتیب قطرهای اصلی $\begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix}$ و $\begin{matrix} ۱ \\ ۵ \\ ۹ \end{matrix}$ هستند.

۴) **ماتریس قطری:** ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۵) **ماتریس اسکالر:** ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} -۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۵ \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم: در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهند.

$$I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad I_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۶) **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند: $\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر i و j، $a_{ij}=b_{ij}$ باشد.

مثال: **مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & ۲+b \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱-b & ۱ \\ a+b & -۱ \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.**

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیربه‌نظیر را برابر هم قرار دهیم:

$$\left.\begin{cases} ۱-b=a \Rightarrow a+b=۱ \\ ۱=۲+b \Rightarrow b=-۱ \end{cases}\right\} \Rightarrow a=۲$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌ها را نظیربه‌نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب عدد r در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که r در همهٔ درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

$$rA = r[a_{ij}]_{m\times n} = [ra_{ij}]_{m\times n}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $2A+3B$ را به دست آورید.

پاسخ عدد ۲ را در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد ۳ را در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$2A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad 3B=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A_{m\times n}$، آن‌گاه قرینهٔ ماتریس A، از ضرب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با A− نمایش می‌دهیم.

توجه شود که $A+(-A)=\bar{O}$.

تذکر به کمک قرینهٔ یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد: $A-B=A+(-B)$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبهٔ $m\times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

۱ $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲ $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۳ $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی جمع)

۴ $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (عضو قرینه)

۵ $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶ $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷ $A=B \Rightarrow rA=rB$

۸ $\begin{cases} rA=rB \\ r\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$.

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r([a_{ij}\pm b_{ij}])=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$$
$$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]$.

$$(r\pm s)A=(r\pm s)[a_{ij}]=[(r\pm s)a_{ij}]=[ra_{ij}\pm sa_{ij}]=[ra_{ij}]\pm[sa_{ij}]$$
$$=r[a_{ij}]\pm s[a_{ij}]=rA\pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب A در B، یعنی AB زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n). آن‌گاه ماتریس AB از مرتبهٔ $m\times p$ است. نکتهٔ مهم این‌که، برای پیداکردن درایهٔ سطر i و ستون j حاصل‌ضرب AB، باید درایه‌های سطر iام ماتریس A را نظیربه‌نظیر در درایه‌های نظیرش در ستون jام ماتریس B ضرب کنیم، سپس حاصل آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$، ماتریس BA را محاسبه کنید.

پاسخ تعداد ستون‌های B (۳تا) با تعداد سطرهای A (۳تا) برابر است، پس ضرب BA تعریف شده است. برای محاسبهٔ ماتریس BA، باید درایه‌های هر سطر B را در درایه‌های متناظرش در هر ستون A ضرب کنیم:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times \cancel{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{\cancel{3}\times 3}=\begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مثلاً درایهٔ سطر اول و ستون اول BA به صورت زیر محاسبه شده است:

$1\times 1+0\times 2+2\times 3=7$

تذکر توجه شود که در مثال بالا ماتریس AB تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (۳تا) با تعداد سطرهای B (۲تا) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

۱ ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A\times B\neq B\times A$

اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $A\times I=I\times A=A$

در واقع ماتریس همانی I، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

۲ ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

۳ ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

تذکر دقت کنید که همیشه باید حواسمان باشد که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد.

دو نکتهٔ مهم دربارهٔ ضرب ماتریس‌ها

۱ اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB=\bar{O}$، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و B یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال دو ماتریس ناصفر 2×2 مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.

پاسخ اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه AB برابر است با:

$$AB=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

۲ قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

مثلاً اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$؛

آن‌گاه $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $AC=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ اما $B\neq C$.

تذکر **توان در ماتریس:** منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب‌کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$A^2=A\times A$

$A^3=A\times A\times A$

$\vdots$

نکته اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ توان آن، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۲-۲A$ را بیابید.

پاسخ:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}$$

$$۲A=\begin{bmatrix}۴&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۲A=\begin{bmatrix}۳&۲\\-۲&-۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=-I$$

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است، به طوری که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارونِ A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$$

تذکر: وارون ماتریس A در صورت وجود منحصر به فرد است.

نحوهٔ محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲

وارون ماتریس ۲×۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}\quad,\quad ad-bc\neq ۰$$

مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A نامیده و با $|A|$ نشان می‌دهیم.

$$|A|=ad-bc$$

توجه شود که محاسبات بالا، فقط برای ماتریس‌های ۲×۲ است.

تذکر مهم: مقدار $|A|$ در محاسبهٔ $A^{-۱}$ در مخرج کسر ظاهر می‌شود، پس شرط وارون‌پذیری ماتریس A، آن است که $|A|\neq ۰$.

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}$ را در صورت وجود محاسبه کرده، سپس پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

پاسخ: ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=۳-(-۲)=۵\neq ۰$$

پس ماتریس A وارون‌پذیر است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}$$

برای امتحان‌کردن پاسخ باید $A^{-۱}A$ و $AA^{-۱}$ برابر با ماتریس همانی I شود:

$$A^{-۱}A=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵&۰\\۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$$AA^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۱&۳\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۱&۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۵&۰\\۰&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۱\end{bmatrix}$، ماتریس $(A^{-۱})^{-۱}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: باید از A دو بار وارون بگیریم. حدس ما این است که ماتریس اولیه حاصل شود.

$$|A|=۴-۳=۱\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۳&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۳&۴\end{bmatrix}$$

حال وارونِ $A^{-۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A^{-۱}|=۴-۳=۱$$

$$(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=A$$

در نتیجه:

$$(A^{-۱})^{-۱}=A$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس وارون

یک دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت: $\begin{cases}ax+by=e\\cx+dy=f\end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

فرم ماتریسی دستگاه به صورت زیر است:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس مجهولات}}=\underbrace{\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جواب}}$$

A = نماد ماتریس ضرایب

X = نماد ماتریس مجهولات

B = نماد ماتریس جواب

$\Rightarrow AX=B$

برای حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول به روش ماتریس وارون، ابتدا فرم ماتریسی دستگاه را می‌نویسیم: $AX=B$

سپس اگر A وارون‌پذیر باشد، وارونِ A را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$X=A^{-۱}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases}۲x+y=-۳\\x+۳y=۱\end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}=\text{ماتریس ضرایب}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\text{ماتریس مجهولات}\qquad B=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}=\text{ماتریس جواب}$$

فرم ماتریسی دستگاه:

$$\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}B$$

بنابراین باید وارون A را محاسبه کنیم:

$$|A|=۶-۱=۵$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{-۱}{۵}\\\frac{-۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

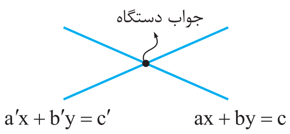
$$X=A^{-۱}B=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{-۱}{۵}\\\frac{-۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۱۰}{۵}\\\frac{۵}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=-۲\,,\,y=۱$$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

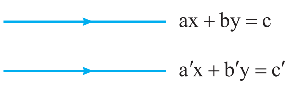
یک دستگاه دو معادله دو مجهول، از دو معادله تشکیل می‌شود، هر معادله یک خط است. منظور از حل دستگاه، بررسی وضعیت نسبی این دو خط است که سه حالت خواهد داشت: موازی، منطبق و متقاطع.

دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

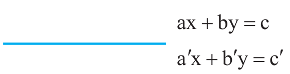
الف) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد، آن‌گاه دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب دارد که مختصات همان نقطهٔ تقاطع دو خط است.



ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند و دستگاه فاقد جواب است.



پ) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.



نکتهٔ مهم: اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهول را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a&b\\a'&b'\end{bmatrix}$$

اگر $|A|\neq ۰$ باشد، آن‌گاه دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع‌اند).

اگر $|A|=۰$ باشد، آن‌گاه دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق‌اند).